

TD3 – Analyse complexe

Licence mathématique – L2– (2022–2023)

Exercice 1. Soit

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow t^2 + it \end{aligned}$$

Calculez la longueur de γ .

Exercice 2. Calculez les intégrales suivantes :

$$I = \int_{|z+i|=1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz, \quad J = \int_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z^2 - 3z + 2} dz, \quad H = \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^3} dz,$$

$$K = \int_{|z|=2} \frac{1}{z^2 - 1} dz,$$

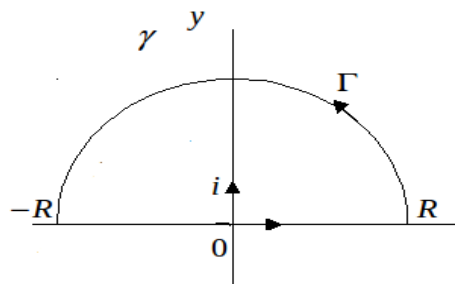
Exercice 3. soit $z = x + iy$ et $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$

Calculez l'intégrale complexe $\int_I f(z) dz$ dans les deux cas suivant :

1. I est la ligne brisée $z_1 z_2 z_3$ avec $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 2 + 4i$
2. I est le morceau parabolique $y = x^2$ qui relie z_1 à z_3 .

Exercice 4. Soit $f = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1}$ avec $z \in \mathbb{C}$

1. Déterminer les points singuliers de f et calculer le résidu à chaque point.
2. Déterminer la paramétrisation de γ , le contour défini par le segment $\Gamma_R = [-R, R]$ et le demi-cercle C_R de centre 0 et rayon R ou $R > 1$
3. Calculer $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$, $\int_{C_R} f(z) dz$, $\int_{\gamma} f(z) dz$,
4. Dédurre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2 + 1} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + 1} dx$
5. Dédurre $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2 + 1} dx$



Exercice 5. Soit $f(z) = \frac{z}{z^5 + 1}$ avec $z \in \mathbb{C}$

1. Déterminer les points singuliers de f et calculer le résidu des point dans $\gamma = \gamma_R \cup [0, R] \cap \Gamma_R^\circ$.
2. Déterminer la paramétrisation de γ (figure)
3. Calculer $\int_{\gamma_R} f(z)dz$, $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$, $\int_{[0,R]} f(z)dz$ et $\int_{\gamma} f(z)dz$.
4. Dédurre $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^5 + 1} dx$

