FICHE TD : $N^0 4$

Exercice 1.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré r si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, f(tx,ty) = t^r f(x,y).$$

1. Montrer que si f est homogène de degré r, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r-1$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \| x - y \|^2 .$$

   Démontrer que f est constante. Montrer que si f est homogène de degré r si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y).$$

3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = r(r-1)f(x,y).$$

Exercice 2.

$\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (\frac{1}{2}\sin(x+y), \frac{1}{2}cos(x-y)) \end{array}$$

1− Calculer $Df(a)$.

2− Trouver $k \in]0,1[$ tel que $\|Df(x,y)\| \leq k$.

3− En utilisant le thÃľorÃĺme des accroissement finis prouver que le systÃĺme suivant

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin(x+y) \\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exercice 3.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$f(M) = M^2,$$

où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées (n ligne et n colonne).
Justifer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.

Soit f et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = f(x + \varphi(y)).$$

a. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$.

b. Vérifier l'égalité :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Corrigé

Exercice 1.

1. On pose $g(x,y)=f(tx,ty)$. On a d'une part :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty).$$
D'autre part, en utilisant la relation $g(x,y)=t^r f(x,y)$, on a :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=t^r\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$
On en déduit
$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)=t^{r-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$
On fait de même avec la dérivée partielle suivant y.
2. Fixons $x\in\mathbb{R}^2$ Alors, pour $h\in\mathbb{R}^2$ on a
$$|f(x+h)-f(x)|\leq\| h \|^2\Longrightarrow f(x+h)=f(x)+o\left(\| h \|\right).$$
Ceci signifie que f est différentiable en x et que $d\,f_x=0$. En particulier, f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe (donc connexe par arcs), ceci implique que f est constante.
Supposons d'abord que f est homogène de degré r. On a donc :
$$f(tx,ty)=t^r f(x,y).$$
On dérive cette relation par rapport à t. On trouve :
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=rt^{r-1}f(x,y).$$
Le résultat vient en appliquant le résultat de la première question, qui dit que les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $r-1$. Pour la réciproque, posons $\varphi(t)=f(tx,ty)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant la relation vérifiée par f (qu'on appelle relation d'Euler), on a :
$$\varphi'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)=\frac{r}{t}f(tx,ty)=\frac{r}{t}\varphi(t).$$
La dérivée de l'application $t^{-r}\varphi(t)$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc constante sur cet intervalle, et comme en outre $\varphi(1)=f(x,y)$, on démontre que f est bien homogène de degré r.
3. En écrivant la relation d'Euler pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (qui sont homogènes de degré $r-1$), on obtient
$$x\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=(r-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
et
$$x\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=(r-1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$
On ajoute alors x fois la première relation, et y fois la deuxième, puis on utilise la relation d'Euler pour f pour obtenir le résultat.

Exercice 2.

$\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (\frac{1}{2}\sin(x+y), \frac{1}{2}cos(x-y)) \end{array}$$

1− $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$$Df(x,y)(h) = (Df_1(x,y)(h), Df_2(x,y)(h)) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y)(h_1+h_2), \sin(x-y)(h_2-h_1)\right)$$

2− On a

$$\begin{aligned} \|Df(x,y)\| &= \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2(x+y)(h_1+h_2)^2 + \sin^2(x-y)(h_2-h_1)^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{(h_1+h_2)^2 + (h_2-h_1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2(h_1^2+h_2^2)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

alors $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Et puis on applique le théorème suivant
Soient E un espace de Banach, f une fonction définie de E dans E.
S'il existe $k \in]0,1[$ tel que, pour tout $x \in E$

$$\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq k,$$

alors f admet un unique point fixe dans E.

Exercice 3.

Remarquons déjà que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f est polynômiale.
Soient $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on a

$$f(M+H) - f(M) = (M+H)^2 - M^2 = HM + MH + H^2.$$

Posons $\psi(H) = HM + MH$. ψ est linéaire et

$$f(M+H) - f(M) = \psi(H) + o(\|H\|).$$

Ainsi, ψ est la différentielle de f en M.