# Solutions

**EX 01** : (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons $f$ est continue,

on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f(x_n)\|_F \leq k\|x_n\|_E$

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f(x_n)\|_F \leq k \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E$$

Comme $(x_n)_n$ converge donc bornée,

alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f(x_n)\|_F < \infty$, d'où

$(f(x_n))_n$ bornée

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supposons $f$ n'est pas bornée,

donc il existe $(a_n) \subset S_E(0,1)$ (la sphère)

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\|f(a_n)\|_F \geq n^2$

d'où on a $\|f(\frac{a_n}{n})\|_F \geq n$, donc la suite

$(\frac{a_n}{n})_n$ converge vers $0$ mais la suite

$(f(\frac{a_n}{n}))_n$ n'est pas bornée dans $F$

Ce qui contredit l'hypothèse, Alors $f$ cont,

**EX 02** : 1°/ $T(f) = \int_0^x f(t)\,dt$

$T$ est bien définie car si $f \in E$, $f$ est

intégrable et $T(f) \in E$ (continue)

Il est clair que T est linéaire.

Soit $x \in [0,1]$, on a

$$|T(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$
$$\leq \int_0^x |f(t)|\,dt$$
$$\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \int_0^x dt$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$$

$$\cancel{\Rightarrow \sup \frac{\|T(f)\|}{\|}}$$

$$\Rightarrow \cancel{\sup} \|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

d'où T est bornée.

et on a : $\|T\| = \sup_{\|f\|_\infty \neq 0} \frac{\|T(f)\|}{\|f\|_\infty} \leq 1$

Soit $g(t) = 1$, donc $\|g\|_\infty = 1$ et

$T(g)(x) = x$, on a $\|T(g)\|_\infty = 1$. Par conséquent,

$\|T\| = 1 = \|T(g)\|_\infty$.

2°/ $T(f) = f(1) - f(0)$. T est bien définie.

et T est linéaire.

et on a $|T(f)| = |f(1) - f(0)| \leqslant |f(1)| + |f(0)|$

$$\leqslant 2\,\|f\|_\infty$$

donc T est bornée et $\|T\| \leqslant 2$.

Soit $g(t) = 2t - 1$, on a $\|g\|_\infty = 1$, et

$T(g) = g(1) - g(0) = 2$, d'où $\|T\| = 2 = |T(g)|$

3e/ $T(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$, T est bien définie

et linéaire, et on a

$$|T(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \left|\int_0^1 dt\right|$$

$$\leqslant \|f\|_\infty$$

Alors T est continue et $\|T\| \leqslant 1$.

On prend ~~par~~ $g(t) = 1$, on a $\|T\| = 1 = |T(g)|$

<u>EXo3</u> : Pour tout $h \in H$, on a $|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(h)|$

$$\leqslant \|\varphi\|\,\|x - h\|$$

d'où $\dfrac{\varphi(x)}{\|\varphi\|} \leqslant \|x - h\|$,

et par conséquent $\dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|} \leqslant d(x, H)$.

Il reste à montrer l'inégalité réciproque.

on a, pour tout $b \in E \setminus H$, $E = H + \mathbb{K}b$, et

$\varphi(b) \neq 0$. Pour $x \in E$, $x = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(b)} b + x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(b)} b$

avec $x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(b)} b \in H$. On a

$\sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| = \|\varphi\| \neq 0$, donc $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists x_\varepsilon \in E \mid \|x_\varepsilon\| = 1$ et $|\varphi(x_\varepsilon)| \geq \|\varphi\| - \varepsilon > 0$

$x = h_\varepsilon + t_\varepsilon x_\varepsilon$ car $x_\varepsilon \notin H$ et $h_\varepsilon \in H$, $t_\varepsilon \in \mathbb{K}$

et on a : $\varphi(x) = t_\varepsilon \varphi(x_\varepsilon) \Rightarrow |t_\varepsilon| = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_\varepsilon)}$

d'où $|t_\varepsilon| \leq \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\| - \varepsilon}$. On a $x - h_\varepsilon = t_\varepsilon x_\varepsilon$

$\Rightarrow \dfrac{\|x - h_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} = |t_\varepsilon| \Rightarrow \|x - h_\varepsilon\| = |t_\varepsilon| \leq \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\| - \varepsilon}$

donc $d(x, H) \leq \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$.

Alors, $d(x, H) = \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$.

EXO5 : 1°/ On a $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n y_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n||y_n|$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x\|_\infty |y_n|$$

$$= \|x\|_\infty \|y\|_1 < \infty$$

donc $T_x$ est bien définie.

Soient $y = (y_n)_{n\geq 0}$, $z = (z_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

On a $T_x(y+\lambda z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n(y_n + \lambda z_n) =$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} x_n z_n$$

$$= T_x(y) + \lambda T_x(z).$$

donc $T_x$ est linéaire.

On a $|T_x(y)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$

donc $T_x$ est bornée et $\|T_x\| \leq \|x\|_\infty$.

On a $T_x(e_n) = x_n$ et $\|e_n\|_1 = 1$

$$e_n = (\underbrace{0, \text{---} 0}_{n}, 1, 0 \text{---} 0)$$

d'où $\|T_x\| \geq |x_n|$ donc $\|T_x\| \geq \|x\|_\infty$

Par conséquent $\|T_x\| = \|x\|_\infty$.

2°/ Il est clair que T est linéaire.

et on a $\|T_x\| = \|x\|_\infty = \|T(x)\|$

donc T est isométrique.

d'où T est injective car toute application isométrique est injective.

Il reste de montrer que T est surjective.

Soit $f \in l^{1*}$, pour tout $n \geq 0$, on pose

$x_n = f(e_n)$. On a $|x_n| = |f(e_n)| \leq \|f\| \|e_n\|_1$
$= \|f\|$

donc $(x_n)_{n\geq 0} \in l^\infty$. Pour tout $n \geq 0$,

on a $T_x(e_n) = x_n = f(e_n)$, donc $T_x = f$.

<u>EX 06</u> : * T est bien définie car $\forall (x,g) \in E \times E^*$,

$g(x) \in \mathbb{K}$ (existe). Soit $(x,g) \in E \times E^*$,

On a : $|T(x,g)| = |\langle x,g \rangle| \leq \|g\| \cdot \|x\|$.

d'où T est continue.

et T est bilinéaire (évidente)

* Soient $E, F$ deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(E,F)$

L'application : $T^* : F^* \longrightarrow E^*$

$$f \longmapsto f \circ T$$

est appelée la transposée ou l'adjoint de $T$.

on a pour tout $f \in F^*$ / $f : F \longrightarrow \mathbb{K}$

$$Tx \longmapsto f(Tx).$$

$f(Tx) = (f \circ T)(x)$ ~~$T \circ$ ...~~

$f \circ T$ et linéaire et continue, et $\forall x \in E$,

$(f \circ T)(x) \in \mathbb{K}$, donc $f \circ T \in E^*$, De plus,

$$f(Tx) = T^*(f)(x) \Rightarrow \langle Tx, f \rangle = \langle x, T^*(f) \rangle.$$

* $T^*$ est linéaire et $\|T^*(f)\| = \|f \circ T\| \leq \|f\| \|T\|$

donc $T^*$ et borné et ainsi $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $T(x) \neq 0$,

on pose $H = \mathbb{K}\, Tx$ s.e.v engendré par $Tx$.

on définit : $f(\lambda Tx) = \lambda \|Tx\|$. alors $f$ est une forme linéaire continue sur $H$ telle que

$\|f\| = 1$ et $f(y) = \|y\|$, pour tout $y \in H$, D'après le Th de Hahn-Banach, ~~f est prolongeable~~

il existe $\hat{f} \in F^*$ | $\|\hat{f}\| = \|f\| = 1$

et $\hat{f}(Tx) = \|Tx\|$. d'où $\|T^*(\hat{f})\| \geq |T^*(\hat{f})(x)|$

$$= |\hat{f}(Tx)|$$

$$= \|Tx\|.$$

Par conséquent, $\|T^*(\tilde{f})\| \geq \|T\|$, or

$\|\hat{f}\| = 1$ , on en déduit $\|T^*\| \geq \|T\|$