

Université Ibn Khaldoun-Tiaret

Département des Mathématiques

## **Polynômes Orthogonaux**

**Cours et Travaux dirigés destinés aux  
étudiants de première année Master**

par **A.Larabi**

**GENERALITES:**

Il est facile de montrer par un calcul trigonomtrique que :

$$2 \cos(m\theta) \cos(n\theta) = \cos(n + m)\theta + \cos(m - n)\theta$$

(1)

pour obtenir la formule:

$$\int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(n\theta) = 0, n \neq m$$
 (2)

Nous dirons que  $\cos(n\theta)$  et  $\cos(m\theta)$  sont orthogonales sur  $[0, \pi]$  pour  $n \neq m$   
En gnral , nous dirons que  $1, \cos \theta, \cos 2\theta, \dots$  est une suite orthogonale sur  $[0, \pi]$  Dans (2) le changement de variable  $x = \cos \theta$  donne

$$\int_{-1}^1 T_m(x)T_n(x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 0, m \neq n$$
 (3)

où on a pos :

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = \cos(ncos^{-1}x), pour -1 \leq x \leq 1$$
 (4)

ce qui nous donne :

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

,.....etc

# 1 dfnition

**Définition 1.0.1** les polynômes  $T_n(x)$  de (3) sont appels polynômes de tchebeyhev de 1 espce

On dit qu'il sont orthogonaux par rapport la fonction  $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  
 $-1 \leq x \leq 1$

En gnral , on considre les fonctions poids  $w(x) > 0$  telles que  
 $\int_a^b w(x)dx > 0$

On dfinit les moments  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  par

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x) dx \quad (5)$$

donc s'il existe une suite polynomiale  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ ,  $P_n$  de degr  $n$  tel que :

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = 0, n \neq m \quad (6)$$

alors  $\{P_n(x)\}$  est une suite de polynômes orthogonaux par rapport la fonction poids  $w(x)$  sur  $[a, b]$ , si on note pour une fonction integrable  $f$ :

$$L(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx \quad (7)$$

alors (5) et (6) s'écrivent

$$L(x^n) = \mu_n, pour n \geq 0 \quad (8)$$

$$L(P_n(x)P_m(x)) = 0, pour n \neq m \quad (9)$$

$L$  est un opérateur linéaire pour un polynôme :  $\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  on a

$$L(\pi(x)) = L\left(\sum_{k=0}^n c_k x^k\right) = \sum_{k=0}^n c_k \mu_k \quad (10)$$

## Remarques

1. la place (7) ,on peut considrer une suite relle ou complexes  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  et en utilisant (8) ,on peut dfnir une forme linéaire sur  $P$ (espace vectoriel des polynomes valeurs relles ou complexes)
2. s'il existe une suite  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  qui vrifie (9) et la condition  $L(P_n^2) \neq 0$  ,alors on dira que  $\{P_n(x)\}$  est une suite orthogonale par rapport  $L$

### Problème

est ce que toute suite de moments  $(\mu_n)_n \geq 0$  donne une suite orthogonale  $P_n(x)$ ? (le problème d'existence)

**Définition 1.0.2** soit  $(\mu_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres complexes et soit  $L$  la fonctionnelle linéaire définie sur  $P$  par :

$L(x^n) = \mu_n, n \geq 0$  le nombre  $\mu_n$  est appelé moment d'ordre  $n$

**Définition 1.0.3** une suite  $P_n(x)$  est appelée orthogonale par rapport  $L$  si

1.  $P_n(x)$  est polynôme de degré  $n$
2.  $L(P_n P_m) = 0, \forall n \neq m$
3.  $L(P_n^2) \neq 0, \forall n$

### Remarques

1. si de plus  $L(P_n^2) = 1$  on dira que la suite est orthonormale par rapport  $L$  nous avons dans ce cas :

$$L(P_n P_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

2. En général, on a

$$L(P_n(x) P_m(x)) = K_n \delta_{n,m}$$

$$K_n \neq 0$$

3. si  $\deg(P_0) = 0$  alors  $L(P_0(x)) = \alpha \mu_0 \neq 0 \Rightarrow \mu_0 \neq 0$  donc si la fonctionnelle  $L$  est telle que  $L(x^0) = 0$  alors la suite des polynômes orthogonaux par rapport  $L$  n'existe pas
4. prenons  $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$  et  $P_0(x) = a \neq 0, P_1(x) = bx + c$  avec  $b \neq 0$   
si  $L(P_0 P_1) = L(abx + ac) = aL(bx + c) = aL(b\mu_1 + c\mu_0) = 0$  alors  $b = -c$   
et par suite  
 $L(P_1^2(x)) = L(b^2 x^2 + c^2 + 2bcx) = b^2(\mu_2 - \mu_1 + \mu_0) = 0$

soit  $L$  une fonctionnelle définie par ses moments et soit  $\{P_n(x)\}$  une suite de polynômes, les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- a)  $\{P_n(x)\}$  est une suite de polynômes orthogonaux par rapport  $L$

b)  $L(\pi(x)P_n(x)) = 0$  pour tous polynômes de degr  $m < n$  et  $L(\pi(x)P_n(x)) \neq 0$  si  $m = n$

c)  $L(x^m P_n(x)) = k_n \delta_n, m, k_n \neq 0, m=0,1,\dots,n.$

**Preuve:**

a)  $\Rightarrow$  b)

soit  $\{P_n(x)\}$  une suite de polynômes orthogonaux par rapport  $L$  alors  $\deg P_k(x) = k$ , il est clair que  $P_0, P_1, \dots, P_m$  est une base de  $\mathcal{P}_m$  (e.v. des polynômes de degr au plus  $m$ ) si  $\pi(x)$  est un polynôme de degr  $m$  alors :

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x), c_m \neq 0.$$

$$\Rightarrow L(\pi(x)P_n(x)) = \sum_{k=0}^m c_k L(P_k(x)P_n(x)), c_m \neq 0,$$

$\Rightarrow$

$$L(\pi(x)P_n(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ c_m L(P_m^2) \neq 0 & \text{si } n = m \end{cases}$$

soit  $\{P_n(x)\}$  une suite de polynômes orthogonaux par rapport  $L$  alors pour tous polynôme  $\pi(x)$  de degr  $n$  on a

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x) \text{ et } c_m = \frac{L(\pi(x)P_n(x))}{L(P_m^2)}$$

**Preuve**

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x)$$

$$\pi(x)P_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x)P_m(x), m = 0, \dots, n$$

$$L(\pi(x)P_m(x)) = \sum_{k=0}^m c_k L(P_k(x)P_m(x)) = c_m L(P_m^2)$$

$$\text{alors } c_m = \frac{L(\pi(x)P_m(x))}{L(P_m^2)}, m = 0, \dots, n$$

si  $\{P_n(x)\}$  une suite de polynômes orthogonaux par rapport  $L$

et si  $\{Q_n(x)\}$  une autre suite de polynômes orthogonaux par rapport  $L$ , alors  $\exists c_n \neq 0$  tel que  $Q_n(x) = c_n P_n(x)$

**Preuve:**

si  $\{Q_n(x)\}$  une autre suite de polynômes orthogonaux par rapport  $L$ , alors

d'après le thorme (1.1) on a  $L(P_k Q_n) = 0$  pour  $k \neq n$

ensuite dans le thorme (1.2)

$$\text{on pose } \pi(x) = Q_n(x)$$

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$$

$$\text{donc } c_k = \frac{L(Q_n(x)P_k(x))}{L(P_k^2)} \forall k < n$$

$$\text{alors } Q_n(x) = c_n P_n(x)$$

**Existance de la suite des polynômes orthogonaux**

Introduisant le determinant suivant

$$\Delta_n = \det(\mu_{i+j})_{i,j=0}^n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & & \mu_{n+1} \\ & & & \\ & & & \\ \mu_n & & & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

(determinant de Hankel)

soit  $L$  une fonctionnelle linéaire définie sur  $P$  par  $L(x^n) = \mu_n$  une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une suite de polynômes orthogonaux par rapport  $L$  est que  $\Delta_n \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots$  **Preuve**

Posons  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{nk}x^k$

par la condition d'orthogonalité

$$L(x^m P_n(x)) = \sum_{k=0}^n c_{nk} \mu_k^m = K_n \delta_{n,m} (k_n \neq 0, m \leq n) \dots (3,2)$$

(3,2) est équivalente au système suivant

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n & \dots & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \dots \\ c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ k_n \end{vmatrix}.$$

donc si une suite de polynômes orthogonaux par rapport  $L$  existe elle est uniquement déterminée par la constante  $k_n$  et d'après (3,2) le système doit avoir une solution unique donc  $\Delta_n \neq 0$  inversement si  $\Delta_n \neq 0$ , alors pour  $k_n \neq 0$ , le système a une solution unique et par suite  $P_n(x)$  qui vérifie (3,2) existe.

**Exercice:**

1) montrer que  $c_{nn} = \frac{k_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n}, n \geq 1$

2) montrer : si  $\{P_n(x)\}$  est une suite de polynômes orthogonaux par rapport  $L$  et  $\pi_n(x)$  de degré  $n$ , alors

$$L(\pi_n(x)P_n(x)) = \frac{a_n k_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \Delta_{-1} = 1$$

avec  $a_n = l_d(\pi_n)$  et  $b_n = l_d(P_n)$

$l_d$  indique le coefficient dominant (de plus haut degré)

**Solution:**

1) il est clair que le système équivalent (3,2) est de Cramer donc

$$c_{nn} = \frac{k_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n}, n \geq 1$$

2) montrons que  $L(\pi_n(x)P_n(x)) = \frac{a_n b_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \Delta_{-1} = 1$

$$\pi_n(x) = a_n x^n + \pi_{n-1}(x)$$

$$L(\pi_n(x)P_n(x)) = a_n L(x^n P_n)$$

et comme  $L(x^n P_n) = k_n$  et d'après la première question on a

$$k_n = \frac{b_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

donc

$$L(\pi_n(x)P_n(x)) = \frac{a_n b_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

**Définition 1.0.4** une forme linéaire  $L$  est dite définie positive si  $L(\pi(x)) > 0$

$\forall \pi$  polynôme tel que  $\pi(x) \geq 0, \forall x \in R$

### Construction d'une suite de polynômes orthogonaux

On pose  $P_0(x) = \mu_0^{-\frac{1}{2}}$  donc  $L(P_0^2(x)) = \mu_0^{-1}L(1) = 1$

on pose ensuite

$\widetilde{P}_1(x) = x - aP_0(x)$ , alors  $L(P_0\widetilde{P}_1) = L(xP_0) - aL(P_0^2)$

et si on prend  $a = L(xP_0)$

et posons  $P_1(x) = \{L(\widetilde{P}_1^2)\}^{-\frac{1}{2}}$

dans ce cas

$L(P_0P_1) = 0$  et  $L(P_1^2) = 1$

par recurrence supposons que  $P_0, P_1, \dots, P_n$  soient construites de sorte que

$$\begin{cases} \deg(P_i) = i \\ L(P_iP_j) = \delta_{i,j} \quad i, j = 0, 1, \dots, n \end{cases}$$

si on pose  $\widetilde{P}_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$

et  $a_k = L(x^{n+1}P_k(x))$

alors  $\widetilde{P}_{n+1}$  est de degr  $(n+1)$  et

$L(P_j\widetilde{P}_{n+1}) = L(x^{n+1}P_j) - \sum_{k=0}^n a_k L(P_jP_k) = a_j - a_j = 0$

ensuite on pose

$P_{n+1} = \{L(\widetilde{P}_{n+1}^2)\}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{P}_{n+1}$

alors

$$\begin{cases} L(P_{n+1}^2) = 1 \\ L(P_iP_{n+1}) = \delta_{i,n+1} \end{cases}$$

### Conclusion:

si  $L$  est définie positive alors la suite des polynômes orthogonaux par rapport  $L$  existe et de plus elle est orthonormale coefficients réels, et les moments de  $L$  sont réels

**Définition 1.0.5**  $L$  est dite quasi définie si  $\Delta_n \neq 0, \forall n \geq 0$

$\pi(x) \geq 0, \forall x \in R$ , ils existent  $P, Q \in R[X]$  tels que  $\pi(x) = P^2 + Q^2$

**Preuve:**

$\pi(x)$  est coefficients réels, les racines sont réelles ou complexes conjugués,

et puisque  $\pi(x) \geq 0$ , les racines réelles sont de multiplicité paire  $\pi(x) =$

$r^2(x) \prod_{k=1}^n (x - (\alpha_k + i\beta_k))(x - (\alpha_k - i\beta_k))$

posons  $\prod_{k=1}^n (x - (\alpha_k - i\beta_k)) = A(x) + iB(x)$

donc  $\pi(x) = r^2(x)(A^2 + B^2) = P^2 + Q^2$

L est dfinie positive si et seulement si  $\mu_n \in R$  et  $\Delta_n > 0, n \geq 0$

**Preuve:**

1) si  $\mu_n \in R$  et  $\Delta_n > 0$  alors

$$L(P_n^2) = l_d^2(p_n) \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0$$

de plus d'après le systme (3,2) et puisque  $\mu_n \in R$  on a  $P_n$  est coefficients rels et si A est un polynôme coefficients rels tel que  $A(x) = \sum_{k=0}^m a_k P_k$ ,  $a_k \in R$

$$\text{alors } L(A^2) = \sum_{j,k=0}^m a_j a_k L(P_j P_k)$$

$$= \sum_{k=0}^m a_k^2 L(P_k^2) > 0$$

$$\text{si } \pi(x) \geq 0 \Rightarrow \pi(x) = A^2(x) + B^2(x) \Rightarrow L(\pi(x)) = L(A^2) = L(B^2) > 0$$

ce qui implique que L est dfinie positive

2) inversement

si L est dfinie positive alors  $\mu_n \in R$

$$0 < L(P_n^2) = l_d^2(P_n) \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \text{ avec } \Delta_{-1} = 1 \Rightarrow \Delta_n > 0, \forall n$$

**Relation de recurrence**

soit L une forme quasi-dfinie et soit  $\{P_n\}$  la suite des polynômes orthogonaux par rapport L alors il existe  $c_n \in C$  et  $\lambda_n \neq 0$  tels que :

$$1) P_n = (x - c_n)P_{n-1} - \lambda_n P_{n-2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$P_{-1}(x) = 0$$

2) de plus si L est dfinie positive ,alors  $c_n \in R$  et  $\lambda_{n+1} > 0$  pour  $n \geq 1$

( $\lambda_1$  est arbitraire)

**Preuve:**

$xP_n$  est de degr  $(n + 1)$

$$xP_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk} P_k,$$

$$a_{nk} = \frac{L(xP_n P_k)}{L(P_k^2)}$$

comme  $\text{deg}(xP_k) = k + 1$

alors  $a_{nk} = 0$  pour  $k + 1 < n$

donc  $a_{nk} = 0, \forall k < n - 1$

de plus  $xP_n$  est unitaire , donc

$$a_{n,n+1} = 1$$

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{nn}P_n(x) + a_{n,n-1}P_{n-1}(x), n \geq 1$$

$$P_{n+1}(x) = (x - a_{nn})P_n(x) - a_{n,n-1}P_{n-1}$$

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x)$$

$$P_{-1} = 0, n \geq 1$$

$P_1(x) = (x - c_1)P_0 = x - c_1$ , il suffit de prendre  $c_1 = -P_1(0)$

$$2) L(x^{n-2}P_n(x)) = L(x^{n-1}P_{n-1}) - c_n L(x^{n-2}P_{n-1}) - \lambda_n L(x^{n-2}P_{n-2})$$

$$0 = L(x^{n-1}P_{n-1}) - \lambda_n L(x^{n-2}P_{n-2})$$

$$\forall n \geq 1, \lambda_{n+1} = \frac{L(x^n P_n(x))}{L(x^{n-1} P_{n-1})}(x) = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2}, \Delta_{-1} = 1$$

- (a)  $\lambda_{n+1} = \frac{L(P^2)}{L(P^2)} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}$
- (b)  $L(P_n^2) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}$  avec  $\lambda_1 = \mu_0 = \Delta_0$
- (c)  $c_n = \frac{L(xP_{n-1}^2)}{P_{n-1}^2}$
- (d) le coefficient de  $x^{n-1}$  dans  $P_n$  est  $-(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$

### Preuve

- (a)  $L(P_n^2) = L(P_n P_n) = l_d^2(P_n) \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$  alors  $L(P_{n-1}^2) = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}$  et donc  
 $\frac{L(P_n^2)}{L(P_{n-1}^2)} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2} = \lambda_{n+1}$

- (b)

$$\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_{n+1} = \Delta_0 \frac{\Delta_{-1}\Delta_1}{\Delta_0^2} \frac{\Delta_0\Delta_2}{\Delta_1^2} \cdots \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = L(P_n^2)$$

- (c)  $P_n = (x - c_n)P_{n-1} - \lambda_n P_{n-1}P_{n-2}$   
 $P_{n-1}P_n = xP_{n-1}^2 - c_n P_{n-1}^2 - \lambda_n P_{n-1}P_{n-2}$   
 $L(P_{n-1}P_n) = L(xP_{n-1}^2) - c_n L(P_{n-1}^2) - \lambda_n L(P_{n-1}P_{n-2})$   
alors  $c_n = \frac{L(xP_{n-1}^2)}{L(P_{n-1}^2)}$

- (d) soit  $d_n$  le coefficient de  $x^{n-1}$  dans  $P_n$  alors

$$\begin{aligned} d_n &= d_{n-1} - c_n \\ &= d_{n-2} - (c_n + c_{n-1}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &= -(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) \end{aligned}$$

**Remarque** Dans le cas où la suite  $\{P_n\}$  n'est pas unitaire, elle vérifie une relation de type

$$P_{n+1} = (A_n x + B_n)P_n - c_n P_{n-1}$$

si  $k_n = l_d(P_n)$  alors :

$$P_n(x) = k_n \tilde{P}_n(x) \text{ le polynome unitaire}$$

nous trouvons

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} \\ B_n = \frac{-c_{n+1}k_{n+1}}{k_n} \\ c_n = \lambda_{n+1} \frac{k_{n+1}}{k_{n-1}}, n \geq 0, \text{ et } k_{-1} = 1 \end{array} \right.$$

**Exemple:** Tchebychev de 1 espce

$$\begin{cases} T_n(x) = \cos n\theta, x = \cos\theta \\ \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos\theta \end{cases} \quad \text{ona } T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}, n \geq 1$$

On sait que  $l_d(T_n) = 2^{n-1}$

alors la suite unitaire est dfinie par  $\tilde{T}_0 = T_0, \tilde{T}_n = 2^{1-n}T_n, n \geq 1$

ce qui donne

$$\begin{cases} \tilde{T}_2 = x\tilde{T}_1 - \frac{1}{2}\tilde{T}_0 \\ \tilde{T}_n = x\tilde{T}_{n-1} - \frac{1}{4}\tilde{T}_{n-2} \end{cases}$$

**Définition 1.0.6**  $L$  est dite symtrique si :

les moments d'ordre impair sont nuls

**Exemple**

$$L(\cdot) = \int_{-1}^1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\mu_{2n+1} = L(x^{2n+1}) = \int_{-1}^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

soit  $P_n$  la S.P.O/L ( $P_n$  est unitaire ), les conditions suivantes sont quivalentes :

(a)  $L$  est symtrique

(b)  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), n \geq 0$

(c) dans la relation :  $P_n = (x - c_n)P_{n-1} - \lambda_n P_{n-2}, n \geq 1$  on a  $c_n = 0$ .

**Preuve:** (a)  $\Rightarrow$  (b)

$$\pi(x) = x^n + \dots + a_0.$$

$$\pi(-x) = (-x)^n + \dots + a_0.$$

$$L(\pi(-x)) = (-1)^n L(x^n) + (-1)^{n-1} a_{n-1} L(x_{n-1}) + \dots + L(a_0).$$

si  $n = 2p$ , alors

$$L(\pi(-x)) = L(x^n) + a_{n-2} L(x_{n-2}) + \dots + L(a_0) = L(\pi(x)).$$

si  $n = 2p + 1$ , alors

$$L(\pi(-x)) = a_{n-1} L(x^{n-1}) + a_{n-3} L(x_{n-3}) + \dots + L(a_1) = L(\pi(x)).$$

donc on a  $L(\pi(-x)) = L(\pi(x))$

$$\text{alors } L(\pi_n(x)\pi_m(x)) = L(\pi_n(-x)\pi_m(-x))$$

donc  $P_n(-x)$  est aussi orthogonale par rapport  $L$ , donc

$$P_n(-x) = b_n P_n(x)$$

$$\begin{cases} P_n(-x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_0. \\ b_n P_n(x) = b_n x^n + b_n a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_0 b_n. \end{cases}$$

et  $L(P_n(-x)) = b_n L(P_n(x))$

si  $n = 2p$

$$\mu_n + a_{n-2}\mu_{n-2} + \cdots + a_0\mu_0 = b_n\mu_n + b_n a_{n-2}\mu_{n-2} + \cdots + b_n a_0\mu_0$$

ce qui donne  $b_n = 1 = (-1)^n$

si  $n = 2p + 1$

$$b_n = (-1) = (-1)^n$$

alors  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

(b)  $\Rightarrow$  (a)

si  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  on a

$$P_n(-x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_0 = (-1)^n x^n + (-1)^n a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_0 (-1)^n$$

si  $n = 2p + 1$

$$-x^n + a_{n-1} x_{n-1} - a_{n-2} x^{n-2} + \cdots - a_1 x + a_0 = -x^n - a_{n-1} x_{n-1} - a_{n-2} x^{n-2} - \cdots - a_1 x - a_0$$

$$\Rightarrow a_{n-1} = a_{n-3} = \cdots = a_0.$$

donc pour  $n$  impair,  $P_n$  ne contient que des puissances impaires

et par suite :  $P_1(x) = x, P_3(x) = x^3 + a_1 x$

et comme  $P_0(x) = 1$ , on a

$$L(P_0 P_1) = 0 = L(P_1) = L(x) = \mu_1$$

$$L(P_0 P_3) = 0 = L(P_3) = \mu_3 + a_1 \mu_1 = \mu_3 = 0$$

et ainsi de suite :  $\mu_{2n+1} = 0$

(b)  $\Rightarrow$  (c)

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$$

$$P_n(x) = (x - c_n) P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), n \geq 1$$

posons

$$Q_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$$

$$(-1)^n P_n(-x) = (-x - c_n) (-1)^n P_{n-1}(-x) - \lambda_n (-1)^n P_{n-2}(-x)$$

$$\Rightarrow Q_n(x) = (x + c_n) Q_{n-1} - \lambda P_{n-2} \text{ Or } Q_n(x) = P_n(x)$$

$$\text{donc } (x + c_n) P_{n-1} - \lambda P_{n-2} = (x - c_n) P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x)$$

$$\Rightarrow 2c_n P_{n-1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow c_n = 0$$

(c)  $\Rightarrow$  (b)

si  $c_n = 0$

$$P_n(x) = x P_{n-1} - \lambda_n P_{n-2}$$

$$(-1)^n P_n(-x) = (-1)^n (-x) P_{n-1}(-x) - (-1)^n \lambda_n P_{n-2}(-x)$$

$$Q_n(x) = x Q_{n-1} - \lambda_n Q_{n-2}(x)$$

la suite  $Q_n$  vrifie la même relation que  $P_n$  est

$$P_{-1} = Q_{-1} = 0, P_0 = Q_0 = 1$$

$$\Rightarrow P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$$

Thorme de Favarel

soient  $\{c_n\}_{n \geq 1}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  deux suites de nombres complexes et soit  $P_n$  dfinie

par  $\begin{cases} P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1} - \lambda_n P_{n-2} \\ P_{-1} = 0; P_0 = 1 \end{cases}$  il existe une forme linéaire L telle que

1.  $L[1] = \lambda_1, L(P_n P_m) = 0, \forall n \neq m$
2. L est quasi dfinie et  $\{P_n(x)\}$  est la S.P.O/L unitaire ssi  $\lambda_n \neq 0$
3. L est dfinie positive  $\Leftrightarrow c_n \in \text{Ret} \lambda_n \geq 0, n \geq 1$

**Preuve**

$$L(1) = \lambda_1 \text{ et } L(P_n P_m) = 0 (\forall n \neq m)$$

On dfinit L par  $L[1] = \mu_0 = \lambda_1$  et  $L(P_n) = 0, n = 1, 2, \dots$

$$P_1(x) = x - c_1 \Rightarrow L(P_1) = 0 \Leftrightarrow \mu_1 - c_1 \mu_0 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = c_1 \mu_0$$

$$P_2(x) = (x - c_2)P_1 - \lambda_2 P_0 = x^2 - (c_1 + c_2)x + c_1 c_2 - \lambda_2$$

la relation de rcurrence s'crit

$$xP_n = P_{n+1} + c_{n+1}P_n + \lambda_{n+1}P_{n-1} \dots \dots (1), n \geq 1$$

$$\Rightarrow L(xP_n) = 0 \dots \dots (2) (n \geq 2)$$

multiplions (1) par x et utilisons(2)

$$\Rightarrow L(x^2 P_n) = 0, (n \geq 3)$$

et  $L(x^k P_n) = 0$  pour  $0 \leq k < n$

$$L(x^n P_n) = \lambda_{n+1} L(x^{n-1} P_{n-1}), (n \geq 1)$$

donc pour  $n \neq m$  on a

$$L(P_n P_m) = 0$$

$$\text{de plus: } L(P_n^2) = L(x^n P_n) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}, (n \geq 0)$$

alors L est quasi dfinie et  $P_n$  est la S.P.O/L  $\Leftrightarrow \lambda_n \neq 0, (n \geq 1)$

Identit de CHRISTOFFEL-DARBOUX

soit  $\{P_n\}$  vrfiant la relation de rcurrence avec  $\lambda_n \neq 0, n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k+1}} = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1})^{-1} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$

**Preuve**

multiplier la relation de rcurrence  $P_n(x)$ , ensuite par  $P_{n+1}(y)$ , on obtient:

$$xP_n P_{n+1}(y) = P_{n+1}(x)P_n(y) + c_{n+1}P_n(x)P_n(y) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x)P_n(y)$$

la diffrence

$$(x - y)P_n(x)P_n(y) = P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x) - \lambda_{n+1}[P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)]$$

Ensuite vrifier que:

$$\frac{P_n(x)P_n(y)}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} = \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{(x-y)(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1})} - \frac{\lambda_{n+1}[P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)]}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}(x-y)}$$

ensuite faire la somme de 0 n

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k^2(x)}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k+1}} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1})}$$

**Preuve:**

$$P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x) = (P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y))P_n(x) - (P_n(x)P_n(y))P_{n+1}(x)$$

Ensuite ,remplaant et faire  $y \rightarrow x$   
si L est dfinie positive alors  
 $(P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1})(x) > 0$