TD4 – Analyse complexe

Licence mathématique – L2– (2022–2023)

Exercice 1. *Calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx$

Exercice 2. *Soient* $f(z) = \dfrac{e^{i(1+a)z} + e^{i(1-a)z}}{2z}$ *avec* $z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}, |a| < 1$ *et* (γ) *défini dans la figure en face.*

1. *Déterminer les points singuliers de* f *et calculer le résidu de chaque points.*
2. *Montrer que* $\dfrac{e^{i(1+a)x} + e^{i(1-a)x}}{2x} = \dfrac{cos(x)cos(ax)}{x} + i\dfrac{sin(x)cos(ax)}{x}$
   (En utilisant $cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)$ *et* $sin(\alpha+\beta) = sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta)$*)*
3. *Déterminer la paramétrisation de* $\gamma = \gamma_R \cup \mathring{\gamma}_r \cup \Gamma_R \cup \Gamma'_R$ *avec* $R > 1$.

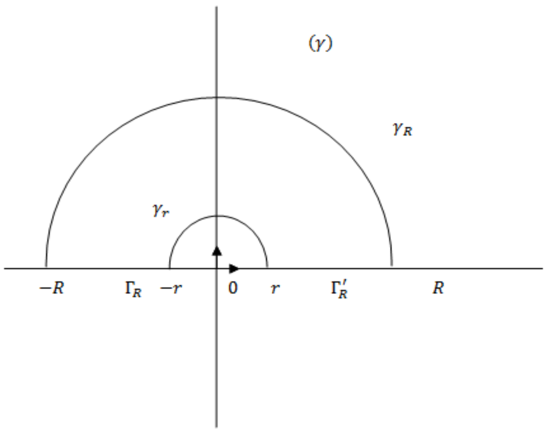
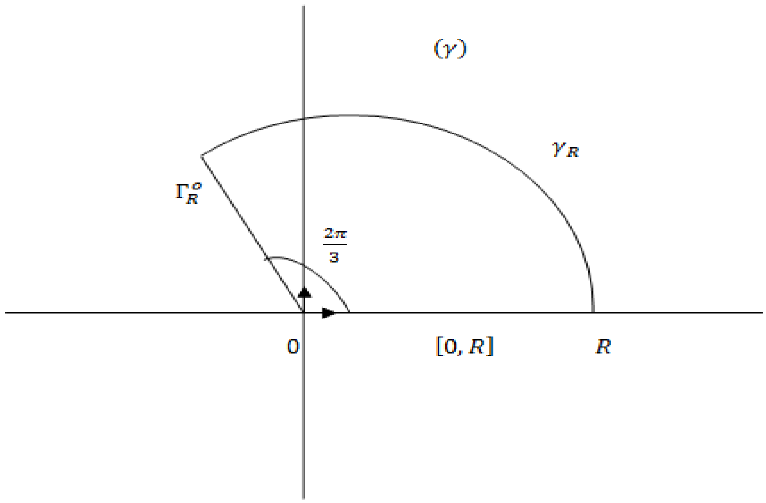


FIGURE 1 – le chemin γ associé à l'exercice 4

4. *Calculer* $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{\mathring{\gamma}_r} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{\Gamma'_R} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)dz$ *et* $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz$. *Et ses limites quand* $R \to +\infty$ *et* $r \to 0$
5. *Déduire* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(x)cos(ax)}{x}dx$

Exercice 3. *Soient* $f(z) = \dfrac{z}{z^3+1}$ *avec* $z \in \mathbb{C}$ *et* (γ) *défini dans la figure.*

1. *Déterminer les points singuliers de* f *et calculer le résidu des points qu'ils sont dans* (γ)*.*
2. *Déterminer la paramétrisation de* $\gamma = \gamma_R \cup \mathring{\Gamma}_R \cup [0, R]$ *avec* $R > 1$.
3. *Calculer* $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{\mathring{\Gamma}_R} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{[0.R]} f(z)dz$ *et* $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz$.
4. *Déduire* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$



(γ)
γ_R
Γ_R^o
$\frac{2\pi}{3}$
0
$[0, R]$
R