2°/ Si $Id^{-1} : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ est continue,

$\exists\ k > 0$ tel que :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \|Id^{-1}(f)\|_\infty \leq c\ \|f\|_1$$

Soit alors $(f_n)_n$ la suite de fonctions de E définie par $f_n(t) = t^n$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$. d'où

$$1 \leq c\ \frac{1}{n+1} \text{ et donc } C \geq n+1$$

pour tout n, ce qui est impossible.

cette contradiction montre que id^{-1} n'est pas continue.

3°/ On a que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Si $(E, \|\cdot\|_1)$ est complet, le théorème d'isomorphisme de Banach assure la continuité de id^{-1}. Par Conséquent $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.