FICHE TD : $N^o 1$

Exercice 1 :

Proposition : S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E\setminus\{0\}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\|x_n\|'}{\|x_n\|}=0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\|x_n\|'}{\|x_n\|}=+\infty,$$

alors les normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ ne sont pas équivalentes.

- vérifier que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes, où

$$\|f\|_1=\int_a^b |f(x)|\,dx, \quad \|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\,.$$

Exercice 2 :

Soit $N:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$, l'application définie par.

$$N(\mu)=|x|+|y-x| \quad \text{pour} \quad \mu=(x,y).$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déssiner la boule fermée B de centre 0 et de rayon 1 pour cette norme.
3. Vérifier que $\frac{1}{2}\|\mu\|_1\le N(\mu)\le 2\|\mu\|_1$, où $\|\mu\|_1=|x|+|y|$.

Exercice 3 :

Représenter les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y)=\ln(2x+y-2), \qquad f_2(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Exercice 4 :

Démontrer que la fonction $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} 2x^2+y^2-1, & \text{si} \quad x^2+y^2>1 \\ x^2, & \text{si} \quad \text{sinon}\end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.