Surfaces paramétrées

Dans cette partie, on va donner quelques rudiments concernant les surfaces paramé-trées régulières. Comme dans le cas des courbes, la notion d'espace tangent est liée à la

différentielle première et la forme de la surface est donnée par la différentielle seconde.

1 Définition des surfaces paramétrées

Definition 1 *Une surface paramétrée de classe C^k $(k \geq 1)$ est une application de classe C^k $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, où U est un domaine de $\mathbb{R}^2$ (ouvert connexe). L'ensemble*

$S = f(U) = \{f(x, y), (x, y) \in U\}$ est appelé le support géométrique de la surface paramétrée $f : U \to \mathbb{R}^3$.

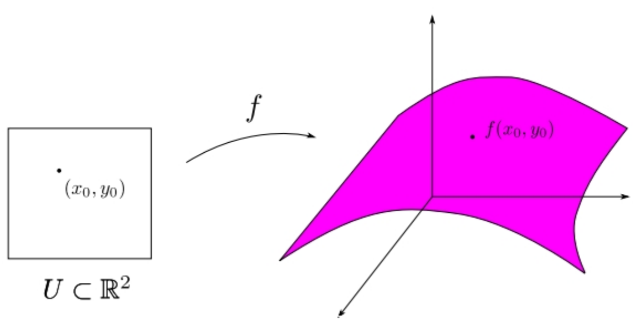

Figure 1 – Surface paramétrée

2 Reparamétrisation

Comme dans le cas des courbes, il est possible de reparamétrer les surfaces paramétrées par des difféomorphismes. Prenons une surface paramétrée $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1et $\phi : V \subset \mathbb{R}^2 \to U$ difféomorphisme. Alors $f \circ \phi : V \to \mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée qui a exactement le même support géométrique que f . On dit que ϕ est un changement de variable admissible et que $f \circ \phi$ est une reparamétrisation de f .

3 Espace tangent à une surface

Prenons une surface paramétrée $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1. Remarquons que si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to U$ est une courbe paramétrée plane dont le support géométrique vit dans l'espace des paramètres U , alors l'application $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans le support $S = f(U)$ *(Figure 2).*

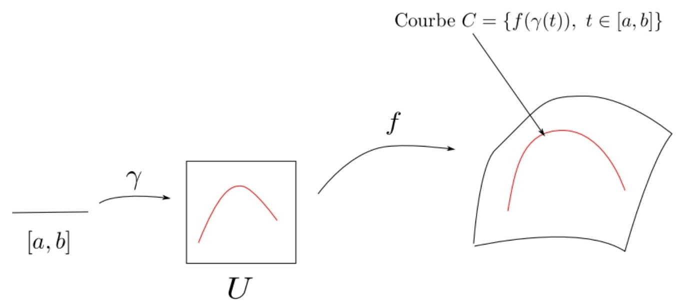

Figure 2 – Courbe sur une surface

En particulier, prenons un point $m_0 = f(x_0, y_0)$ de la surface et considérons deux intervalles I_1 et I_2 de $\mathbb{R}$ tels que $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2 \subset U$. On peut considérer la courbe coordonnée γ_{x_0} (avec $x_0 \in I_1$):

$$\gamma_{x_0} : y \in I_2 \to f(x_0, y).$$

Clairement, γ_{x_0} est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans $S = f(U)$. Si cette courbe est régulière en $y = y_0$ cela signifie que le vecteur $\gamma'_{x_0}(y_0)$ est tangent à la courbe γ_{x_0} au point $m_0 = \gamma_{x_0}(y_0)$. De même, on peut considérer la courbe coordonnées γ_{y_0} (avec $y_0 \in I_2$). Or, par définition des dérivées partielles, nous avons :

$$\gamma_{x_0}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ et } \gamma_{y_0}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ceci motive la définition d'espace tangent à une surface :

Definition 2 *L'espace tangent à une surface paramétrée $f : U \to \mathbb{R}^3$ au point $m_0 = f(x_0, y_0)$ est l'espace affine, noté $T_{m_0}S$ (avec $S = f(U)$) passant par m_0 et engendré par les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.*

Definition 3 — *La surface paramétrée $f : U \to \mathbb{R}^3$ est dite régulière au point $m = f(x, y)$ si les deux vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sont libres.*

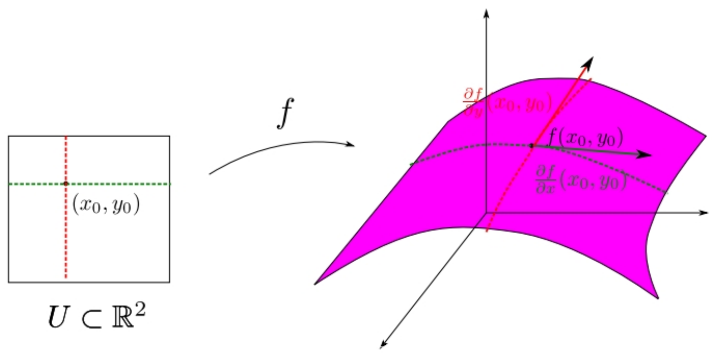

Figure 2 – Dérivées partielles de la paramétrisation

— *La surface paramétrée $f : U \to \mathbb{R}^3$ est dite régulière si elle est régulière en tout point.*

On peut montrer que cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie. Au final, on peut retenir que si la surface est régulière, alors l'espace tangent $T_m S$ définit en tout point m par l'application f est de dimension deux : on l'appelle aussi plan tangent.

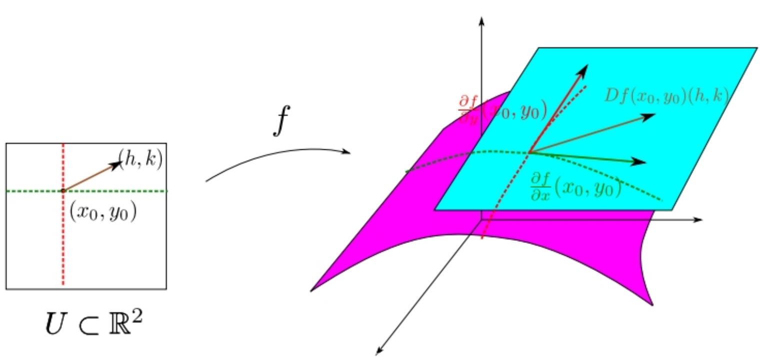

Figure 3– Espace tangent d'une surface paramétrée régulière

4 Longueur et aire

Prenons une surface paramétrée $f : U \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 et $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to U$ une courbe paramétrée plane dont le support géométrique vit dans l'espace des paramètres U . Alors $f \circ \gamma$ est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans le support $S = f(U)$ (*Figure 1*). Sa longueur est donnée par :

$$l(\ f\circ\gamma)=\int_a^b \|(f\circ\gamma)'(t)\|\,dt=\int_a^b \|(Df\,(\gamma(t)))\,.\gamma'(t)\|\,dt.$$

Autrement dit, pour connaître la longueur de la courbe $f\circ\gamma$, on a besoin de la différentielle Df et de la dérivée de γ . Par ailleurs, on donne la définition de l'aire d'une surface :.

Definition 4 *L'aire de la surface $S=f(U)$ paramétrée par $f:U\to\mathbb{R}^3$ est :*

$$\int_U \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\| dudv.$$

5 Allure locale d'une surface

On s'intéresse ici à la forme de la surface localement. Rappelons que pour les courbes paramétrées régulières, la dérivée de la paramétrisation donne un vecteur tangent à la courbe, et la dérivée seconde permet de calculer la courbure. Pour les surfaces, il en est de même : la différentielle de la paramétrisation f permet de définir l'espace tangent. Pour avoir une idée de la forme, on peut faire un développement limité à l'ordre deux. Cas particulier Pour simplifier, on va supposer que la surface est paramétrée par une application de la forme: $f(x,y)=(x,y,\varphi(x,y))$, avec $\varphi:U\subset\mathbb{R}^2$. (En fait, on peut montrer que l'on peut toujours se ramener localement à une telle forme, et que cette hypothèse n'est pas restrictive.) D'autre part, quitte à faire un changement de repère, on peut supposer que $\varphi(0,0)=0$ et que $D\varphi(0,0)=0$. Dans le nouveau repère, cela revient à avoir que la surface passe par le point de coordonnées $(0,0,0)$ et que le plan tangent en ce point est horizontal. Dans ce cas là, le développement limité de φ en $(0,0)$ est :

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}D^2\varphi(0,0)(x,y)^2+o((x^2+y^2)),$$

avec

$$D^2\varphi(0,0)\left((x,y),(x,y)\right)=x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(0,0)+2xy\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(0,0)+y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(0,0).$$

La forme bilinéaire symétrique $D^2\varphi(0,0)\left((x,y),(x,y)\right)$ donne ainsi des informations sur l'allure de la surface au voisinage du point $m=f(0,0)=(0,0,0)$. Il s'agit de la deuxième forme fondamentale.

Cas général

Dans le cas d'une paramétrisation régulière quelconque, la définition de la deuxième forme fondamentale fait aussi intervenir la différentielle première. Rappelons que si $f:U\to\mathbb{R}^3$ est une surface paramétrée régulière de classe C^2, alors les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ forment une base de l'espace tangent

T_mS à $S = f(U)$ au point $m = f(x,y)$. Tout vecteur de T_mS s'exprime donc dans cette base :

$$\forall v \in T_mS,\ \exists (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2,\ v = v_x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + v_y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

On note $K(x,y)$ le vecteur orthogonal à l'espace tangent T_mS donné par :

$$K(x,y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right\|}.$$

Definition 5 *Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de classe C^2. La deuxième forme fondamentale II_m en un point $m = f(x,y)$ est la forme quadratique sur l'espace tangent T_mS définie par :*

$$\forall v = v_x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + v_y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in T_mS, \quad II_m(v) = v_x^2 L_m + 2 v_x v_y M_m + v_y^2 N_m,$$

où $L_m = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y).K(x,y)$, $M_m = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).K(x,y)$, $N_m = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).K(x,y)$