Université Ibn Khaldoun Tiaret.
Département des Mathématiques
Faculté de Mathématiques et Informatique

$1^{\text{ère}}$ anné Master L.M.D. AFED (Maths)
Année universitaire : 2023-2024
Le 03-06-2024

Corrigé Calcul Fractinnaire, Durée 1H 30 mn

Exercice1 :6points

Montrer que les propriétés de l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^{RL}D_a^\alpha$ suivantes sont vraies pour $\alpha \in]m-1, m[$:

1. ${}^{RL}D_a^\alpha$ est un opérateur linéaire.
2. ${}^{RL}D_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\beta \neq^{RL} D_a^\beta \circ^{RL} D_a^\alpha \neq^{RL} D_a^{\alpha+\beta}$.
3. $\lim\limits_{\alpha \to m-1} {}^{RL}D_a^\alpha f = f^{(m-1)}$ et $\lim\limits_{\alpha \to m} {}^{RL}D_a^\alpha f = f^{(m)}$.
4. ${}^{RL}D_a^\alpha \circ I_a^\alpha =$id.
5. $[(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha) f](x) = f(x) - \sum\limits_{j=0}^{m-1} \dfrac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)} \left\{ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \left[\left(\dfrac{d}{dx}\right)^j I_a^{m-\alpha} f \right](x) \right\}$.

Solution
Pour la linéarité c'est une simple vérification :
Soient f et g deux fonctions $\in C([a, b[)$ et Soient $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
[{}^{RL}D_a^\alpha(\lambda f + \delta g)](x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[I_a^{m-\alpha}(\lambda f + \delta g)(x)\right] \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\lambda I_a^{m-\alpha} f(x) + \delta I_a^{m-\alpha} g(x)\right] \\
&= \lambda \left(\frac{d}{dx}\right)^m I_a^{m-\alpha} f(x) + \delta \left(\frac{d}{dx}\right)^m I_a^{m-\alpha} g(x) \\
&= \lambda^{RL} D_a^\alpha f(x) + \delta^{RL} D_a^\alpha g(x) \\
&= \left[\lambda^{RL} D_a^\alpha f + \delta^{RL} D_a^\alpha g\right](x)
\end{aligned}$$

donc

$${}^{RL}D_a^\alpha(\lambda f + \delta g) = \lambda^{RL} D_a^\alpha f + \delta^{RL} D_a^\alpha g$$

Pour le deuxième point un contre-exemple suffit (considérer $\alpha = 1$,$\beta = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = x$)on obtient :

$$\begin{aligned}
({}^{RL}D_0^1 \circ {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}})x &= {}^{RL}D_0^1[{}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}x] \\
&= {}^{RL}D_0^1[\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}x^{1-\frac{1}{2}}] \\
&= [\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}}] \\
&= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}[{}^{RL}D_0^1 x^{\frac{1}{2}}] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

mais :

$$\begin{aligned}
({}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}} \circ {}^{RL}D_0^1)x &= {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}[{}^{RL}D_0^1 x] \\
&= {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}[\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-1+1)}1] \\
&= {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}1] \\
&= {}^{RL}D_0^{\frac{1}{2}}1 \\
&= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_0^{1+\frac{1}{2}}x &= {}^{RL}D_0^{\frac{3}{2}}x \\
&= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1-\frac{3}{2}+1)}x^{1-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Si f est de classe C^m alors on peut écrire :

$$f(x) = [I_a^m f^{(m)}](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$$

Où :
I_a^m : est l'intégrale entier d'ordre m
$f^{(m)}$: la dérivée d'ordre m
$f^{(j)}(a)$:la dérivée d'ordre j appliquée à a
Appliquons l'opérateur $I_a^{m-\alpha}$ aux deux membres on obtient :

$$
\begin{aligned}
(I_a^{m-\alpha} f)(x) &= I_a^{m-\alpha}\left[I_a^m f^{(m)}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right] \\
&= I_a^{m-\alpha}\left[I_a^m f^{(m)}\right](x) + I_a^{m-\alpha}\left[\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right] \\
&= (I_a^{2m-\alpha} f^{(m)})(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} I_a^{m-\alpha}(x-a)^j f^{(j)}(a) \\
&= (I_a^{2m-\alpha} f^{(m)})(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+m-\alpha)}(x-a)^{j+m-\alpha} f^{(j)}(a),
\end{aligned}
$$

comme $\Gamma(j+1) = j!$ alors :

$$
(I_a^{m-\alpha} f)(x) = (I_a^{2m-\alpha} f^{(m)})(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(j+1+m-\alpha)}(x-a)^{j+m-\alpha} f^{(j)}(a)
$$

Appliquons l'opérateur $\left(\frac{d}{dx}\right)^m$ aux deux membres de l'égalité :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f(x)] &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{2m-\alpha} f^{(m)}(x)] + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(j+1+m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^{j+m-\alpha} f^j(a) \\
&= [I_a^{m-\alpha} f^{(m)}](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(j+1-\alpha)}(x-a)^{j-\alpha} f^{(j)}(a).
\end{aligned}
$$

Où $\left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{2m-\alpha} f^{(m)}(x)] = [I_a^{m-\alpha} f^{(m)}](x)$(d'après la propriété de l'intégrale de Riemann-Liouville)
Quand $\alpha \underset{<}{\longrightarrow} m$ on obtient :

$$
\lim_{\substack{\alpha\to m \\ <}} ({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = \lim_{\substack{\alpha\to m \\ <}} (I_a^{m-\alpha} f^{(m)})(x) + \lim_{\substack{\alpha\to m \\ <}} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(j+1-\alpha)}(x-a)^{j-\alpha} f^{(j)}(a)
$$

Mais puisque l'intégrale de Riemann-Liouville est holomorphe en α donc continue alors :

$$
\lim_{\substack{\alpha\to m \\ <}} (I_a^{m-\alpha} f^{(m)})(x) = [I_a^0 f^{(m)}](x) = f^{(m)}(x),
$$

et comme la fonction gamma est continue alors :

$$
\lim_{\substack{\alpha\to m \\ <}} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(j+1-\alpha)}(x-a)^{j-\alpha} f^{(j)}(a) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(j+1-m)}(x-a)^{j-m} f^{(j)}(a),
$$

et puisque chaque terme $\frac{1}{\Gamma(j+1-m)}$ est nul (d'après les propriétés de la fonction spéciale gamma) donc :

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\Gamma(j+1-m)}(x-a)^{j-m} f^{(j)}(a) = 0.$$

D'où :

$$\lim_{\substack{\alpha \to m \\ <}} ({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(x) = f^{(m)}(x),$$

et avec la même méthode on obtient :

$$\lim_{\substack{\alpha \to (m-1) \\ <}} ({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(x) = f^{(m-1)}(x).$$

Pour la quatrième propriété on a :

$$\begin{aligned}
({}^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha})f &= \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m \circ I_a^{m-\alpha} \circ I_a^{\alpha}\right](f) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m [(I_a^{m-\alpha} \circ I_a^{\alpha})f] \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m [(I_a^{m})f] \\
&= I_a^0 f \\
&= f
\end{aligned}$$

Pour la dernière propriété on utilise la propriété 4, avec

$$({}^{RL}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha} \circ^{RL} D_a^{\alpha})f =^{RL} D_a^{\alpha} f$$

qui donne :

$${}^{RL}D_a^{\alpha}[(I_a^{\alpha} \circ^{RL} D_a^{\alpha})f - f] = 0,$$

à partir du lemme (**??**) on aura :

$$[(I_a^{\alpha} \circ^{RL} D_a^{\alpha})f](x) - f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m}$$

Par application aux deux membres $I_a^{m-\alpha}$on obtient :

$$I_a^{m-\alpha}[[(I_a^{\alpha} \circ^{RL} D_a^{\alpha})f](x) - f(x)] = I_a^{m-\alpha}\left[\sum_{j=0}^{m-1} C_j(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m}\right]$$

$$\begin{aligned}
[(I_a^{m} \circ^{RL} D_a^{\alpha})f](x) - [I_a^{m-\alpha} f](x) &= \sum_{j=0}^{m-1} C_j(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} I_a^{m-\alpha}(x-a)^{j+\alpha-m} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_j(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} \frac{\Gamma(j+\alpha-m+1)}{\Gamma(j+1)}(x-a)^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_j(f)(x-a)^{j}.
\end{aligned}$$

Or si $0 \leq j \leq m-1$ alors $\lim_{x\to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j [I_a^m g](x) = \lim_{x\to a^+} [I_a^{m-j} g](x) = 0$ et aussi :

$$\lim_{x\to a^+} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^j (x-a)^k = \begin{cases} j!\ si\ k=j \\ 0\ sinon \end{cases}$$

D'où :

$$j! c_j(f) = -\lim_{x\to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j [I_a^{m-\alpha} f](x)$$

l'équation (5) devient :

$$[(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha) f](x) - f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} - \lim_{x\to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j [I_a^{m-\alpha} f](x) \frac{1}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m},$$

donc

$$[(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha) f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j+\alpha-m}}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} \left\{ \lim_{x\to a^+} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{m-\alpha} f \right](x) \right\}$$

Exercice2 :6points

Etablir la proposition suivante
Si $\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} f(x) = c$ et f continue sur $]0, b]$,
alors

$$\lim_{x\to 0^+} (I_{0^+}^{1-\alpha} f)(x) = c\Gamma(\alpha).$$

ou $I_{0^+}^{1-\alpha}$ est l'integrale fractionnaire d'ordre $1-\alpha$.

Solution

$$\begin{aligned} (I^{1-\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)\ dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} f(t)\ dt. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} f(x)$ existe, alors la fonction $x^{1-\alpha} f(x)$ est prolongeable par continuité à $[0, b]$.
D'où

$$(I^{1-\alpha} f)(x) - c\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} [t^{1-\alpha} f(t) - c]\ dt.$$

pour que cette égalité est vraie la fonction Γ doit vérifier :

$$c\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} c\ dt.$$

En effet

$$\int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1}\ dt = \int_0^x x^{-\alpha} (1 - \frac{t}{x})^{-\alpha} t^{\alpha-1}\ dt.$$

On pose

$$\frac{t}{x} = u,$$

alors

$$dt = xdu.$$

On a

$$t : 0 \longmapsto x \Rightarrow u : 0 \longmapsto 1,$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1}\ dt &= \int_0^1 x^{-\alpha}(1-u)^{-\alpha}(xu)^{\alpha-1} x\ du \\
&= \int_0^1 (1-u)^{-\alpha} u^{\alpha-1}\ du \\
&= \beta(1-\alpha, \alpha).
\end{aligned}$$

Où $\beta(1-\alpha,\alpha)$ la fonction bêta définie par :

$$\beta(1-\alpha,\alpha) = \int_0^1 (1-u)^{-\alpha} u^{\alpha-1}\ du,$$

et qui relie avec la fonction gamma par la relation suivante :

$$\beta(1-\alpha,\alpha) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\ \Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha+\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} c\ dt &= \frac{c\beta(1-\alpha,\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \\
&= \frac{c\ \Gamma(1-\alpha)\ \Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\ \Gamma(1-\alpha+\alpha)} \\
&= c\Gamma(\alpha) \quad (\Gamma(1) = 1).
\end{aligned}$$

Donc reprenons la preuve :

$$(I^{1-\alpha} f)(x) - c\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} [t^{1-\alpha} f(t) - c]\ dt.$$

Comme la fonction $t \longmapsto t^{1-\alpha} f(t) - c$ est continue sur $[0,b]$ qui est compact alors $\sup\limits_{[0,b]} |t^{1-\alpha} f(t) - c|$ existe

$$\begin{aligned}
|(I^{1-\alpha} f)(x) - c\Gamma(\alpha)| &\leq \frac{\sup\limits_{[0,b]} |t^{1-\alpha} f(t) - c|}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\alpha-1} dt \\
&\leq \frac{\beta(1-\alpha,\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha} f(t) - c|.
\end{aligned}$$

Donc

$$|(I^{1-\alpha}f)(x) - c\Gamma(\alpha)| \leq \Gamma(\alpha)\sup_{[0,b]}|t^{1-\alpha}f(t) - c|$$

Par passage à la limite quand $x \to 0$ on obtient :

$$\lim_{x\to 0} I^{1-\alpha}f(x) = c\Gamma(\alpha).$$

Exercice3 :4points

Montrer que : Si $0 \leq \alpha$, $\beta \leq 1$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ et f de classe C^1 alors :

$$({}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta)f = {}^C D_a^{\alpha+\beta} f = ({}^C D_a^\beta \circ {}^C D_a^\alpha)f.$$

ou ${}^C D_a^\alpha$ est la derivation fractionnaire de Caputo d'ordre α.

Solution

$$\begin{aligned}
({}^C D_a^\alpha \circ {}^C D_a^\beta)f &= \left(I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dx} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{I_a^\beta \circ \frac{d}{dx}} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{{}^C D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta}} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \frac{d}{dx}\right) f \\
&= {}^C D_a^{\alpha+\beta} f,
\end{aligned}$$

Exercice4 :4points

on définit l'opérateur $\mathcal{L}$ appliqué a une fonction réelle x par :

$$\mathcal{L}[x](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}x(t)dt$$

Montrer que

$$\mathcal{L}[I^\alpha x](z) = z^{-\alpha}\mathcal{L}[x](z)$$

Solution

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[I^\alpha f](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zx}(I^\alpha f)(x)\ dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\int_0^x e^{-zx}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\ dt\ dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} e^{-zx}(x-t)^{\alpha-1}dx\right) f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

En posant $x = t + y$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[I^\alpha f](z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left(\int_0^{+\infty} e^{-zy} y^{\alpha-1} dy \right) f(t)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-zt} z^{-\alpha} f(t)\, dt \\
&= z^{-\alpha} \mathcal{L}[f](z).
\end{aligned}$$

Où $\int_0^{+\infty} e^{-zy} y^{\alpha-1} dy$ est calculé par :
On pose $u = zy$, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-zy} y^{\alpha-1}\; dy &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{z}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{z}\; du \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} z^{1-\alpha} z^{-1}\; du \\
&= z^{-\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1}\; du \\
&= z^{-\alpha} \Gamma(\alpha).
\end{aligned}$$