Fiche TD (1)

EX 01 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Montrer que

1°/ L'application : $L : E \to \mathbb{R}_+$
$x \longmapsto \|x\|$

est lipschitzienne donc uniformément continue.

2°/ Les translations et les homothéties de rapport non nul sont des homéomorphismes de E dans E.

$$L : E \to E \quad , \quad L : E \to E \quad , \quad a \in E$$
$$x \mapsto x + a \qquad\quad x \mapsto \lambda x \qquad \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

EX 02 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $a, b \in E$ et $r > 0$, $\lambda > 0$.

Montrer que : $B(a,r) + b = B(a+b, r)$
$\lambda B(a,r) = B(\lambda a, \lambda r)$.

EX 03 : On considère l'espace $E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$.

1°/ Montrer que, pour $f \in E$, les quantités suivantes sont bien définies et sont des normes sur E.

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1,1]} |f(t)| \ , \ \|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$$

2°/ Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

3°/ Pour tout $n \geq 1$ et $t \in [-1,1]$, on pose

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leq t < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

- Montrer que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
- Converge-t'elle dans cet espace ?
- Qu'en déduit-on ?

<u>Ex04</u> : Soit $c_0 = \{z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0\}$, est muni de la norme :

$$\|z\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |z_n| .$$

Montrer que c_0 est un espace de Banach

<u>Ex05</u> : Soit E un evn. Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si toute série d'éléments de E normalement convergente est convergente dans E.

Solutions

Ex 01 : 1°/ L est bien définie car $\forall x \in E$, $\|x\|$ existe et positive. Pour $x, y \in E$,

On a : $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$

$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad \ldots\ldots (1)$$

et $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|$

$$\Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \quad \ldots\ldots (2)$$

De (1) et (2), on obtient : $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$,

~~donc~~ : $|L(x) - L(y)| \leq \|x - y\|$. $\left(\begin{array}{l} L(x) = \|x\| \\ L(y) = \|y\| \end{array}\right)$.

Alors L est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue.

2°/ Un homéomorphisme entre deux espaces topologiques est une application bijective, bicontinue. On a. $L : E \longrightarrow E$, $a \in E$
$\quad x \longmapsto x + a$

est continue et $L^{-1} : E \longrightarrow E$
$\quad x \longrightarrow x - a$.

est continue.

pour $x_1, x_2 \in E$, on a $L(x_1) = L(x_2) \Rightarrow x_1 + a = x_2 + a$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

d'où L est injective.

et pour tout $y \in E$, l'équation $y = L(x) = x + a$ admet une solution $x = y - a \in E$, donc L est surjective, et par conséquent L est un homéomorphisme.

$$L : E \to E,\quad x \mapsto \lambda x,\quad \lambda \in \mathbb{K}^*$$ est continue

et pour $x_1, x_2 \in E$, on a : $L(x_1) = L(x_2)$

$$\Rightarrow \lambda x_1 = \lambda x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

donc L est injective, et L^{-1} existe.

soit $y = L(x) \in E$, on a : $y = \lambda x$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} L^{-1}(L(x)) = \lambda^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} x = L^{-1}(x),$$ d'où

$$L^{-1} : E \to E,\quad x \mapsto \frac{1}{\lambda} x,\quad \lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$$

est continue.

et $\forall y \in E$, $y = \lambda x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda} y \in E$ existe car $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Alors L est un homéomorphisme.

EX02 : Soit $x \in E$, on a

$$x \in B(a+b,r) \iff \|x-(a+b)\| < r$$
$$\iff \|(x-b)-a\| < r$$
$$\iff x-b \in B(a,r)$$
$$\iff x \in B(a,r)+b.$$

$$x \in B(\lambda a,\lambda r) \iff \|\lambda a - x\| < \lambda r$$
$$\iff \|a - \frac{1}{\lambda}x\| < r$$
$$\iff \frac{1}{\lambda}x \in B(a,r)$$
$$\iff x \in \lambda B(a,r).$$

EX03 : 1/ Soit $f \in E$, donc $|f|$ étant continue sur le compact $[-1,1]$, elle est bornée et atteint ses bornes, ce qui prouve $\|f\|_\infty$ est bien définie. De même $|f|$ est intégrable sur le compact $[-1,1]$.

2/ On se donne une suite $(f_n)_n \subset E$ de Cauchy, (i,e)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \mid \forall p \geq N, \|f_{n+p} - f_n\|_\infty < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

pour $x \in [-1,1]$, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| \leq \sup_{x\in[-1,1]} \left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right|$$

$(*)$

$$= \| f_{n+p} - f_n \|_\infty$$

$$< \varepsilon$$

Comme $\mathbb{R}$ est complet, $\exists\, l \in \mathbb{R}$, ($l$ noté $f(x)$) tel que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

passer à limite dans $(*)$ $n \to \infty$ pour obtenir

$$\forall x \in [-1,1], \forall p \geq N, \left| f(x) - f_p(x) \right| < \varepsilon \quad \ldots (**)$$

donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f et chaque f_n est continue sur $[-1,1]$, alors f est continue. ($f \in E$).

<u>Remarque</u>: de $(**)$, on voit que

$\forall p \geq N, \| f_p - f \|_\infty < \varepsilon$, et N ne dépend pas de ε, donc (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, d'où la complétude de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

3) On a : $\| f_{n+p} - f_n \|_1 = \int_{-1}^{1} |f_{n+p} - f_n| = \int_{-1/n}^{1/n} |f_{n+p} - f_n|$

$$\leq \int_{-1/n}^{1/n} 2.$$

Cette quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$ uniformément par rapport à p, donc $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Il reste à voir que $(f_n)_n$ ne converge pas dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Supposons $\exists f \in E$ une limite de $(f_n)_n$ au sens de $\|\cdot\|_1$. Fixons $x \in]0,1]$, pour $n > \frac{1}{x}$, f_n sont identiquement égales à 1 sur $[x,1]$ ce qui donne

$$\int_x^1 |f-1| = \int_x^1 |f-f_n| \leq \int_{-1}^1 |f-f_n|$$

$$= \|f-f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi $\int_x^1 |f-1| = 0$ ce qui prouve que $f = 1$ sur $[x,1]$. Ceci étant vrai pour tout $x \in]0,1]$, on a bien prouvé que $f=1$ sur $]0,1]$. Le même raisonnement montre que $f=-1$ sur $[-1,0[$ et on a bien une contradiction avec le fait que f doit être continue. On déduit que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet. #