RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN-TIARET

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Cours d'Algèbre

1^{re} Année LMD

Mathématiques et Informatique

Réalisé par

Dr **Abdelkader MAATOUG**

Expertisé par :

Pr **Lahcene GUEDDA** - Uviversité Ibn Khaldoun, Tiaret.

Pr **Seddik OUAKKAS** - Uviversité Dr Moulay Tahar, Saida.

Avant Propos

Dans ce polycopié sont données quelques notions de base d'Algèbre genérale et d'Algèbre linéaire. Loin d'être complet, ce manuel de cours expose des définitions et des théorèmes importants dans cette branche de mathématiques. Il est destiné aux étudiants de première année LMD Mathématiques et Informatique (MI). Il peut aussi être utilisé par les étudiants d'autres paliers en sciences et sciences et techniques ou autre, la raison pour laquelle la rigueur des mathématiciens et certaines preuves sont parfois absentes.

Ce texte est composé de deux parties. La première partie porte sur l'algèbre genérale. La deuxime partie est une introduction à l'algèbre linéaire et un peu de calcul matriciel.

Toutes les remarques et commentaires sont les bienvenus de la part des enseignants ou des étudiants. Ils peuvent être envoyés à :
abdelkader.maatoug@univ-tiaret.dz ou maatoug_aek@yahoo.fr

Tiaret le 16-11-2017
Abdelkader MAATOUG

Table des matières

Première partie

Algèbre I

Chapitre 1

Notions de logique

1.1 Calcul propositionnel

1.1.1 Notion de proposition

Définition 1.1.1 *On appelle proposition tout énoncé qui est soit vrai soit faux.*

Exemples
1) Je suis un être humain. (cet énoncé est vrai, donc c'est une proposition).
2) Comment allez vous ? (cet énoncé n'est ni vrai ni faux, donc ce n'est pas une proposition)
3) $1 \times 1 = 1$ et $1 + 1 = 1$. (cet énoncé est faux, donc c'est une proposition)
4) L'entier a divise 2. (cet énoncé n'est ni vrai ni faux, donc ce n'est pas une proposition)

Les propositions sont souvent notées $P,\ Q,\ R,\ P', ...$etc.
Quand une proposition P est vraie, on écrit : On a P.

À partir d'une ou plusieurs propositions, on peut construire de nouvelles propositions dites composées. C'est l'objet des paragraphes suivants.

1.1.2 La négation

Définition 1.1.2 *La négation d'une proposition P est la proposition notée $\overline{P}$ et qui est vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie.*

$\overline{P}$ se lit : Non P.

Exemples
1) Si P est : "Je suis un être humain",
alors $\overline{P}$ est : "Je ne suis pas un être humain"
2) Si Q est : "ce tableau est rouge",
alors $\overline{Q}$ est : " ce tableau n'est pas rouge".

Attention : $\overline{Q}$ n'est pas " ce tableau est vert".

Remarque 1.1.1 *$\overline{P}$ est aussi notée $\rceil P$.*

1.1.3 La conjonction

Définition 1.1.3 *La conjonction des deux propositions P et Q est la proposition notée $P \wedge Q$ et qui est vraie si Pet Q sont simultanément vraies et fausse dans les autres cas.*

$P \wedge Q$ se lit : P et Q.

Exemples
Si P est : "Je suis un être humain"
et Q est : "Ce tableau est rouge", alors
1) $P \wedge Q$ est : "Je suis un être humain *et* ce tableau est rouge" (cette proposition est fausse).
2) $P \wedge \overline{Q}$ est : "Je suis un être humain *et* ce tableau n'est pas rouge" (cette proposition est vraie).

1.1.4 La disjonction

Définition 1.1.4 *La disjonction des deux propositions P et Q est la proposition notée $P \vee Q$ et qui est fausse si Pet Q sont simultanément fausses et vraie dans les autres cas.*

$P \vee Q$ se lit : P ou Q.

Exemples
Si P est : "Je suis un être humain"
et Q est : "ce tableau est rouge", alors
1) $P \vee Q$ est : "Je suis un être humain *ou* ce tableau est rouge" (cette proposition est vraie).
2) $\overline{P} \wedge Q$ est : "Je ne suis pas un être humain *ou* ce tableau est rouge" (cette proposition est fausse).

1.1.5 L'implication

Définition 1.1.5 *L'implication des deux propositions P puis Q est la proposition notée $P \Rightarrow Q$, qui est fausse si P est vraie et Q est fausse et qui est vraie dans les autres cas.*

$P \Rightarrow Q$ se lit : P implique Q, ou aussi : Si P alors Q.

Exemples
Si P est : " $3 = 7 - 4$ "
et Q est : " $7 = 4 - 3$ ", alors
1) $P \Rightarrow Q$ est : "$3 = 7 - 4$ *implique* $7 = 4 - 3$" (cette proposition est fausse).
2) $Q \Rightarrow P$ est : "$7 = 4 - 3$ *implique* $3 = 7 - 4$ "(cette proposition est vraie).

1.1.6 L'équivalence

Définition 1.1.6 *L'équivalence des deux propositions P et Q est la proposition notée $P \Leftrightarrow Q$ et qui est vraie si P et Q sont simultanéments vraies ou simultanément fausses et qui est fausse dans les autres cas.*

$P \Leftrightarrow Q$ se lit : P équivalente à Q, ou aussi : P si et seulement si Q.

Exemples
Si P est : " $3 = 7 - 4$ "
et Q est : " $7 = 4 - 3$", alors
1) $P \Leftrightarrow Q$ est : " $3 = 7 - 4$ *équivalent à* $7 = 4 - 3$" (cette proposition est fausse)
2) $\overline{Q} \Leftrightarrow P$ est : "$7 \neq 4 - 3$ *équivalent à* $3 = 7 - 4$"(cette proposition est vraie)

En affectant la valeur 1 à la proposition vraie, et la valeur 0 à la proposition fausse, on peut résumer les définitions pécédentes par le tableau suivant, appelé "Table de vérités" ou "Tableau de vérités"

P	Q	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

1.2 Calcul des prédicats

1.2.1 Notion de prédicat

Définition 1.2.1 *On appelle prédicat tout énoncé contenant une ou plusieurs variables et qui devient une proposition quand on substitue aux variables des objets concrets.*

Exemples
1) L'entier a divise 2. (cet enoncé est un prédicat).
2) Le réel x est supérieur à 0. (cet enoncé est un prédicat).
3) La différence des deux entiers n puis m est un multiple de 3. (cet enoncé est un

prédicat)
4) Où est l'étudiant x? (cet enoncé n'est pas un prédicat)

Les prédicats sont souvent notés $P(x)$, $Q(x,y)$, $R(z)$, $P'(x,y,z)$, ...etc.
À partir d'un ou plusieurs prédicats, on peut en construire d'autres, dits prédicats composés, en utilisant la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.

Exemples
1) $(x^2 = 1) \Rightarrow ((x = 1) \vee (x = -1))$ (cet enoncé est un prédicat)
2) $[(x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leq 0) = 1] \Rightarrow (x = 0)$ (cet enoncé est un prédicat)
3) $|x| = |y| \Leftrightarrow [(x = y) \vee (x = -y)]$ (cet enoncé est un prédicat)

1.2.2 Les quantificateurs

Soit $P(x)$ un prédicat et E un ensemble non vide.
1) L'expression *" Pour tout élément x de E : $P(x)$ est vraie "* s'écrit en abrégé : *" $\forall x \in E,\ P(x)$."*
2) L'expression *" Il existe au moins un élément x de E tel que $P(x)$ soit vraie "* s'écrit en abrégé : *" $\exists x \in E,\ P(x)$. "*

Exemples
1) " $\forall x \in \mathbb{Z},\ x = x^3$ " veut dire : *" Pour tout élément x de $\mathbb{Z}$: $x = x^3$ est vraie"*, qui est fausse car $2 \neq 2^3$.
2) " $\exists x \in \mathbb{N},\ x - 4 > 0$" veut dire : *" Il existe au moins un élément x de $\mathbb{N}$, tel que $x - 4 > 0$ soit vraie "* qui est vraie car $5 - 4 > 0$.
3) " $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$" veut dire *" Il existe au moins un élément x de $\mathbb{R}$, tel que $x^2 < 0$ soit vraie"* qui est fausse car on ne peut pas trouver un réel x vérifiant $x^2 < 0$.
4) " $\forall a \in \mathbb{N}$, 1 divise a " veut dire *" Pour tout élément a de $\mathbb{N}$: 1 divise a est vraie"* qui est vraie car tous les entiers naturels sont divisibles par 1.
5) $\exists x \in \mathbb{R},\ x < y$. Cette expression est un prédicat $Q(y)$.

Remarque 1.2.1 *1) Le symbole $\forall$ s'appelle le quantificateur universel et le symbole $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.*
2) " $\forall x \in E,\ P(x)$" se lit aussi " Quel que soit x de E, $P(x)$"
3) $\overline{\forall x \in E,\ P(x)}$ est : $\exists x \in E,\ \overline{P(x)}$
4) $\overline{\exists x \in E,\ P(x)}$ est : $\forall x \in E,\ \overline{P(x)}$

Exemples
1) $\overline{\forall x \in \mathbb{Z},\ x = x^3}$ est : $\exists x \in \mathbb{Z},\ x \neq x^3$
2) $\overline{\exists x \in \mathbb{N},\ x - 4 > 0}$ est : $\forall x \in \mathbb{N},\ x - 4 \leq 0$
3) $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R},\ x < y$ est : $\exists y \in \mathbb{Z}, \overline{\exists x \in \mathbb{R},\ x < y}$, donc c'est $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq y$

Propriétés
Soient $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ trois prédicats et E un ensemble non vide. On a les propriétés suivantes :

On écrit $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ si $\forall x \in E, (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$

1) $\overline{\overline{P}}(x) \Leftrightarrow P(x)$

2) $[P(x) \wedge P(x)] \Leftrightarrow P(x)$ et $[P(x) \vee P(x)] \Leftrightarrow P(x)$.

3) $[P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow [Q(x) \wedge P(x)]$ et $[P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow [Q(x) \vee P(x)]$

4) $([P(x) \wedge Q(x)] \wedge R(x)) \Leftrightarrow (P(x) \wedge [Q(x) \wedge R(x)])$
et $([P(x) \vee Q(x)] \vee R(x)) \Leftrightarrow (P(x) \vee [Q(x) \vee R(x)])$

5) $([P(x) \wedge Q(x)] \vee R(x)) \Leftrightarrow ([P(x) \vee R(x)] \wedge [Q(x) \vee R(x)])$
et $([P(x) \vee Q(x)] \wedge R(x)) \Leftrightarrow ([P(x) \wedge R(x)] \vee [Q(x) \wedge R(x)])$

6) $\left(\overline{P(x) \wedge Q(x)}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}\right)$ et $\left(\overline{P(x) \vee Q(x)}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}\right)$
(Lois de De Morgan).

7) $(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \left(\overline{P(x)} \vee Q(x)\right)$

8) $\left(\overline{P(x) \Rightarrow Q(x)}\right) \Leftrightarrow \left(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right)$

9) $(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \left(\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}\right)$
($\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$ est appelée implication cotraposée de $P(x) \Rightarrow Q(x)$)

10) $([P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \Rightarrow R(x)]) \Rightarrow [P(x) \Rightarrow R(x)]$

11) $[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Leftrightarrow ([P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \Rightarrow P(x)])$

12) $\left(\overline{P(x) \Leftrightarrow Q(x)}\right) \Leftrightarrow \left(\left(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right) \vee \left(\overline{P(x)} \wedge Q(x)\right)\right)$

Les propriétés précédentes sont vraies aussi pour les propsitions.

Quand deux prédicats sont équivalents on peut remplacer l'un par l'autre. (La même chose pour les propostions)

Remarque 1.2.2 *Soient E et F deux ensembles et $P(x,y)$ un prédicat à deux variables, alors $\forall y \in F,\ P(x,y)$ et $\exists y \in F,\ P(x,y)$ sont des prédicats à une seule variable, donc on peux écrire :*
1) $\forall x \in E, \forall y \in F,\ P(x,y)$ qui veut dire que pour tout x de E et tout y de F : $P(x,y)$ est vraie.
2) $\exists x \in E, \exists y \in F,\ P(x,y)$ qui veut dire qu'il existe au moins un x de E et un y de F, tel que $P(x,y)$ soit vraie.
3) $\forall x \in E, \exists y \in F,\ P(x,y)$ qui veut dire que pour tout x de E, il existe au moins un y de F tel que $P(x,y)$ soit vraie. Autrement dit : Pour chaque x de E il existe un certain y de F dépendant de x qui vérifient ensemble $P(x,y)$.
4) $\exists x \in E, \forall y \in F,\ P(x,y)$ qui veut dire qu'il existe au moins un y de F, pour tout x de E, tel que $P(x,y)$ soit vraie. Autrement dit : Il existe un certain y de F indépendant de x qui vérifie $P(x,y)$ avec tous les x de E.
Attention : Dans 4) x doit être le même pour tous les y, par contre dans 3) y peut changer suivant x.

Exemples
1) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R},\ x \leq y$. (faux)
2) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R},\ x \leq y$. (vrai)
3) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{Z},\ x$ divise y. (vrai)
4) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 = -y$. (vrai)
5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (xy)^2 > 0$. (faux)

1.3 Les grands types de raisonnement

1.3.1 Le raisonnement déductif

Pour montrer que la proposition Q est vraie il suffit que les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et P soient vraies.

Ce raisonnement est basé sur le fait qu'on a : $P \wedge (P \Rightarrow Q)$ implique Q.
En effet :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Exemple
Montrons que l'équation $x^2 - x + 2012 = 0$ n'a pas de solution réelle.
On sait que pour une équation de second degrée dans $\mathbb{R}$ on a : $\triangle < 0 \Rightarrow$ *(l'éqution n'a pas de solutions réelle)*
Soit l'équation $x^2 - x + 2012 = 0$.
On a $\triangle = -8047 < 0$, donc on déduit que l'équation n'a pas de solution réelle.

1.3.2 Le raisonnement par contraposée

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie il suffit de montrer que sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ soit vraie.

Ce raisonnement est basé sur le fait que $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ sont équivalentes.
En effet :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$	$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Exemple
Montrons que *(l'entier a^2 est pair)*$\Rightarrow$ *(l'entier a est pair)*.

Il suffit de montrer que *(l'entier a n'est pas pair)*$\Rightarrow$ *(l'entier* a^2 *n'est pas pair).*
En effet :
On a *(l'entier a n'est pas pair)*$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} : a = 2n + 1)$
$\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} : a^2 = 2\,(2n^2 + 2n) + 1)$
$\Rightarrow$ *(* a^2 *n'est pas pair),*
donc l'implication initiale *(l'entier* a^2 *est pair)*$\Rightarrow$*(l'entier a est pair)* est vraie.

1.3.3 Le raisonnement par l'absurde

Pour montrer que la proposition Q est vraie, on suppose que sa négation $\overline{Q}$ est vraie et on montre que cette supposition conduit à une proposition fausse.

Ce raisonnement est basé sur le fait que si $\overline{Q} \Rightarrow P$ est vraie et P est fausse alors $\overline{Q}$ est fausse, donc Q est vraie.

En effet :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Rightarrow P$	$\big(\overline{Q} \Rightarrow P\big) \wedge \overline{P}$	$\Big(\big(\overline{Q} \Rightarrow P\big) \wedge \overline{P}\Big) \Rightarrow Q$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1

Exemple
Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec a et b $(b \neq 0)$ deux entiers premiers entre eux.
Ainsi, $a^2 = 2b^2$, donc a^2 est pair. Mais on sait que *(l'entier* a^2 *est pair)*$\Rightarrow$*(l'entier a est pair),* alors $a = 2a'$, avec a' entier ; par conséquent $4a'^2 = 2b^2$, c.à.d : $2a'^2 = b^2$ et de la même façon on conclut que b est pair, donc 2 divise a et b, avec a et b sont deux entiers premiers entre eux, ce qui est faux.
Par suite $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.3.4 Le raisonnement par disjonction de cas

Pour montrer que la proposition Q est vraie, il suffit de montrer que les propositions $P \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \Rightarrow Q$ sont vraies.

Ce raisonnement est basé sur le fait que si $P \Rightarrow Q$ et $\overline{P} \Rightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie.

En effet :

P	Q	$\overline{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P} \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \big(\overline{P} \Rightarrow Q\big)$	$\Big((P \Rightarrow Q) \wedge \big(\overline{P} \Rightarrow Q\big)\Big) \Rightarrow Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1

Exemple
Soit n un entier. Montrons que $n(n+1)$ est pair.
$1^{er}cas$: Si n est pair, c.à.d : $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$; alors $n(n+1) = 2k(2k+1)$ qui est pair.
$2^{ème}cas$: Si n n'est pas pair, c.à.d : $n = 2k+1$, avec $k \in \mathbb{Z}$; alors $n(n+1) = 2(2k+1)(k+1)$ qui est pair.
Dans les deux cas $n(n+1)$ est pair.

1.4 Exercices du chapitre 1

Exercice 1.1 *Les propositions suivantes sont elles vraies ?*
$P_1 : ((1+2=4) \vee (1+4 \geq 2)) \Rightarrow (4-2=1)$
$P_2 : ((1+1 \geq 4) \Rightarrow (1=0)) \wedge (|-2| = 2)$
$P_3 : (1+2=4) \vee \big((1+4>2) \Rightarrow (\overline{4-2=1})\big)$
$P_4 : \big((1+2=3) \Leftrightarrow \big(\overline{1+4 \geq 5}\big)\big) \Rightarrow (1 \ divise \ 0)$
$P_5 : \big((0 \ divise \ 3) \Leftrightarrow \big(\big(\frac{1}{3} = 0.33\big) \vee (2=3)\big)\big) \wedge \Big(\overline{\sqrt{2} = 1.41}\Big)$
Ecrire les négations de ces propositions.

Exercice 1.2 *Soient P, Q et R des propositions. Montrer qu'on a les équivalences suivantes :*
1) $\big(\overline{P \wedge Q}\big) \Leftrightarrow \big(\overline{P} \vee \overline{Q}\big)$
2) $\big(\overline{P \Rightarrow Q}\big) \Leftrightarrow \big(P \wedge \overline{Q}\big)$
3) $\big(\overline{P \Longleftrightarrow Q}\big) \Leftrightarrow \big(\big(P \wedge \overline{Q}\big) \vee \big(\overline{P} \wedge Q\big)\big)$
4) $((P \wedge Q) \vee R) \Leftrightarrow ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$

Exercice 1.3 *Ecrire les négations des énoncés suivants et dire s'ils sont vrais ou faux.*
$P_1 : \exists x \in \mathbb{R}^+, \ x^2 = x.$
$P_2 : \forall y \in \mathbb{Q}, \ y + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$
$P_3 : \forall n \in \mathbb{N}, \ ((n<2) \Rightarrow (2 \ divise \ n)).$
$P_4 : \exists a \in \mathbb{Z}, \ ((a \ est \ impair) \wedge (a<0)).$
$Q_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ x^2 + y^2 \geq 0.$
$Q_2 : \exists n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, \ x^n = 0.$
$Q_3 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \ x \leq n.$
$Q_4 : \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ x \leq n.$

Exercice 1.4 *1) Montrer, par l'absurde, que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est un nombre irrationnel.*
2) Soit a et b deux nombres réels. Montrer par contraposée que :
$(a \neq -1 \ et \ b \neq -1) \Rightarrow (a+b+ab \neq -1)$.
3) Montrer par disjonction des cas que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.

Exercice 1.5 *1) Soit x et y deux nombres réels.*
Montrer que si $x \neq y$, alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$
2) Sachant que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
Montrer, que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.
3) Soit a et b deux nombres réels. Posons $a * b = a + b + ab$.
Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $(a * a) * a = a^3 + 3a^2 + 3a$.
Montrer que $\exists a \in \mathbb{R}$, $a * a = a$.

Chapitre 2

Ensembles et Applications

2.1 Ensembles

2.1.1 Notion d'ensemble

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de cet ensemble

Si cet ensemble est noté A, on écrit $x \in A$ pour dire que x est un élément de A et on écrit $x \notin A$ pour dire que x n'est pas un élément de A.

On décrit un ensemble A en donnant la liste de tous ses éléments.
C.à.d :$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ (Appelée description en extension), ou en caractérisant ses éléments parmi ceux d'un ensemble E déjà connu au moyen d'un prédicat $P(x)$.
C.à.d :$A = \{x \in E : P(x)\}$ (Appelée description en compréhension).

Remarque 2.1.1 *$x \in A$ se lit : x appartient à A.*

Exemples
1) L'ensemble des chiffres du système décimal : $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
(déscrit en extension)
2) L'ensembles des entiers naturels pairs : $2\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} : 2 \text{ divise } x\}$. (déscrit en compréhension)
3) L'ensemble des réels positifs : $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$. (déscrit en compréhension)
4) $A = \{a \in \mathbb{Z} : |a| = -1 \ \} = \{-1, 1\}$. (déscrit en compréhension puis en extension)

On a $3 \in F$, $7 \notin 2\mathbb{N}$, $18 \in 2\mathbb{N}$, $-4 \notin \mathbb{R}^+$ et $1 \notin A$.

2.1.2 Sous-ensemble d' un ensemble, Opérations sur les ensembles

Définition 2.1.1 *Soient E, A et B des ensembles.*
D1) On dit que B est un sous-ensemble de A, si tout élément de B est un élément

de A. Dans ce cas on écrit : $B \subset A$ et dans le cas contraire on écrit :$B \not\subset A$.
D2) La différence de A puis B est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas des éléments de B. Cet ensemble est noté $A\backslash B$. C.à.d : $A\backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$.
D3) Si $A \subset E$, le complémentaire de A dans E est l'ensemble $E\backslash A$. Cet ensemble est noté $C_E A$. C.à.d : $C_E A = \{x \in E : x \notin A\}$.
D4) L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé l'ensemble vide et est noté $\varnothing$. On a par convention : $\varnothing \subset E$
D5) L'intersection de A et B est l'ensemble des éléments qui sont de A et de B en même temps. Cet ensemble est noté $A \cap B$. C.à.d : $A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$.
D6) L'union de A et B est l'ensemble des éléments qui sont de A ou de B. Cet ensemble est noté $A \cup B$. C.à.d : $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
D7) Le produit cartésien de A puis B est l'ensemble des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$. Cet ensemble est noté $A \times B$. C.à.d : $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Exemples Soit $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
1) On a $F \subset \mathbb{N}$ mais $F \not\subset 2\mathbb{N}$.

2) $F\backslash 2\mathbb{N} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $(2\mathbb{N})\backslash F = \{x \in 2\mathbb{N} : x \geq 10\} = \{10, 12, 14, 16, ...\}$

3) $C_{\mathbb{N}} F = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 10\} = \{10, 11, 12, ...\}$, $C_{\mathbb{N}}(2\mathbb{N}) = 2\mathbb{N} + 1$ (l'ensemble des nombres impairs)

4) $F \cap 2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$, $(C_{\mathbb{N}} F) \cap \{1, 2, 4\} = \varnothing$.

5) $\{0, 2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 2, 4\} = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, $F \cap 2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$.

6) $\{0, 2, 4\} \times \{1, 2\} = \{(0, 1), (0, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2)\}$

$\{1, 2\} \times \{0, 2, 4\} = \{(1, 0), (2, 0), (1, 2), (2, 2), (1, 4), (2, 4)\}$

2.1.3 Ensembles et prédicats

Soient E, A et B des ensembles, et soient $P(x)$ et $Q(x)$ des prédicats sur E. Si $A = \{x \in E : P(x)\}$ et $B = \{x \in E : Q(x)\}$, alors :

D'1) $B \subset A \Leftrightarrow [\forall x \in E, Q(x) \Rightarrow P(x)]$
D'2) $A\backslash B = \left\{x \in E : P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right\}$
D'3) $C_E A = \left\{x \in E : \overline{P(x)}\right\}$
D'4) $\varnothing = \left\{x \in E : P(x) \wedge \overline{P(x)}\right\}$
D'5) $A \cap B = \{x \in E : P(x) \wedge Q(x)\}$
D'6) $A \cup B = \{x \in E : P(x) \vee Q(x)\}$
D'7) $A \times B = \{(x, y) : P(x) \wedge Q(y)\}$

Exemples
Soient $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 > x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$

1) On a $\forall x \in \mathbb{R} :\ (x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$ (en multipliant les membres de l'in'égalité $x > 1$ par x qui est positif), donc $B \subset A$.

2) $A \backslash B = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 > x) \wedge (x \leq 1)\}$ et on a les équivalences :

$$\begin{aligned}(x^2 > x) \wedge (x \leq 1) &\Leftrightarrow [(x < 0) \vee (x > 1)] \wedge (x \leq 1) \\ &\Leftrightarrow [(x < 0) \wedge (x \leq 1)] \vee [(x > 1) \wedge (x \leq 1)] \\ &\Leftrightarrow [(x < 0) \wedge (x \leq 1)] \\ &\Leftrightarrow x < 0.\end{aligned}$$

Alors $A \backslash B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

3) $C_{\mathbb{R}} A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

4) $A \cap B = B$, car $B \subset A$.

5) $A \cap C = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 > x) \wedge (|x| \leq 1)\}$, on a

$$\begin{aligned}(x^2 > x) \wedge (|x| \leq 1) &\Leftrightarrow [(x < 0) \vee (x > 1)] \wedge (-1 \leq x \leq 1) \\ &\Leftrightarrow [(x < 0) \wedge (-1 \leq x \leq 1)] \vee [(x > 1) \wedge (-1 \leq x \leq 1)] \\ &\Leftrightarrow (-1 \leq x < 0).\end{aligned}$$

Alors $A \cap C = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 0\}$.

6) $A \cup B = A$, car $B \subset A$.

7) $A \cup C = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 > x) \vee (|x| \leq 1)\}$, on a

$$\begin{aligned}(x^2 > x) \vee (|x| \leq 1) &\Leftrightarrow [(x < 0) \vee (x > 1)] \vee (-1 \leq x \leq 1) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Alors $A \cup C = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Remarque 2.1.2 *R1) Si $B \subset A$, on dit aussi que B est une partie de A ou B est contenu ou inclus dans A.*
R2) $A \backslash B$ est aussi noté $A - B$
R3) $C_E A$ est aussi noté A^C.
R4) $(a, b) \neq (b, a)$ si $a \neq b$.
R5) L'ensemble de toutes les parties d' un ensemble A est noté $\mathcal{P}(A)$.

Exemple
Soit $A = \{0, 1, 2\}$, alors
$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, A\}$

2.1.4 Propriétés

Soient A, B, C et E des ensembles. On a :
1) $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$.
2) $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *et* $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
5) $A \cap \varnothing = \varnothing$ *et* $A \cup \varnothing = A$.
6) Si $A \subset E$, *alors* $A \cap C_E A = \varnothing$ *et* $A \cup C_E A = E$.
7) Si $A \subset E$ *et* $B \subset E$, *alors* $C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$
et $C_E(A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$.
8) Si $A \subset B$, *alors* $C_E B \subset C_E A$.

2.1.5 Partition d'un ensemble

Définition 2.1.2 *On appelle partition d'un ensemble* E, *toute famille* $\mathcal{F}$ *de parties non vides de* E, *telle que :*
1) Les éléments de $\mathcal{F}$ *sont deux à deux disjoints, c.à.d :* $\forall\ A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \varnothing$.
2) $\mathcal{F}$ *est un recouvrement de* E, *c.à.d :* $\underset{A \in \mathcal{F}}{\cup} A = E$.

Exemple
Soit $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, alors
$\mathcal{F} = \{\{0, 2\}, \{1, 4\}, \{3\}\}$ est une partition de B.
Mais $\mathcal{F}' = \{\{0, 1\}, \{3, 4\}, \{1, 2\}\}$ n'est pas une partition de B.

2.2 Applications

2.2.1 Notion d'application

Définition 2.2.1 *On appelle application d'un ensemble* A *dans un ensemble* B, *toute correspondance* f, *qui associe à chaque élément* x *de* A *un et un seul élément* y *de* B.

** On dit que* A *est l'ensemble de départ ou la source et que* B *est l'ensemble d'arrivée ou le but.*
** L'élément* y *associé à* x *par* f *s'appelle l'image par* f *de* x *et se note souvent* $f(x)$ *(C.à.d :* $y = f(x)$*).*

Remarque 2.2.1 *R1) Si* $y = f(x)$, *alors* x *s'appelle antécédent par* f *de* y
R2) Une image y *peut avoir deux antécédents, mais un antécédent ne peut jamais avoir deux images par une application.*
R3) Pour dire que f *est une application de* A *dans* B *et* y *est l'image par* f *de* x *on écrit :*

$$\begin{array}{c} f : A \to B \\ x \mapsto y \end{array}$$

Exemples
1) La correspondance f qui associe à l'entier n l'entier naturel n^2 est une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$, donc on peut écrire $f(n) = n^2$ et on a, par exemple, $f(1) = 1,\ f(-2) = 4$

2) La correspondance h qui associe au réel x le réel $\frac{1}{x-1}$ n'est pas une application, car 1 n'a pas d'image par h.

3) La correspondance qui associe à chaque mois le nombre possible de jours du mois n'est pas une application de l'ensemble M des mois dans $\mathbb{N}$, car elle associe à *février* les deux éléments 28 et 29.

4) La correspondance $Id_A : A \to A$ qui associe à l'élément x l'élément x lui même est une application particulière appelée application identique de A. On écrit $Id_A(x) = x$.

2.2.2 Graphe, Image directe et Image réciproque d'un ensemble

Soit f une application de A dans B.
1) On appelle graphe de f l'ensemble -noté G_f - défini par $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$

2) Si $A_0 \subset A$, on appelle image directe de A_0 l'ensemble -noté $f(A_0)$- défini par

$$f(A_0) = \{f(x) : x \in A_0\}$$

L'ensemble $f(A)$ est appelé image de f et est noté Imf. (c'est le cas $A_0 = A$)

3) Si $B_0 \subset B$, on appelle image réciproque de B_0 l'ensemble -noté $f^{-1}(B_0)$ - défini par

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}$$

Remarque 2.2.2 *$G_f \subset A \times B$, $f(A_0) \subset B$ et $f^{-1}(B_0) \subset A$*

Exemples
1) Soit l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n^2$, on a
$G_f = \{(n, n^2) \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$,
$f(\{-3, -1, 0, 3, 5\}) = \{0, 1, 9, 25\}$,
$f^{-1}(\{4, 5, 6\}) = \{-2, 2\}$.

2) Soit l'application $g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{x-1}$, on a
$G_g = \left\{\left(x, \frac{1}{x-1}\right) : \ x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\right\}$,
$g([-2, 1[) = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$,
$g^{-1}([2, 4]) = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

Propriétés *Soient $f : A \to B$ une application ; A_1, A_2 des parties de A et B_1, B_2 des parties de B. On a les propriétés suivantes :*
1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
4) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

2.2.3 Représentations des applications

La représentation d'une application $f : A \longrightarrow B$ dépend de la nature des ensembles A et B. Les représentations les plus utilisées sont les suivantes

1) Représentation d'une application au moyen d'une formule.

Exemple
Soit l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) = n^2$.

2) Représentation d'une application au moyen d'une table de valeurs *(*utile dans le cas où A est fini*).*

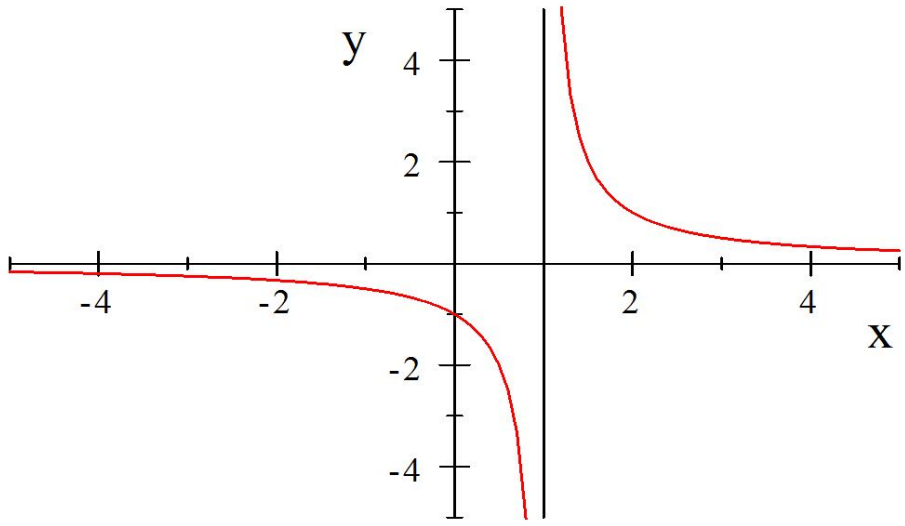
Exemple
Soit l'application $g_1 : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$ telle que :

n	-2	-1	0	1	2	3
$g_1(n)$	4	1	0	1	4	9

.

3) **Représentation d'une application au moyen d'un graphe**

Exemple ,
Soit $g_2 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ l'application donnée par le graphe suivant :



2.2.4 Egalité des applications

Deux applications $f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ *et* $f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$ *sont égales, si* $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ *et* $\forall\ x \in A_1,\ f_1(x) = f_2(x)$.
On écrit dans ce cas $f_1 = f_2$.

Exemple
1) Les applications f et g définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ par $f(n) = \cos(\pi n)$ et $g(n) = (-1)^n$ sont égales et on peut écrire $f = g$.

2.2.5 Composition des applications

Soient $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ *deux applications.*
La composée des applications f *puis* g *est l'application notée* $g \circ f$ *et définie par :*

$$g \circ f : A \longrightarrow C \text{ et } \forall x \in A,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemples
1) Soient les applications $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ et $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par $f(n) = n + (-1)^n$ et $g(n) = n^2$.
La composée de f puis g est la fonction $g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{Z},\ g \circ f(n) = (n + (-1)^n)^2$.

2) Soient f_1 et f_2 les applications données par les tables suivantes

n	1	2	3	4	5	6
$f_1(n)$	5	1	3	1	4	4

n	1	2	3	4	5	6
$f_2(n)$	1	3	1	6	4	2

,

alors les applications $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$ sont données par les tables suivantes

n	1	2	3	4	5	6
$f_1 \circ f_2(n)$	5	3	5	4	1	1

n	1	2	3	4	5	6
$f_2 \circ f_1(n)$	4	1	1	1	6	6

Il est clair que $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

3) Soient f et g les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ données par $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, alors
$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = \frac{f(x)}{(f(x))^2+1} = \frac{3x-2}{(3x-2)^2+1}$

Remarque 2.2.3 *1) Si* $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ *et* $h : C \longrightarrow D$ *trois applications, alors* $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

2) Si $f : A \longrightarrow B$ *est une application, alors* $f \circ Id_A = f = Id_B \circ f$.

2.2.6 Applications injectives, surjectives, bijectives et applications réciproques

Définition 2.2.2 *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.*
On dit que f est injective, si elle n'associe pas la même image à des éléments différents. C.à.d : (f *est injective*) $\Leftrightarrow (\forall\ (x, x') \in A \times A,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

Exemples
1) L'application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = 3x - 1$ est injective.
En effet : Soient $(x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} h(x) = h(x') &\Rightarrow 3x - 1 = 3x' - 1 \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$
d'où h est injective.

2) Soit l' application f_1 donnée par la table de valeurs suivante

n	1	2	3	4	5	6
$f_1(n)$	5	1	3	1	4	4

f_1 n'est pas injective, car $f_1(2) = f_1(4)$ et $2 \neq 4$.

3) L'application $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = n^2$ n'est pas injective.
En effet : Soient $(n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on a
$$\begin{aligned} g(n) = g(n') &\Rightarrow n^2 = n'^2 \\ &\Rightarrow (n = n') \vee (n = -n')\ . \end{aligned}$$
On a, par exemple, $g(2) = g(-2)$ et $2 \neq -2$, d'où g n'est pas injective.

4) Soit l'application $g_2 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $g_2(x) = \frac{1}{x-1}$.
En effet : Soient $(x, x') \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \times \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a
$$\begin{aligned} g_2(x) = g_2(x') &\Rightarrow \tfrac{1}{x-1} = \tfrac{1}{x'-1} \\ &\Rightarrow x - 1 = x' - 1\ , \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$
d'où g_2 est injective.

Définition 2.2.3 *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.*
On dit que f est surjective, si tout élément de B possède au moins un antécédent de A.
C.à.d : (f *est surjective*) $\Leftrightarrow (\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x))$

Exemples
1) Soit l' application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = 3x - 1$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Existe t-il un $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = h(x)$? On a
$$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow y = 3x - 1 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{y+1}{3} = x \end{aligned}$$
Il est clair que $x = \frac{y+1}{3}$ existe dans $\mathbb{R}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc h est surjective.

2) L'application $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = n^2$.
Soit $m \in \mathbb{N}$. Existe t-il un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $m = g(n)$? On a

$m = g(n) \Leftrightarrow m = n^2$
Pour $m = 5$ on ne peut pas trouver $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = 5$. D'où g n'est pas surjective.

3) Soit l'application $g_2 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $g_2(x) = \frac{1}{x-1}$.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Existe t-il un $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ tel que $y = g_2(x)$? On a
$y = g_2(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x-1}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{y} + 1$ si $y \neq 0$
On remarque que $y = 0 \in \mathbb{R}$ et il n'a pas d'antécédent $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. D'où g_2 n'est pas surjective.

Définition 2.2.4 *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application.*
On dit que f est bijective, si f est injective et surjective.

Exemples
1) L'application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = 3x - 1$ est bijective d'après ce qui précède.

2) L'application $g_2 : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $g_2(x) = \frac{1}{x-1}$ n'est pas bijective, car elle n'est pas surjective malgrès qu'elle est injective.

Définition 2.2.5 *Soit $f : A \longrightarrow B$ une application bijective. On appelle application réciproque de f l'application -notée f^{-1} - définie par : $f^{-1} : B \longrightarrow A$ et $f^{-1}(y) = x$ où x est l'antécédent par f de y (C.à.d $f(x) = y$).*

Exemple
L'application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(x) = 3x - 1$ est bijective et son application réciproque est $h^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$.

Remarque 2.2.4 *1) Si $f : A \longrightarrow B$ est une application bijective, alors $f^{-1} : B \longrightarrow A$ est une application bijective, de plus $(f^{-1})^{-1} = f$, $f \circ f^{-1} = Id_B$ et $f^{-1} \circ f = Id_A$.*

2.3 Exercices du chapitre 2

Exercice 2.1 *Soient A, B et C trois sous ensembles d'un ensemble E.*

1) Montrer que : $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$
$A = B \Leftrightarrow C_E A = C_E B$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$

2) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application.

Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
$A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

A quelle condition sur f*, on a :* $A = f^{-1}(f(A))$.

Exercice 2.2 *Soient* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{|x|-1} \end{array}$ *et* $g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$
1) f *et* g *sont-elles injectives ? Sont-elles surjectives ?*
2) Déterminer f^{-1} *et* g^{-1} *si elles existent.*
3) Déterminer $f([2,4])$, $f([-1,2])$, $f(\mathbb{R}\backslash\{-1,1\})$, $f^{-1}(\{-1,1\})$ *et* $f^{-1}([-1,1[)$

Exercice 2.3 *Soient* $f : E \longrightarrow F$ *et* $g : F \longrightarrow G$ *deux applications. Montrer que :*
1) (f *injective et* g *injective)*$\Rightarrow$*(*$g \circ f$ *injective).*
2) (f *surjective et* g *surjective)*$\Rightarrow$*(*$g \circ f$ *surjective).*
3) ($g \circ f$ *surjective)*$\Rightarrow$*(*g *surjective).*
4) ($g \circ f$ *injective)*$\Rightarrow$*(*f *injective)*

Chapitre 3

Relations binaires sur un ensemble

3.1 Notion de relation binaire

On appelle relation d'un ensemble A vers un ensemble B toute correspondance $\mathcal{R}$, qui lie des éléments de A à des éléments de B.

** On dit que A est l'ensemble de départ et B est l'ensemble d'arrivée de la relation $\mathcal{R}$.*
** Si x est lié à y par la relation $\mathcal{R}$, on dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y, ou (x, y) vérifie la relation $\mathcal{R}$ et on écrit : $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x, y)$, sinon on écrit : $x\not\mathcal{R}y$ ou $\not\mathcal{R}(x, y)$.*

* *Une relation de A vers A est dite relation sur A.*

Exemples

1) La correspondance $\mathcal{R}$ qui lie les entiers à leurs multiples est une relation sur $\mathbb{Z}$, qui est appelée relation de divisibilité et notée $\mathcal{R}_d$.

On a, par exemple, $1\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

2) La correspondance $\mathcal{R}'$ qui lie les chiffres aux voyelles utilisées pour écrire le chiffre en toutes lettres est une relation de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ vers l'ensemble $\{a, e, i, o, u, y\}$

On a, par exemple, $0\mathcal{R}'e$, $0\mathcal{R}'o$, $0\not\mathcal{R}a$, $9\not\mathcal{R}y$, $6\mathcal{R}'i$ et $1\mathcal{R}'u$

3) La correspondance $\mathcal{S}$ qui lie les nombres réels ayant les mêmes carrés est une relation sur $\mathbb{R}$. On a, par exemple, $1\mathcal{S}1, 1\not\mathcal{S}3$ et $2\mathcal{S}(-2)$.

3.1.1 Graphe d'une relation

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble A vers un ensemble B.

1) Le graphe de $\mathcal{R}$ - noté $G_{\mathcal{R}}$ - est l'ensemble défini par :

$$G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in A \times B \ / \ x\mathcal{R}y\}$$

Exemples
1) Reprenons la relation $\mathcal{R}$ de l'exemple 1 précédent, alors : $G_{\mathcal{R}}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \ / \ x \text{ divise } y\}$.
Par exemple $(3,-21)\in G_{\mathcal{R}}$ et $(3,20)\notin G_{\mathcal{R}}$

2) Si on reprend la relation $\mathcal{R}'$ donnée par l'exemple 2 précédent, on aura :
$G_{\mathcal{R}'}=\{\,(0,e)\,,(0,o)\,,(1,u)\,,(2,e)\,,(2,u)\,,(3,o)\,,(3,i)\,,(4,u)\,,(4,a)\,,(4,e)\,,$
$(5,i)\,,(6,i)\,,(7,e)\,,(8,u)\,,(8,i)\,,(9,e)\,,(9,u)\}$

3) Pour l'exemple 3 précédent le graphe $G_{\mathcal{S}}$ est le suivant :
$G_{\mathcal{S}}=\{(x,-x)\,,(x,x) \ / \ x\in\mathbb{R}\}$

Remarque 3.1.1 *Une relation $\mathcal{R}$ est entièrement déterminée par son graphe, la raison pour laquelle, on identifie $\mathcal{R}$ à $G_{\mathcal{R}}$ et on dit qu'une relation de A vers B est une partie de $A\times B$. Alors $\mathcal{R}=\mathcal{R}' \Longleftrightarrow G_{\mathcal{R}}=G_{\mathcal{R}'}$.*

3.2 Relations sur un ensemble

Définition 3.2.1 *Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble A*
1) $\mathcal{R}$ est dite réflexive si $\forall\ x\in A : x\mathcal{R}x$.
2) $\mathcal{R}$ est dite symétrique si $\forall\ x,y\in A : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
3) $\mathcal{R}$ est dite antisymétrique si $\forall\ x,y\in A : (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x=y$.
4) $\mathcal{R}$ est dite transitive si $\forall\ x,y,z\in A : (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemples
1) Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par : $\forall x,y\in\mathbb{Z},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ divise y

* Soit $x\in\mathbb{Z}$, on a x divise x (même 0 divise 0).
donc $\forall\ x\in\mathbb{Z} : x\mathcal{R}x$, alors $\mathcal{R}$ est réflexive.

* Soit $x,y\in\mathbb{Z}$, on a $\begin{aligned} x\mathcal{R}y \ &\Rightarrow (x \text{ divise } y)\\ &\not\Rightarrow (y \text{ divise } x)\end{aligned}$
par exemple 1 divise 4 et 4 ne divise pas 1
C.à.d : $\exists\ x,y\in\mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \wedge \overline{y\mathcal{R}x}$, alors $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.

* Soit $x,y\in\mathbb{Z}$, on a $\begin{aligned}(x\mathcal{R}y\ )\wedge(\ y\mathcal{R}x) \ &\Rightarrow (x \text{ divise } y)\wedge(y \text{ divise } x)\\ &\not\Rightarrow (y=x)\end{aligned}$
par exemple (1 divise -1) et (-1 divise 1) et $1\neq -1$
C.à.d : $\exists\ x,y\in\mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \wedge x\neq y$, alors $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.

* Soit $x,y,z\in\mathbb{Z}$, on a $\begin{aligned}(x\mathcal{R}y\ )\wedge(\ y\mathcal{R}z) \ &\Rightarrow (x \text{ divise } y)\wedge(y \text{ divise } z)\\ &\Rightarrow (x \text{ divise } z)\\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z\end{aligned}$
Alors $\mathcal{R}$ est transitive.

2) La relation $\mathcal{S}$ donnée sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x,y\in\mathbb{R},\ x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x^2=y^2$

* Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 = x^2$
donc $\forall\ x \in \mathbb{R}\ :\ x\mathcal{S}x$, alors $\mathcal{S}$ est réflexive.

* Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\begin{aligned} x\mathcal{S}y &\Rightarrow x^2 = y^2 \\ &\Rightarrow y^2 = x^2 \\ &\Rightarrow y\mathcal{S}x \end{aligned}$
Alors $\mathcal{S}$ est symétrique.

* Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\begin{aligned} (x\mathcal{S}y\ ) \wedge (\ y\mathcal{S}x) &\Rightarrow (x^2 = y^2) \wedge (y^2 = x^2) \\ &\not\Rightarrow (y = x) \end{aligned}$
par exemple $(-2)^2 = 2^2$ et $2^2 = (-2)^2$et $(-2) \neq 2$.
C.à.d : $\exists\ x, y \in \mathbb{R}\ :\ x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}x \wedge x \neq y$, alors $\mathcal{S}$ n'est pas antisymétrique.

* Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a $\begin{aligned} (x\mathcal{S}y\ ) \wedge (\ y\mathcal{S}z) &\Rightarrow (x^2 = y^2) \wedge (y^2 = z^2) \\ &\Rightarrow x^2 = z^2 \\ &\Rightarrow x\mathcal{S}z \end{aligned}$
Alors $\mathcal{S}$ est transitive.

3) Soit la relation $\mathcal{R}''$ définie sur $\mathbb{Z}$ par : $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a\mathcal{R}''b \Leftrightarrow (\ a - b$ est impair).

* Soit $a \in \mathbb{Z}$, on n'a pas ($a - a$ est impair).
par exemple $1 - 1$ n'est pas impair.
C.à.d : $\exists a \in \mathbb{Z} : \overline{a\mathcal{R}''a}$, alors $\mathcal{R}''$ n'est pas réflexive.

* Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, on a : $\begin{aligned} a\mathcal{R}''b &\Rightarrow a - b \text{ est impair} \\ &\Rightarrow b - a \text{ est impair} \\ &\Rightarrow b\mathcal{R}''a \end{aligned}$
Alors $\mathcal{R}''$ est symétrique.

* Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, on a $\begin{aligned} a\mathcal{R}''b \wedge b\mathcal{R}''a &\Rightarrow (a - b \text{ est impair}) \wedge (b - a \text{ est impair}) \\ &\not\Rightarrow (a = b) \end{aligned}$
par exemple $(6 - 1$ est impair) et ($1 - 6$ est impair) et $1 \neq 6$
C.à.d : $\exists a, b \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}''b \wedge b\mathcal{R}''a \wedge a \neq b$, alors $\mathcal{R}''$ n'est pas antisymétrique.

* Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on a $\begin{aligned} a\mathcal{R}''b \wedge b\mathcal{R}''c &\Rightarrow (a - b \text{ est impair}) \wedge (b - c \text{ est impair}) \\ &\not\Rightarrow a - c \text{ est impair} \end{aligned}$
par exemple $(7 - 4$ est impair) et ($4 - 1$ est impair) et $7 - 1$ n'est pas impair
C.à.d : $\exists a, b, c \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}''b \wedge b\mathcal{R}''c \wedge \overline{a\mathcal{R}''c}$, alors $\mathcal{R}''$ n'est pas transitive.

Remarque 3.2.1 *Une relation peut être non symétrique et non antisymétrique . (voir exemple 1)*

3.2.1 Relation d'équivalence, classes d'équivalence et ensemble quotient

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble A
1) $\mathcal{R}$ est dite relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

2) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, alors
2.1) Pour chaque $a \in A$ l'ensemble $\overset{\bullet}{a} = \{x \in A \ / \ x\mathcal{R}a\}$ est appelé classe d'équivalence de a modulo $\mathcal{R}$.
2.2) L'ensemble $A_{/\mathcal{R}} = \left\{\overset{\bullet}{a} \ / \ a \in A\right\}$ est appelé quotient de A par $\mathcal{R}$.

Exemples
1) La relation $\mathcal{S}$ donnée sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ est une relation d'équivalence. On a
$\overset{\bullet}{0} = \{0\}$ et pour $a \neq 0$, on a : $\overset{\bullet}{a} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x\mathcal{S}a\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 = a^2\}$
$= \{a, -a\}$
$\mathbb{R}_{/\mathcal{R}_3} = \{\{0\}\} \cup \{\{a, -a\} \ / \ a > 0\}$ qui peut être identifié à $\mathbb{R}^+$.

2) Soit $\widetilde{\mathcal{R}}$ la relation de congruence modulo n, $(n \in \mathbb{Z})$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :
$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x\widetilde{\mathcal{R}}y \Longleftrightarrow (n \text{ divise } x - y)$, est bien une relation d'équivalence.

Pour cette relation on a : $\overset{\bullet}{a} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ n \text{ divise } x - a\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x - a = n.k \ , k \in \mathbb{Z}\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x = nq + a, \ \ q \in \mathbb{Z}\}$ noté $n\mathbb{Z} + a$
Dans ce cas $\mathbb{Z}_{/\widetilde{\mathcal{R}}} = \{n\mathbb{Z} + a \ / \ a \in \mathbb{Z}\}$
$= \left\{\overset{\bullet}{0}, \overset{\bullet}{1}, ..., , \overset{\bullet}{n-1}\right\}$

Remarque 3.2.2 *La classe $\overset{\bullet}{a}$ est aussi noté $\bar{a}$, $[a]$ et $Cl\,(a)$.*

3.2.2 Relation d'ordre

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble A
1) $\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre, si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
2) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, on écrit souvent $\leq_{\mathcal{R}}$ au lieu de $\mathcal{R}$.
2.1) $\leq_{\mathcal{R}}$ est dite relation d'ordre total, si $\forall\ x, y \in A : (x \leq_{\mathcal{R}} y\ ) \vee (y \leq_{\mathcal{R}} x)$
2.2) $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel, si $\exists\ x, y \in A : (x \not\leq_{\mathcal{R}} y\ ) \wedge (y \not\leq_{\mathcal{R}} x\ )$

Remarque 3.2.3 *Deux éléments x et y sont dits comparables par $\leq_{\mathcal{R}}$, si $x \leq_{\mathcal{R}} y$ ou $y \leq_{\mathcal{R}} x$*

Exemples

1) La relation de divisibilité $\mathcal{R}_d$ sur $\mathbb{Z}$ n'est pas une relation d'ordre, (car elle n'est pas antisymétrique), mais elle devient une relation d'ordre partiel si on se restrient à $\mathbb{N}$ et on la note dans ce cas $\leq_d$.

En effet : Soit $a, b \in \mathbb{N}$ on a :

$$
\begin{aligned}
(a\mathcal{R}_d b) \wedge (b\mathcal{R}_d a) \quad &\Rightarrow \begin{cases} b = qa \ , \ q \in \mathbb{N} \\ et \\ a = q'b \ , \ q' \in \mathbb{N} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} b\,(1 - qq') = 0, \ q \in \mathbb{N} \\ et \\ a = q'b \ , \ q' \in \mathbb{N} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \vee q = q' = 1 \\ et \\ a = q'b \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \wedge a = 0 \\ ou \\ a = b \end{cases} \\
&\Rightarrow a = b
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{R}_d$ est antisymétrique sur $\mathbb{N}$. (Il est clair que $\mathcal{R}_d$ est refléxive et transitive).

$\mathcal{R}_d$ est un ordre partiel sur $\mathbb{N}$ car, par exemple, $(3 \not\leq_{\mathcal{R}_d} 7) \wedge (7 \not\leq_{\mathcal{R}_d} 3)$.

2) La façon avec laquelle sont rangés les mots dans un dictionnaire définie une relation d'ordre total sur l'ensemble des mots appelée **ordre lexicographique** et noté $\leq_{lex}$. On a, par exemple, *algèbre* $\leq_{lex}$ *analyse.*

3.3 Exercices du chapitre 3

Exercice 3.1 *Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\forall n, n' \in \mathbb{N} : n\mathcal{R}n' \Longleftrightarrow n \ divise \ 2n'$$

Etudiez la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$.

Exercice 3.2 *Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d' équivalence.

2) Déterminer $\overset{\bullet}{0}, \widehat{0.3}, \overset{\bullet}{1}, \widehat{1.3}$

Exercice 3.3 *Soit $\mathcal{R}'$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y = (x - y)^2$$

1) Montrer que $\mathcal{R}'$ est une relation d' équivalence

2) Déterminer la classe d'équivalence $\overset{\bullet}{x}$ de x et card $\left(\overset{\bullet}{x}\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) En déduire que $\mathcal{R}'$ n'est pas une relation d'ordre.

(card $\left(\overset{\bullet}{x}\right)$ *est le nombre des éléments de* $\overset{\bullet}{x}$*)*

Exercice 3.4 *Soit* $\mathcal{S}$ *la relation définie sur* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *par :*

$$\forall (n,p), (n',p') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (n,p)\, \mathcal{S}\, (n',p') \Longleftrightarrow (n \leq n' \wedge p \leq p')$$

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.
2) L'ordre est-il total ?

Exercice 3.5 *Soit* $\mathcal{S}$ *la relation définie sur* $E = \{1,2,3,0\}$ *par son graphe comme suit :* $G_{\mathcal{S}} = \{(1,1,), (1,3), (1,0), (1,2), (3,3), (0,0), (2,3), (2,0), , (2,2)\}$
$\mathcal{S}$ *est-elle-une relation d'équivalence ? Est-elle-une relation d'ordre ?.*

Chapitre 4

Quelques structures algébriques

4.1 Loi de composition intrene

Définition 4.1.1 *On appelle loi de composition interne (ou opération binaire) sur un ensemble non vide E, toute application $*$ de $E \times E$ dans E.*
 # L'image $*(x, y)$ est souvent notée $x * y$.

C.à. d :
$$\begin{pmatrix} * \text{ est une loi de} \\ \text{composition interne sur } E \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x, y \in E, x * y \in E \\ \forall x, y, x', y' \in E, (x = x' \text{ et } y = y') \Rightarrow x * y = x' * y' \end{cases}$$

Exemples
1) On sait que : $\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y \in \mathbb{N}$ et $x \cdot y \in \mathbb{N}$
et $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{N}, (x = x' \text{ et } y = y') \Rightarrow (x + y = x' + y' \text{ et } x \cdot y = x' \cdot y')$
Alors, l'addition usuelle "$+$" et la multiplication usuelle "$\cdot$" sont des lois de composition internes sur $\mathbb{N}$.

Il est clair que l'addition usuelle "$+$" et la multiplication usuelle "$\cdot$" sont des lois de composition internes sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

2) La soustraction usuelle "$-$" est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{N}$.

3) L'addition usuelle "$+$" sur l'ensemble $B = \{0, 1\}$ n'est pas une loi de composition interne. En effet :

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$+(x, y)$	0	1	1	$2 \notin B$

La multiplication usuelle "$\cdot$" sur l'ensemble $B = \{0, 1\}$ est une loi de composition interne. En effet :

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$\cdot(x, y)$	0	0	0	1

4) Le produit scalaire $\diamond : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$ n'est

pas une loi de composition interne.

5) La composition $\circ$ est une loi de composition interne sur l'ensemble $A(E,E)$ des applications de E dans E. En effet : Si $f : E \to E$ et $g : E \to E$ sont deux applications alors, $f \circ g : E \to E$ est une application.

6) L'intersection $\cap$ est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.

Définition 4.1.2 *Soit $*$ une loi de composition interne sur un ensemble non vide E. Alors :*

1) La loi $*$ est dite associative, si $\forall x, y, z \in E, (x * y) * z = x * (y * z)$
2) La loi $*$ admet un élément neutre si $\exists e \in E, \forall x \in E, (x * e = x) \wedge (e * x = x)$
L'élément e (s'il existe) est appelé élément neutre de $*$.
3) Dans le cas où $*$ admet un élément neutre e, on dit que tout élément de E est inversible (ou symétrisable) par rapport à $*$, si $\forall x \in E, \exists x' \in E, (x * x' = e) \wedge (x' * x = e)$

L'élément x' (s'il existe) est appelé inverse (ou symétrique) de x et est noté x^{-1}.

4) La loi $*$ est dite commutative, si $\forall x, y \in E, x * y = y * x$

Remarque 4.1.1
1) La disposition des parenthèses est inutile si la loi $*$ est associative et on peut écrire $x * y * z$ au lieu de $(x * y) * z$ et $x * (y * z)$
2) Si x^{-1} existe, alors $(x^{-1})^{-1} = x$.

Exemples
1) On sait que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x + (y + z) = (x + y) + z$, donc l'addition usuelle "+" est associative dans $\mathbb{R}$.

$\exists e = 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x + 0 = x) \wedge (0 + x = x)$, donc 0 est l'élément neutre de "+" dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' = -x \in \mathbb{R}, (x + (-x) = 0) \wedge ((-x) + x = 0)$, donc tout élément de $\mathbb{R}$ est inversible par rapport à "+".

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$, donc l'addition usuelle "+" est commutative dans $\mathbb{R}$.

2) On sait que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, donc la multiplication usuelle "$\cdot$" est associative dans $\mathbb{R}$.

$\exists e = 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \cdot 1 = x) \wedge (1 \cdot x = x)$, donc 1 est l'élément neutre de "$\cdot$" dans $\mathbb{R}$.

Pour $x = 0$ on ne peut pas trouver $x' \in \mathbb{R}$ tel que $0 \cdot x' = 1$; donc $x = 0$ n'est pas inversible par rapport à la multiplication usuelle "$\cdot$" :
C.à.d : $\exists x = 0 \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R}, (x \cdot x' \neq 1) \vee (x' \cdot x \neq 1)$, donc les éléments de $\mathbb{R}$ ne sont pas tous inversibles par rapport à "$\cdot$".

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x$, donc la multiplication usuelle "$\cdot$" est commutative dans $\mathbb{R}$.

3) Etudions l'opération $\intercal$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $n \intercal m = -n - m$ pour $n, m \in \mathbb{Z}$..

Soient $n, m, s \in \mathbb{Z}$..

$(n \intercal m) \intercal s = (-n - m) \intercal s = n + m - s$
$n \intercal (m \intercal s) = n \intercal (-m - s) = -n + m + s$
On a, par exemple, $(1 \intercal 2) \intercal 3 = (-1 - 2) \intercal 3 = 3 - 3 = 0$
et $1 \intercal (2 \intercal 3) = 1 \intercal (-2 - 3) = -1 + 5 = 4 \neq (1 \intercal 2) \intercal 3$;
donc $\intercal$ n'est pas associative dans $\mathbb{Z}$.

Supposons e est l'élément neutre de l'opération $\intercal$ dans $\mathbb{Z}$.
C.à.d $\forall n \in \mathbb{Z},\ n \intercal e = n \wedge e \intercal n = n$.
$n \intercal e = n \Leftrightarrow -n - e = n \Leftrightarrow e = -2n$
donc $\intercal$ n'admet pas d'élément neutre, car l'élément neutre doit être le même pour tous les $n \in \mathbb{Z}$.

On ne peut pas chercher l'inverse d'un élément, car $\intercal$ n'admet pas d'élément neutre

$n \intercal m = -n - m = -m - n = m \intercal n$, donc $\intercal$ est commutative dans $\mathbb{Z}$.

4.2 Structure de groupe

Définition 4.2.1 *Soit $*$ une loi de composition interne sur un ensemble non vide G. On dit que $(G, *)$ est un groupe si $*$ est associative, admet un élément neutre e et tout élément de G est inversible par rapport à $*$.*

Si en plus, $*$ est commutative, le groupe est dit commutatif ou abélien.

Exemples
1) Les structures $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$,$(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes commutatifs.

2) Les structures $(\mathbb{Q}, \cdot)$,$(\mathbb{R}, \cdot)$ et $(\mathbb{C}, \cdot)$ ne sont pas des groupes (car 0 n'a pas d'inverse pour la multiplication usuelle "$\cdot$")

3) Les structures $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$,$(\mathbb{R}^*, \cdot)$ et $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sont des groupes commutatifs.

4) Les structures $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ne sont pas des groupes.

5) $(\mathbb{Z}, \intercal)$ telle que $n \intercal m = -n - m$, n'est pas un groupe.

4.2.1 Sous groupe

Définition 4.2.2 *Soit $(G, *)$ un groupe et H une partie de G.*
On dit $(H, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$ si $(H, *)$ est lui même un groupe pour la loi $*$ restreinte à H.

Proposition 4.2.1 *Soit H une partie d'un groupe $(G, *)$ d'élément neutre e. Alors,*
$((H, *)$ est un sous groupe de $(G, *))$ $\Leftrightarrow \begin{cases} e \in H \\ \forall x, y \in H : x * y^{-1} \in H \end{cases}$

Preuve : a) Supposons que $(H,*)$ est un sous groupe de $(G,*)$ et montrons que $\begin{cases} e \in H \\ \forall x,y \in H : x * y^{-1} \in H \end{cases}$
Soit x,$y \in H$,
on a x,$y^{-1} \in H$ (car tout élément de H admet un inverse par rapport à $*$ dans H).
et $x * y^{-1} \in H$ (car $*$ est une loi de composition interne dans H).
Donc $\forall x$,$y \in H : x * y^{-1} \in H$.
Mais $H \neq \varnothing$, donc $\exists x_0 \in G : x_0 \in H$, d'où $x_0 * x_0^{-1} \in H$. C.à.d $e \in H$.

b) Supposons que $\begin{cases} e \in H \\ \forall x,y \in H : x * y^{-1} \in H \end{cases}$ et montrons que $(H,*)$ est un sous groupe de $(G,*)$.
On a $H \neq \varnothing$ car $e \in H$,
et comme $\forall x \in G : x * e = x = e * x$. En particulier $\forall x \in H : x * e = x = e * x$
C.à.d : e est l'élément neutre de $*$ dans H.

Soit $y \in H$ et $x = e \in H$, alors $x * y^{-1} = e * y^{-1} = y^{-1} \in H$, donc $\forall y \in H : y^{-1} \in H$.
C.à.d : Tout élément de H admet un inverse par rapport à $*$ dans H.

Soit x,$y \in H$, alors $x, y^{-1} \in H$ d'où $x*(y^{-1})^{-1} = x*y \in H$; donc $\forall x,y \in H : x * y \in H$.
C.à.d : $*$ est une loi de composition interne dans H.

Soit $x,y,z \in H$, alors $x,y,z \in G$, d'où $(x * y) * z = x * (y * z)$, donc
$\forall x,y,z \in H : (x * y) * z = x * (y * z)$. C.à.d : $*$ est une loi associative dans H.
Ainsi $(H,*)$ vérifie toutes les conditions d'un groupe, donc c'est bien un sous groupe de $(G,*)$.

Exemples
1) $\mathbb{Z}$ est une partie de $\mathbb{Q}$ et $(\mathbb{Q},+)$ est un groupe.
On a $\begin{cases} 0 \in \mathbb{Z} \\ \forall x,y \in \mathbb{Z} : x + (-y) \in \mathbb{Z} \end{cases}$, alors $(\mathbb{Z},+)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Q},+)$.
De même $(\mathbb{Q},+)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ et de $(\mathbb{C},+)$.

2) Si $(G,*)$ est un groupe d'élément neutre e.
On a $\begin{cases} e \in G \\ \forall x,y \in G : x * y^{-1} \in G \end{cases}$, alors $(G,*)$ est un sous groupe de $(G,*)$.
On a $\begin{cases} e \in \{e\} \\ \forall x,y \in \{e\} : x * y^{-1} \in \{e\} \end{cases}$, alors $(\{e\},*)$ est un sous groupe de $(G,*)$.
$(\{e\},*)$ et $(G,*)$ sont appelés sous groupes triviaux de $(G,*)$.

3) Le cercle unité $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ est une partie de $\mathbb{C}^*$ et $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ est un groupe.
On a $|1| = 1$ donc $1 \in S^1$.
Soit $z,z' \in S^1$, on a $\left|z \cdot (z')^{-1}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = 1$, donc $z \cdot (z')^{-1} \in S^1$
Ainsi, $\begin{cases} 1 \in S^1 \\ \forall z,z' \in S^1 : z \cdot (z')^{-1} \in S^1 \end{cases}$, alors $(S^1,\cdot)$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

4) $\mathbb{R}^{*+}$ est une partie de $\mathbb{R}^*$ et $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ est un groupe.
On a $1 \in \mathbb{R}^{*+}$.
Soit $x, x' \in \mathbb{R}^{*+}$, on a $x \cdot (x')^{-1} = \frac{x}{x'} > 0$, donc $x \cdot (x')^{-1} \in \mathbb{R}^{*+}$
Ainsi, $\begin{cases} 1 \in \mathbb{R}^{*+} \\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^{*+} : x \cdot (x')^{-1} \in \mathbb{R}^{*+} \end{cases}$, alors $(\mathbb{R}^{*+}, \cdot)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

4.3 Homomorphismes de groupes

Définition 4.3.1 *On appelle homomorphisme du groupe $(G, *)$ dans le groupe $(G', *')$, toute application $f : G \to G'$ telle que :*

$$\forall x, y \in G : f(x * y) = f(x) *' f(y)$$

Exemples
1) Soit l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$ telle que $h(x) = e^x$ et soit $x, y \in \mathbb{R}$.
On a $h(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = h(x) \cdot h(y)$.
Alors h est un homorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^{*+}, \cdot)$

2) Soit l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ telle que $f(z) = |z|$ et soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$.
On a $f(z \cdot z') = |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| = f(z) \cdot f(z')$.
Alors f est un homorphisme du groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

Théorème 4.3.1 *Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme du groupe $(G, *)$ dans le groupe $(G', *')$ d'éléments neutres respectifs e et e' , alors*
1) $f(e) = e'$.
2) $\forall x \in G, (f(x))^{-1} = f(x^{-1})$.

Preuve :
1) On a $f(e) = f(e) *' e' = f(e) *' \left[f(x) *' (f(x))^{-1}\right] = [f(e) *' f(x)] *' (f(x))^{-1}$
$= f(e * x) *' (f(x))^{-1} = f(x) *' (f(x))^{-1} = e'$
2) Soit $x \in G$, on a
$f(x^{-1}) *' f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e) = e'$
et $f(x) *' f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$.
Alors $(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$.

4.4 Structure d'Anneau

Définition 4.4.1 *Soit A un ensemble non vide muni de deux lois de composition interne $*_1$ et $*_2$. On dit que $(A, *_1, *_2)$ est un anneau si*
1) $(A, *_1)$ est un groupe commutatif.
2) La loi $*_2$ est associative.

3) $\forall x, y, z \in A : \begin{cases} et & x *_2 (y *_1 z) = (x *_2 y) *_1 (x *_2 z) \\ & (y *_1 z) *_2 x = (y *_2 x) *_1 (z *_2 x) \end{cases}$.
(Cette condition est appelée distributivité de la loi $*_2$ *par rapport à la loi* $*_1$*).*

 # Si la loi $*_2$ *admet un élément neutre, on l'appelle unité et on dit que l'anneau est unitaire.*
 # Si la loi $*_2$ *est commutative, on dit que l'anneau est commutatif.*

Exemples
1) On sait que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif, et on sait que la multiplication usuelle "$\cdot$" est associative et distributive par rapport à l'addition usuelle "$+$" dans $\mathbb{Z}$. Alors $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau.

De plus, la deuxième loi "$\cdot$" est commutative et adment 1 comme élément neutre, donc $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif et unitaire.

De même, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sont des anneaux unitaires, commutatifs.

Remarque 4.4.1
Les lois d'un anneau $(A, *_1, *_2)$ *sont souvent notées* $+_A$ *et* $\cdot_A$ *au lieu de* $*_1$ *et* $*_2$ *et pour cette raison on note l'élément neutre de* $+_A$ *par* 0_A *et l'inverse de* x *par rapport à* $+_A$ *par* $-x$.
Aussi, on note l'élément neutre de $\cdot_A$ *(s'il existe) par* 1_A *et l'inverse de* x *par rapport à* $\cdot_A$ *(s'il existe) par* x^{-1}.

4.4.1 Quelques règles de calcul

Proposition 4.4.1 *Soit* $(A, +_A, \cdot_A)$ *un anneau d'élément neutre* 0_A. *Alors :*
1) $\forall x \in A : x \cdot_A 0_A = 0_A = 0_A \cdot_A x$
2) $\forall x, y \in A : (-x) \cdot_A y = -(x \cdot_A y) = x \cdot_A (-y)$
3) $\forall x, y \in A : (-x) \cdot_A (-y) = x \cdot_A y$
4) Si l'anneau admet un élément unité 1_A, *alors* $\forall x \in A : -x = (-1_A) \cdot_A x$.

Preuve
1) Soit $x \in A$, on a

$$\begin{aligned} x \cdot_A 0_A &= x \cdot_A 0_A +_A 0_A \\ &= x \cdot_A 0_A +_A [x \cdot_A 0_A +_A (-(x \cdot_A 0_A))], && \text{car } -x \cdot_A 0_A \text{ est le symétrique de } x \cdot_A 0_A \\ & && \text{par rapport à } +_A. \\ &= x \cdot_A (0_A +_A 0_A) +_A (-(x \cdot_A 0_A)), && \text{car } \cdot_A \text{ est distributive par rapport à } +_A \\ &= x \cdot_A 0_A +_A (-(x \cdot_A 0_A)) \\ &= 0_A \end{aligned}$$

De la même façon on montre que $-(x \cdot_A y) = x \cdot_A (-y)$

2) Soit $x, y \in A$, on a

$$\begin{aligned} x \cdot_A y +_A ((-x) \cdot_A y) &= (x +_A (-x)) \cdot_A y, && \text{car } \cdot_A \text{ est distributive par rapport à } +_A \\ &= 0_A \cdot_A y \\ &= 0_A, && \text{d'après 1).} \end{aligned}$$

Alors $(-x) \cdot_A y = -(x \cdot_A y)$.

De la même façon on montre que $0_A \cdot_A x = 0_A$.

3) Soient $x, y \in A$, on a

$$\begin{aligned} (-x) \cdot_A (-y) &= -(x \cdot_A (-y)), && \text{d'après 2)} \\ &= -(-(x \cdot_A y)), && \text{d'après 2)} \\ &= x \cdot_A y \end{aligned}$$

4.4.2 Anneau intègre

Définition 4.4.2 *On dit qu'un anneau $(A, +_A, \cdot_A)$ est intègre, si*

$$\forall x, y \in A : (\ x \cdot_A y = 0_A \Rightarrow\ \ (x = 0_A \vee y = 0_A))$$

Exemple
Les structures $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sont des anneaux intègres.

4.5 Structure de corps

Définition 4.5.1 *Soit $(K, +_K, \cdot_K)$ un anneau unitaire.*
On dit que $(K, +_K, \cdot_K)$ est un corps si
1) $1_K \neq 0_K$
2) Tout élément de $K - \{0_K\}$ est inversible par rapport à la loi $\cdot_K$.
 # Le corps est dit commutatif si la loi $\cdot_K$ est commutative.

Remarque 4.5.1 *1) Si $(K, +_K, \cdot_K)$ est un corps, alors $(K^*, \cdot_K)$ est un groupe (où $K^* = K - \{0_K\}$).*
2) Tout corps K est un anneau intègre.
En effet : Soit $a, b \in K$, on a

$$\begin{aligned} a \cdot_K b = 0_K &\Rightarrow (a \cdot_K b = 0_K\ \wedge (a = 0_K \vee a \neq 0_K)) \\ &\Rightarrow ((a \cdot_K b = 0_K\ \wedge a = 0_K) \vee (a \cdot_K b = 0_K\ \wedge a \neq 0_K)) \\ &\Rightarrow ((a = 0_K) \vee (a^{-1} \cdot_K a \cdot_K b = a^{-1} \cdot_K 0_K)), \text{ car } a \neq 0_K \text{ assure que } a^{-1} \text{ existe} \\ &\Rightarrow ((a = 0_K) \vee (b = 0_K)) \end{aligned}$$

Exemples
1) Les structures $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sont des corps commutatifs.

2) La structure $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ n'est pas un corps, car les seuls éléments inversibles dans $\mathbb{Z}^*$ par rapport à la multiplication usuelle $\cdot$ sont 1 et -1.

4.6 Exercices du chapitre 4

Exercice 4.1 *1) On munit $\mathbb{Z}$ par la loi de composition $*$ définie par :*
$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ : x * y = x + y + x^2 y$.
Montrer que $*$ est une loi interne ; puis étudier, pour cette loi, la commutativité, l'associativité, l'existence de l'élément neutre et l'existence du symétrique.
2) Même question pour la loi de composition Δ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 4.2 *On munit l'intervalle $]-1, 1[$ par la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.*
Montrer que $(]-1, 1[, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 4.3 *Sur $\mathbb{Q}$, on définit l'opération $\triangle$ par*
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \alpha \triangle \beta = (\alpha - 1)(\beta - 1) + 1$.
1) Montrer $(\mathbb{Q}, \triangle)$ n'est pas un groupe commutatif.
2) Trouver le plus grand ensemble $E \subset \mathbb{Q}$ pour lequel $(E, \triangle)$ soit un groupe commutatif.
3) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{Q}^*$ l'application définie par : $\forall \alpha \in E : f(\alpha) = \alpha - 1$.
Montrer que f est un homomorphisme du groupe $(E, \triangle)$ dans le groupe $(\mathbb{Q}^*, .)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $\alpha \in E$, posons $\alpha^{(n)} = \underbrace{\alpha \triangle \alpha \triangle ... \triangle \alpha}_{n\text{-}fois}$.
Déterminer une expression simple de $\alpha^{(n)}$, puis calculer $3^{(11)} - 3^{(5)}$.

Exercice 4.4 *Soit $Aff(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
$Aff(\mathbb{R}) = \left\{\varphi_{(a,b)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} : \varphi_{(a,b)}(x) = ax + b\right\}$
1) Montrer que $(Aff(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe non commutatif.
2) Montrer que l'ensemble $T(\mathbb{R}) = \left\{\varphi_{(1,b)} \ / b \in \mathbb{R}\right\}$ des translations de $\mathbb{R}$, est un sous groupe de $(Aff(\mathbb{R}), \circ)$.

Exercice 4.5 *Soient $(G, *)$ un groupe et $Z(G)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Montrer que $Z(G)$ est un sous groupe de G.*

Exercice 4.6 *Soient $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e, tel que pour tout $x \in G$: $x^3 = e$. Montrer que pour tous $x, y \in G$: $(x * y)^2 = y^2 * x^2$ et $x * y^2 * x = y * x^2 * y$.*
Noter que $x^2 = x * x$ et $x^3 = x * x * x$

Exercice 4.7 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble G muni d'une opération $*$. On dit que $\mathcal{R}$ est compatible avec la loi $*$ si,*
pour tous $x, y, a, b \in G$: $(x\mathcal{R}y$ et $a\mathcal{R}b) \Longrightarrow (x * a)\,\mathcal{R}\,(y * b)$.
On définit l'opération $\overset{\bullet}{*}$ sur $G_{/\mathcal{R}}$ par $\dot{x} \overset{\bullet}{*} \dot{y} = \widehat{x * y}$.
1) Montrer que si $(G, *)$ est un groupe, alors $\left(G_{/\mathcal{R}}, \overset{\bullet}{*}\right)$ est aussi un groupe.
2) Application : $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ et $\mathcal{R}_n$ la congruence modulo n.

Exercice 4.8 *Soient $*$ l'opération définie sur $\mathbb{R}$ donnée dans l'exercice 1 et la multiplication usuelle de $\mathbb{R}$. Etudier la distributivité de chaque loi par rapport à l'autre.*

Exercice 4.9 *Montrer que $\left(\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}, \overset{\bullet}{+}, \overset{\bullet}{\times}\right)$ est un anneau commutatif unitaire et qu'il s'agit d'un corps si p est premier. $(\forall \overset{\bullet}{x}, \overset{\bullet}{y} \in \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}} : \overset{\bullet}{x} \overset{\bullet}{+} \overset{\bullet}{y} = \widehat{\overset{\bullet}{x+y}}$ et $\overset{\bullet}{x} \overset{\bullet}{\times} \overset{\bullet}{y} = \widehat{\overset{\bullet}{x \times y}})$*

Exercice 4.10 *Soit $(A, +_{_A}, \cdot_{_A})$ un anneau vérifiant $x^2 = x$ pour tout $x \in A$. (On dit que x est idempotent et que A est un anneau de Boole)*
1) Montrer que $2x = 0_A$
2) Montrer que A est commutatif. En déduire la valeur de $(x \cdot_{_A} y) \cdot_{_A} (x +_{_A} y)$ Noter que $x^2 = x \cdot_{_A} x$ et $2x = x +_{_A} x$

Exercice 4.11 *Soit $(G, *)$ un groupe. Trouver une condition pour que l'application $f : G \to G$ telle que $f(x) = x * x$ soit un endomorphisme.*

Exercice 4.12 *Montrer que $(\mu_n, \times)$ est isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \overset{\bullet}{+}\right)$*
$\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est l'ensemble des racines $n-$ème complexes de l'unité 1

Exercice 4.13 *L'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ telle que $f(z) = |z|$*
1) Montrer que f est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

Exercice 4.14 *Montrer que le composé de deux homomorphismes de groupes est un homomorphisme de groupes.*

Chapitre 5

Le corps des réels et le corps des complexes

5.1 Le corps des nombres réels

Il existe des grandeurs x qui ne sont pas rationnelles (C.à.d : $x \notin \mathbb{Q}$). Par exemple la diagonale x d'un carré de côté 1 est telle que $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ (Théorème de Pythagore). Cette grandeur est notée $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (voir l'exemple de **??**).

Ainsi, on ne peut pas "tout mesurer" avec des nombres rationnels. C'est pourquoi on est amené à considérer un ensemble de nombres plus riches noté $\mathbb{R}$, dont tout élément α peut être approché par défaut et par excès par des nombres décimaux. C.à.d :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z} : \frac{n}{10^m} \leq \alpha < \frac{n+1}{10^m}$$

Exemples

1) $2012 \leq 2012 < 2013$; $\quad \frac{20120}{10} \leq 2012 < \frac{20121}{10}$; $\quad \frac{201200}{10^2} \leq 2201 < \frac{201201}{10^2}$;

.....; $\quad \frac{2012\times 10^m}{10^m} \leq 2012 < \frac{2012\times 10^m+1}{10^m}$

2) $0 \leq \frac{1}{3} < 1$; $\quad \frac{3}{10} \leq \frac{1}{3} < \frac{4}{10}$; $\quad \frac{33}{10^2} \leq 13 < \frac{34}{10^2}$;

.....; $\quad \frac{33333.....33}{10^m} \leq 2012 < \frac{33333.....34}{10^m}$

3) $1 \leq \sqrt{2} < 2$; $\quad \frac{14}{10} \leq \sqrt{2} < \frac{15}{10}$; $\quad \frac{141}{10^2} \leq \sqrt{2} < \frac{142}{10^2}$;

.....; $\quad \frac{1414213562}{10^9} \leq \sqrt{2} < \frac{1414213563}{10^9}$; .....

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ alors, $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de $10^m p$ par q permet d'écrire :
$10^m p = qk + r$, avec $k, r \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < q$.
mais $\quad 0 \leq r < q \quad \Longrightarrow qk \leq qk + r < q\,(k+1)$
$\Longrightarrow qk \leq 10^m p < q\,(k+1)$
$\Longrightarrow \frac{k}{10^m} \leq \alpha < \frac{k+1}{10^m}$.

Ainsi, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble des réels).

On note $\mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leq 0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$.

On admet dans ce cours que l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ vérifiant les propriétés suivantes :
(a) $\forall x,\ y \in \mathbb{R};\ x + y \in \mathbb{R}$ (L'addition $+$ est une loi interne dans $\mathbb{R}$).
(b) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R};\ x + (y + z) = (x + y) + z$ (L'addition $+$ est associtive dans $\mathbb{R}$)
(c) $\exists e_1 = 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\ ; (x + 0 = x) \wedge (x = 0 + x)$ (0 est l'élément neutre le la loi $+$ dans $\mathbb{R}$).
(d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists x' = -x \in \mathbb{R}$; $(x + (-x) = 0) \wedge ((-x) + x = 0)$, ($-x$ est l'inverse de x par rapport à la loi $+$ dans $\mathbb{R}$).
(e) $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$; $x + y = y + x$ ($+$ est commutative dans $\mathbb{R}$).

Ces propriétés se résument en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

(a') $\forall x,\ y \in \mathbb{R}, x \cdot y \in \mathbb{R}$. (La multiplication $\cdot$ est une loi interne dans $\mathbb{R}$).
(b') $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R},\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (La loi $\cdot$ est associtive dans $\mathbb{R}$)
(c') $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R},\ (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)) \wedge ((y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x))$ (La loi $\cdot$ est distributive par rapport à $+$ dans $\mathbb{R}$)
(d') $\exists e_2 = 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\ ; (x \cdot 1 = x) \wedge (x = 1 \cdot x)$, (1 est l'élément neutre de la loi $\cdot$ dans $\mathbb{R}$).
(e') $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\exists x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$; $\left(x \cdot (\frac{1}{x}) = 1\right) \wedge \left((\frac{1}{x}) \cdot x = 1\right)$, ($\frac{1}{x}$ est l'inverse de x par rapport à la loi $\cdot$ dans $\mathbb{R}$)
(f') $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$; $x \cdot y = y \cdot x$, (La loi $\cdot$ est commutative dans $\mathbb{R}$).

Ainsi, $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ est un corps commutatif.

On admet aussi que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :
(a") $\forall x,\ y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \vee (y \leq x)$ (La relation $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{R}$)
(b") $\forall a\ , b\ , x\ ,\ y \in \mathbb{R}$; $((a \leq b) \wedge (x \leq y)) \Longrightarrow (a + x \leq b + y)$, (compatibilité de la loi $+$ avec la relation $\leq$)
(c") $\forall x,\ y \in \mathbb{R}\ ; \forall a \in \mathbb{R}_+; (x \leq y) \Longrightarrow (a \cdot x \leq b \cdot y)$
(d") $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N} : x \leq n \cdot y$, (Propriété d'Archimède).

5.2 Le corps des nombres complexes

On définit l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (a_1, b_1); (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{cases}$$

Proposition 5.2.1 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *est un corps commutatif.*
Ce corps est appelé le corps des complexes et est noté $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Preuve : (Exercice)

Remarques :
En identifiant $(a_1, 0)$ à a_1, on peut dire que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, et en notant $(0, 1)$ par i on trouve $i^2 = (-1, 0)$ qui s'identifie à -1.

En effet : $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \approx -1$.
Forme algébrique d'un nombre complexe, Conjugaison et Module
Dans le corps $\mathbb{C}$ tout élément z s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

En effet : Soit $z = (a, b) \in \mathbb{C}$; alors :

$$\begin{aligned} z &= (a, b) = (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) \\ &= a + ib \end{aligned}$$

avec les identifications $(a, 0) \approx a$, $(b, 0) \approx b$ et la notation $i = (0, 1)$
Cette écriture est appelée la forme algébrique de z.
a est appelée la partie réelle de z et notée $Re(z)$, et b la partie imaginaire de z et notée $Im(z)$.
Le complexe $Re(z) - iIm(z)$ est appelé le conjugué de z et noté $\overline{z}$.
Le réel $\sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$ est appelé le module de z et noté $|z|$.

5.3 Exercices du chapitre 5

Exercice 5.1 *Soient sur $\mathbb{R}^2$ l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ définies par :*

$$\forall (a_1, b_1); (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{cases}$$

Vérifier que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un corps commutatif.
Ce corps est appelé le corps des complexes et est noté $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Chapitre 6

Anneau des polynômes

6.0.1 L'ensemble des polynômes à une indéterminée

Définition 6.0.1 *Soit $(A,+,.)$ un anneau unitaire et commutatif.*
On appelle polynôme à une indéterminée X et à coefficients dans A toutes écriture algébrique de la forme $a_0 + a_1X^1 + ... + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + ...$
où les $a_i \in A$ sont nuls sauf un nombre fini.
Si on note P ce polynôme, alors :
** Les a_i sont appelés les coefficients de P.*
** Le plus grand indice n vérifiant $a_n \neq 0$ (s'il existe) est appelé degré de P et noté* $\deg P$ *et dans ce cas a_nX^n est appelé terme dominant de P.*
** Si le terme dominant de P est $1X^n$ le polynôme P est dit unitaire.*
** Si tous les a_i sont nuls, P est appelé polynôme nul noté 0 et par convention* $\deg 0 = -\infty$
** Chaque élément a_0 de A est un polynôme, appelé polynôme constant.*
L'ensemble des polynômes à une indéterminée X à coefficients dans A est noté $A[X]$.

Remarque 6.0.1 *1) Pour un polynôme, on omet souvent les a_iX^i pour les a_i nuls et on l'écrit suivant les puissances décroissantes de X.*
2) On écrit souvent, X au lieu de X^1 et X^n au lieu de $1X^n$.
3) Soient $P = a_0 + a_1X^1 + ... + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + ...$
et $Q = b_0 + b_1X^1 + ... + b_{n-1}X^{n-1} + b_nX^n + ...$

$$(P = Q) \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N} : a_i = b_i).$$

Exemples
1) $P = X^n - 1$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) est un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$, c.à.d $P \in \mathbb{Z}[X]$.
Le terme dominant de P est X^n et ses coefficients sont $(-1, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, ...)$.
C.à.d : Tous les coefficients sont nuls sauf $a_0 = -1$, et $a_n = 1$.
2) $Q = 2X^3 - \sqrt{5}X$ est un polynôme non unitaire de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$,

c.à.d $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Le terme dominant de Q est $2X^3$ et ses coefficients sont $\left(0, -\sqrt{5}, 0, 2, 0, ..., 0, ...\right)$,
c.à.d : Tous les coefficients sont nuls sauf $a_1 = -\sqrt{5}$ et $a_3 = 2$.
3) $S = 4 + 2i$ est un polynôme non unitaire de degré 0 (polynôme constant) à coefficients dans $\mathbb{C}$, c.à.d $S \in \mathbb{C}[X]$.
Le terme dominant de S est $4 + 2i$ et ses coefficients sont $(4 + 2i, 0, ..., 0, ...)$;
c.à.d : Tous les coefficients sont nuls sauf $a_0 = 4 + 2i$.

6.0.2 Opérations sur l'ensemble $A[X]$

Définition 6.0.2 *Soient* $P = a_0 + a_1X^1 + ... + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + ...$
et $Q = b_0 + b_1X^1 + ... + b_{n-1}X^{n-1} + b_nX^n + ...$ *deux polynômes de* $A[X]$.
On définit la somme $P + Q$ *et le produit* $P.Q$ *par :*

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X^1 + ... + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{n-1} + (a_n + b_n)X^n + ...$$

$$P.Q = \left(\sum_{i+j=0} a_i.b_j\right) + \left(\sum_{i+j=1} a_i.b_j\right)X^1 + ... + \left(\sum_{i+j=n-1} a_i.b_j\right)X^{n-1} + \left(\sum_{i+j=n} a_i.b_j\right)X^n + ...$$

Remarque 6.0.2 *1)*

$$c_0 = \sum_{i+j=0} a_i.b_j = a_0.b_0 = \sum_{i=0}^{0} a_i.b_{0-i}$$

$$c_1 = \sum_{i+j=1} a_i.b_j = a_0.b_1 + a_1.b_0 = \sum_{i=0}^{1} a_i.b_{1-i}$$

.....

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i.b_j = a_0.b_n + a_1.b_{n-1} + ... + a_n.b_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i.b_{n-i}$$

.....

Pour énoncer la proposition suivante, on adopte la convention suivante :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n+(-\infty) = (-\infty)+n = -\infty$, $\quad -\infty < n$ et $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$.

Proposition 6.0.1 *Soient* P, $Q \in A[X]$, *alors*
$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ *et* $\deg(P.Q) \leq \deg P + \deg Q$
et si A *est un corps, alors* $\deg(P.Q) = \deg P + \deg Q$

Preuve : Posons $n = \deg P$, $m = \deg Q$,
$P = a_0 + a_1X^1 + ... + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X^1 + ... + b_{m-1}X^{m-1} + b_mX^m$
1^{er} cas) Si $P = 0$ ou $Q = 0$.
Par exemple si $P = 0$, alors $P + Q = Q$ et $P.Q = 0$. Ainsi,
$\deg(P + Q) = \deg Q = \max(-\infty, \deg Q) = \max(\deg P, \deg Q)$
$\deg(P.Q) = -\infty = -\infty + \deg Q = \deg P + \deg Q$
$2^{ème}$ cas) Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors :
2.1) Les coefficients de $P + Q$ sont tous nuls après le rang $k = \max(n, m)$,
donc $\deg(P + Q) \leq \max(n, m) = \max(\deg P, \deg Q)$,

2.2) Les coefficients $c_k = \sum_{i+j=k} a_i.b_j$ de $P.Q$ vérifient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$c_{(n+m)+k} = \sum_{i+j=n+m+k} a_i b_j = \underbrace{a_0 b_{n+m+k} + ... + a_n b_{m+k}}_{\text{dans ce terme tous les } b_j \text{ sont nuls}} + \underbrace{a_{n+1} b_{m+k-1} + ... + a_{n+m+k} b_0}_{\text{dans ce terme tous les } a_i \text{ sont nuls}}$$
$$= 0.$$

Ainsi, $\deg(P.Q) \leq n + m = \deg P + \deg Q$.

$$c_{n+m} = \sum_{i+j=n+m} a_i.b_j = \underbrace{a_0.b_{n+m} + ... + a_{n-1}.b_{m+1}}_{\text{dans ce terme tous les } b_j \text{ sont nuls}} + a_n.b_m + \underbrace{a_{n+1}.b_{m-1} + ... + a_{n+m}.b_0}_{\text{dans ce terme tous les } a_i \text{ sont nuls}}$$
$$= a_n.b_m.$$

Si A est un corps, alors $c_{n+m} = a_n.b_m \neq 0$ car $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.
D'où $\deg(P.Q) = n + m = \deg P + \deg Q$.

Exemple
1) Dans $\mathbb{Q}[X]$, soient les polynômes
$P = 3X^2 - 1$ C.à.d : $P = 3X^2 + 0X - 1$
et $Q = \frac{1}{2}X^3 + 4X$ C.à.d $Q = \frac{1}{2}X^3 + 0X^2 + 4X + 0$, alors

$$P + Q = \left(0 + \tfrac{1}{2}\right) X^3 + (3 + 0) X^2 + (0 + 4) X + (-1 + 0)$$
$$= \tfrac{1}{2}X^3 + 3X^2 + 4X - 1$$
et $P.Q = \left(3 \times \tfrac{1}{2}\right) X^5 + \left(\left(0 \times \tfrac{1}{2}\right) + (3 \times 0)\right) X^4$
$$+ \left(\left((-1) \times \tfrac{1}{2}\right) + (0 \times 0) + (3 \times 4) + (0 \times 0)\right) X^3$$
$$+ \left(((-1) \times 0) + (0 \times 4) + (3 \times 0)\right) X^2 + ((-1) \times 4 + 0 \times 0) X + ((-1) \times 0)$$
$$= \tfrac{3}{2}X^5 + 0X^4 + \tfrac{23}{2}X^3 + 0X^2 - 4X + 0 \quad = \tfrac{3}{2}X^5 - \tfrac{23}{2}X^3 - 4X.$$

Théorème 6.0.1 *$(A[X], +, .)$ est un anneau unitaire et commutatif.*

Preuve : Soient $P = p_0 + p_1X^1 + ... + p_{n-1}X^{n-1} + p_nX^n + ...$
$Q = q_0 + q_1X^1 + ... + q_{m-1}X^{m-1} + q_mX^m + ...$
et $S = s_0 + s_1X^1 + ... + s_{k-1}X^{k-1} + s_kX^k + ..$
1) $P + Q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) X^1 + ... + (p_{k-1} + q_{k-1}) X^{k-1} + (p_k + q_k) X^k + ... \in A[X]$.
Alors l'addition des polynômes est une loi interne dans $A[X]$.
2) $(P + Q) + S = ((p_0 + q_0) + s_0) + ((p_1 + q_1) + s_1) X^1 + ... + ((p_{k-1} + q_{k-1}) + s_{k-1}) X^{k-1}$
$+ ((p_k + q_k) + s_k) X^k + ...$
$= (p_0 + (q_0 + s_0)) + (p_1 + (q_1 + s_1)) X^1 + ... + (p_{k-1} + (q_{k-1} + s_{k-1})) X^{k-1}$
$+ (p_k + (q_k + s_k)) X^k + ...$
$= P + (Q + S)$
Alors l'addition des polynômes est une loi associative dans $A[X]$.
3) $P + Q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1) X^1 + ... + (p_{k-1} + q_{k-1}) X^{k-1} + (p_k + q_k) X^k + ...$
$= (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1) X^1 + ... + (q_{k-1} + p_{k-1}) X^{k-1} + (q_k + p_k) X^k + ...$
$= Q + P$
Alors l'addition des polynômes est une loi commutative dans $A[X]$.
4) Le polynôme nul $0 + 0X^1 + ... + 0X^{k-1} + 0X^k + ...$ est aussi noté 0.
$P + 0 = (p_0 + 0) + (p_1 + 0) X^1 + ... + (p_{k-1} + 0) X^{k-1} + (p_k + 0) X^k + ...$
$= P$

Alors le polynôme 0 est l'élément neutre de l'addition des polyômes dans $A[X]$.

5) Notons par $-P$ le polynôme

$(-p_0)+(-p_1)X^1+...+(-p_{n-1})X^{n-1}+(-p_n)X^n+...$

On a :

$$\begin{aligned}P+(-P) &= (p_0-p_0)+(p_1-p_1)X^1+...+(p_{n-1}-p_{n-1})X^{n-1}+(p_n-p_n)X^n+...\\ &= 0\end{aligned}$$

Alors $-P$ est le symétrique de P par rapport à l'addition des polyômes dans $A[X]$.

6) $$P.Q=\left(\sum_{i+j=0}p_i.q_j\right)+\left(\sum_{i+j=1}p_i.q_j\right)X^1+...+\left(\sum_{i+j=k-1}p_i.q_j\right)X^{k-1}+\left(\sum_{i+j=k}p_i.q_j\right)X^k+...\in A[X].$$

Alors la multiplication des polynômes est une loi interne dans $A[X]$.

7) $$\begin{aligned}P.Q &= \left(\sum_{i+j=0}p_i.q_j\right)+\left(\sum_{i+j=1}p_i.q_j\right)X^1+...+\left(\sum_{i+j=k-1}p_i.q_j\right)X^{k-1}+\left(\sum_{i+j=k}p_i.q_j\right)X^k+...\\ &= \left(\sum_{i+j=0}q_j.p_i\right)+\left(\sum_{i+j=1}q_j.p_i\right)X^1+...+\left(\sum_{i+j=k-1}q_j.p_i\right)X^{k-1}+\left(\sum_{i+j=k}q_j.p_i\right)X^k+...\\ &= Q.P\end{aligned}$$

Alors la multiplication des pôlynomes est commutative dans $A[X]$.

8) Si $Q=1+0X^1+...+0X^{m-1}+0X^m+...$ .C.à.d : $q_0=1$ et $\forall j\in\mathbb{N}^*, q_j=0$.

$$\begin{aligned}\text{Alors } P.Q &= \left(\sum_{i+j=0}p_i.q_j\right)+\left(\sum_{i+j=1}p_i.q_j\right)X^1+...+\left(\sum_{i+j=k-1}p_i.q_j\right)X^{k-1}\\ &\quad+\left(\sum_{i+j=k}p_i.q_j\right)X^k+...\\ &= (p_0.1)+(p_1.1)X^1+...+(p_{k-1}.1)X^{k-1}+(p_k.1)X^k+...\\ &= P\end{aligned}$$

Alors $Q=1$ est l'élément neutre de la multiplication des pôlynomes dans $A[X]$.

9) Notons respectivement les coefficients de $(P.Q).S$, $P.(Q.S)$, $P.Q$ et $Q.S$ par $((P.Q).S)_l$, $(P.(Q.S))_l$, $(P.Q)_l$ et $(Q.S)_l$

$$\begin{aligned}((P.Q).S)_l &= \sum_{r+k=l}(P.Q)_r.s_k=\sum_{r+k=l}\left(\sum_{i+j=r}p_i.q_j\right).s_k\\ &= \sum_{r+k=l}\left(\sum_{i+j+k=r+k}p_i.q_j.s_k\right)=\sum_{i+j+k=l}p_i.q_j.s_k\\ (P.(Q.S))_l &= \sum_{i+r=l}p_i.(Q.S)_r=\sum_{i+r=l}p_i.\left(\sum_{j+k=r}q_j.s_k\right)\\ &= \sum_{i+r=l}\left(\sum_{i+j+k=i+r}p_i.q_j.s_k\right)=\sum_{i+j+k=l}p_i.q_j.s_k\end{aligned}$$

d'où $(P.Q).S=P.(Q.S)$, car ils ont les mêmes coefficients.

Alors la multiplication des pôlynomes est associative dans $A[X]$.
10) Gardons les notation de 7) et notons respectivement les coefficients de $(P+Q).S$, $P+Q$, $P.S$ et $Q.S$ par $((P+Q).S)_l$, $(P+Q)_l$, $(P.S)_l$ et $(Q.S)_l$, alors,

$$\begin{aligned}((P+Q).S)_l &= \sum_{r+k=l}(P+Q)_r.s_k = \sum_{r+k=l}(p_r+q_r).s_k \\ &= \sum_{r+k=l}p_r.s_k + \sum_{r+k=l}q_r.s_k = (P.S)_l + (Q.S)_l \\ &= (P.S+Q.S)_l\end{aligned}$$

d'où $(P+Q).S = P.S+Q.S$, car ils ont les mêmes coefficients.
Alors la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $A[X]$.
Par suite $(A[X],+,.)$ est un anneau commutatif et unitaire.

Proposition 6.0.2 *Si K est un corps commutatif, alors $(K[X],+,.)$ est un anneau intègre. C.à.d :* $(\forall P,Q \in K[X] : P.Q = 0) \Rightarrow (P = 0 \ \vee \ Q = 0)$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}P.Q = 0 &\Rightarrow \deg(P.Q) = \deg 0 = -\infty \\ &\Rightarrow \deg P + \deg Q = -\infty \\ &\Rightarrow \deg P = -\infty \vee \deg Q = -\infty \\ &\Rightarrow P = 0 \vee Q = 0\end{aligned}$$

6.0.3 Arithmétique dans $K[X]$

Dans la suite, on suppose que K est un corps commutatif.

Divisibilité

Soient P,$B \in K[X]$
On dit que B divise P, s'il exite $Q \in K[X]$ tel que $P = Q.B$.

Exemples

1) Tout élément $a \neq 0$ du corps K divise tout polynôme P de $K[X]$,
car : $P = a.(a^{-1}P)$ et $a^{-1}P$ est bien un polynôme.
2) Tout polynôme P divise le polynôme nul 0, car : $0 = 0.P$.
3) $X+1$ divise X^2+X, car : $X^2+X = X(X+1)$

Remarque 6.0.3 *1) 0 ne divise que 0.*
2) Les diviseurs de 1 sont les éléments de K^*, qui sont les seuls éléments inversibles dans $K[X]$.
En effet : Soit $B \in K[X]$

$$\begin{aligned}B \text{ divise } 1 &\Rightarrow \exists Q \in K[X] : 1 = QB \\ &\Rightarrow \exists Q \in K[X] : \deg QB = 0 \\ &\Rightarrow \exists Q \in K[X] : \deg Q + \deg B = 0 \\ &\Rightarrow \exists Q \in K[X] : \deg Q = \deg B = 0,\end{aligned}$$

donc $Q = q_0 \in K$ et $B = b_0 \in K$ avec $1 = q_0.b_0$.

(si $1 = QB$, *alors* $0 = \deg 1 = \deg Q + \deg B$, *d'où* $\deg Q = \deg B = 0$ *donc* $Q = q_0$ *et* $B = b_0$ *avec* $1 = q_0 b_0$*)*
3) Si B *divise* P *, on dit que* P *est un multiple de* B.
4) Si B *divise* P *et* $P \neq 0$ *, alors* $\deg B \leq \deg P$
En effet : B *divise* $P \Rightarrow \exists Q \in K[X] : P = Q.B$

$$\Rightarrow \exists Q \in K[X] : \deg P = \deg Q + \deg B$$

$\deg Q \geq 0$, *sinon* $\deg Q = -\infty$ *donc* $\deg P = \deg Q + \deg B = -\infty$ *C.à.d :* $P = 0$ *ce qui contredit les hypothèses.*
Alors $\deg P \geq \deg B$.

Division euclidienne dans $K[X]$

Soient P , $B \in K[X]$.
Si $B \neq 0$, *alors il existe un couple unique* $(Q, R) \in K[X]^2$ *tels que*

$$P = QB + R \text{ et } \deg R < \deg B$$

Preuve : a) Pour montrer l'existence, il suffit de discuter deux cas :
a.1) Si $P = 0$, alors $P = 0.B + 0$. C.à.d : $Q = R = 0$, ce qui vérifie $\deg R < \deg B$ (car $\deg P = -\infty$ et $\deg B \geq 0$)
a.2) Si $P \neq 0$, $\deg P = n \in \mathbb{N}$ et $\deg B = m \in \mathbb{N}$, alors $P = p_0 + p_1 X + ... + p_n X^n$ et $B = b_0 + b_1 X + ... + b_m X^m$

Raisonnons par récurrence sur n.
* Si $n = 0$, c.à.d $P = p_0$, on a deux cas :
$1^{er} cas$: Si $m = 0$, alors $B = b_0$ d'où $P = p_0 b_0^{-1}.B + 0$. C.à.d : $Q = p_0 b_0^{-1}$ et $R = 0$, ce qui vérifie $\deg R < \deg B$ (car $\deg P = -\infty$ et $\deg B = 0$).
$2^{ème} cas$: Si $m > 0$, alors $P = 0.B + P$. C.à.d : $Q = 0$ et $R = P$, ce qui vérifie $\deg R < \deg B$ (car $\deg P = 0$ et $\deg B > 0$).
* Supposons le théorème vrai pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ et montrons qu'il reste vrai pour les polynômes de degré n.

On a deux cas
$1^{er} cas$: Si $m > n$, alors $P = 0.B + P$. C.à.d : $Q = 0$ et $R = P$, ce qui vérifie $\deg R < \deg B$ (car $\deg R = n$ et $\deg B = m$).
$2^{ème} cas$: Si $m \leq n$, alors $\bar{P} = P - a_n b_n^{-1} X^{n-m}.B$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors d'après l'hypothèse de récurrence $\bar{P} = \bar{Q}B + \bar{R}$ avec $\deg \bar{R} < \deg B$
par conséquent $P = \bar{P} + a_n b_n^{-1} X^{n-m}.B = \left(\bar{Q} + a_n b_n^{-1} X^{n-m}\right) B + \bar{R}$, c.à.d :
$Q = \bar{Q} + a_n b_n^{-1} X^{n-m}$ et $R = \bar{R}$, ce qui vérifie $\deg R < \deg B$ (car $\deg R = \deg \bar{R}$)
b) Pour montrer l'unicité, on suppose que $P = Q.B + R = Q_1.B + R_1$ tels que $\deg R < \deg B$ et $\deg R_1 < \deg B$.
Alors $(Q - Q_1).B = (R_1 - R)$ et par passage aux degrés, on obtient
$\deg (Q - Q_1) + \deg B = \deg (R_1 - R) \leq \max (\deg R_1, \deg R) < \deg B$,
d'où $\deg (Q - Q_1) = -\infty$, ainsi $Q - Q_1 = 0$ et par suite $R_1 - R = 0$.

Remarque 6.0.4 *La preuve précédente montre que la division euclidienne de P par B, se ramène à la division euclidienne de $\bar{P}$ par B, avec* $\deg \bar{P} < \deg P$.

Ceci est la base d'un procédé itératif appelé algorithme de la division euclidienne des polynômes.

Exemple
Divisons $P = 3X^5 - 2X^3 - 5X^2 + 1$ par $B = 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - X$

$$\begin{array}{r|l} 3X^5 + 0X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 0X + 1 & \frac{1}{2}X^3 + 2X^2 - X + 0 \\ \hline -12X^4 + 4X^3 - 5X^2 + 0X + 1 & 6X^2 - 24X + 104 \\ 52X^3 - 29X^2 + 0X + 1 & \\ -237X^2 + 104X + 1 & \end{array}$$

donc le quotient $Q = 6X^2 - 24X + 104$ et le reste $R = -237X^2 + 104X + 1$

6.0.4 Fonctions polynômes d'une variable, polynôme dérivé et racine d'un polynôme

Définition 6.0.3 *Soit $P = a_0 + a_1X^1 + ... + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ un polynôme de $K[X]$.*
1) On appelle fonction polynôme d'une variable x associée à P, la fonction $\widetilde{P} : K \to K$ définie par : $\widetilde{P}(x) = a_0 + a_1x^1 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$
2) On dit qu'un élément α est une racine ou zéro de P, si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$.
3) On appelle dérivé du polynôme P le polynôme noté P' et défini par :
$P' = a_1 + 2a_2X^1 + ... + (n-1)\,a_{n-1}X^{n-2} + na_nX^{n-1}$

Exemples
1) La fonction polynôme associée au polynôme $P = X^2 + 2X - 3$ de $\mathbb{R}[X]$ est la fonction $\widetilde{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{P}(x) = x^2 + 2x - 3$ et les seules racines de P sont -3 et 1, car $\widetilde{P}(-3) = \widetilde{P}(1) = 0$.
Le polynôme dérivé de P est $P' = 2X + 2$.
2) La fonction polynôme associée au polynôme $P = X^2 - 2$ de $\mathbb{Q}[X]$ est la fonction $\widetilde{P} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que $\widetilde{P}(x) = x^2 - 2$ et P n'a pas de racine car $\widetilde{P}(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
Le polynôme dérivé de P est $P' = 2X$

Remarque 6.0.5 *1) On dit que $\widetilde{P}(x)$ est obtenue par substitution de x à X dans P.*
2) On vérifie, facilement, que $\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$, $\widetilde{P.Q} = \widetilde{P}.\widetilde{Q}$, $\widetilde{P'} = \widetilde{P'}$, $(P+Q)' = P' + Q'$ et $(P.Q)' = P'.Q + P.Q'$
3) Si $\deg P \geq 1$, *alors* $\deg P' = \deg P - 1$ *et si* $\deg P < 1$, *alors* $\deg P' = -\infty$

Théorème 6.0.2 *Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$, alors*
1) Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $\widetilde{P}(\alpha)$.
2) α est une racine de P si, et seulement, si $X - \alpha$ divise P.

Preuve : 1) On a $P=(X-\alpha)Q+R$ où R et Q sont, respectivement, le reste et le quotient de la division euclidienne de P par $X-\alpha$. Alors $\widetilde{P}=\widetilde{(X-\alpha)}\widetilde{Q}+\widetilde{R}$, ainsi $\widetilde{P}(\alpha)=\widetilde{R}(\alpha)$.
Or $\deg R<\deg(X-\alpha)=1$, donc R et constant, d'où $\widetilde{R}=R$ et $\widetilde{R}(\alpha)=R$. Par conséquent $\widetilde{P}(\alpha)=R$.
2) Cette assertion est une conséquence directe de 1).
Exemple

-3 est une racine du polynôme $P=X^3+5X^2+3X-9$ de $\mathbb{R}[X]$, alors $P=(X+3)Q$, avec $Q=2X+X^2-3$

Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 6.0.4 *Soit $P\in K[X]^*=K[X]-0$ et α une racine de P.*
On appelle ordre de multiplicité de la racine α de P, le plus grand $m\in\mathbb{N}$ tel que $(X-\alpha)^m$ divise P.
** Si $m=1$, on dit que α est une racine simple de P*
** Si $m=2$, on dit que α est une racine double de P.*
** Si $m=3$, on dit que α est une racine triple de P. ...etc*

Exemple
-3 est une racine double du polynôme $P=X^3+5X^2+3X-9$ de $\mathbb{R}[X]$, car $P=(X+3)^2(X-1)$

Théorème 6.0.3 *Soient $P\in K[X]^*$ et $\alpha\in K$.*
α est une racine simple de P si, et seulement, si $\widetilde{P}(\alpha)=0$ et $\widetilde{P}'(\alpha)\neq 0$. (où $\widetilde{P}'$ est la dérivée de $\widetilde{P}$)

Preuve : α est une racine simple de P si, et seulement, s'il existe $Q\in K[X]$ tel que $P=(X-\alpha)Q$ et $\widetilde{Q}(\alpha)\neq 0$.
Or $\widetilde{P'}=\widetilde{Q}+(x-\alpha)\widetilde{Q'}$ donc $\widetilde{P}'(\alpha)=\widetilde{Q}(\alpha)$, d'où l'équivalence voulue.
Exemple
Soit le polynôme $P=X^3+5X^2+3X-9$ de $\mathbb{R}[X]$.
On a $\widetilde{P}(1)=0$ et $\widetilde{P}'(1)\neq 0$ $(\widetilde{P}'(x)=3X^2+10X+3)$

Proposition 6.0.3 *Si $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ sont des racines deux à deux distinctes de P, d'ordres de multiplicité respectifs $m_1,m_2,...,m_r$, alors $\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}$ divise P.*

Preuve : On procède par récurrence.
L'ordre de multiplicité de α_1 est m_1, alors $(X-\alpha_1)^{m_1}$ divise P.
Supposons maintenant que $\prod_{i=1}^{r-1}(X-\alpha_i)^{m_i}$ divise P.
Pour tout $i\in\{1,...,r-1\}$, on a $(\alpha_i-\alpha_r)^{-1}(X-\alpha_r)=(\alpha_i-\alpha_r)^{-1}(X-\alpha_i)+1$, ainsi, il existe $Q_i\in K[X]$ tel que

$(\alpha_i-\alpha_r)^{-m_r}(X-\alpha_r)^{m_r}=(X-\alpha_i)Q_i+1$,
d'où $-(X-\alpha_i)Q_i=-(\alpha_i-\alpha_r)^{-m_r}(X-\alpha_r)^{m_r}+1$; de la même façon , il existe $\overline{Q}_i\in K[X]$ tel que $(X-\alpha_i)^{m_i}(-Q_i)^{m_i}=(X-\alpha_r)^{m_r}\overline{Q}_i+1$.
En multipliant ces égalités terme à terme, on obtient
$\left(\prod_{i=1}^{r-1}(X-\alpha_i)^{m_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{r-1}(-Q_i)^{m_i}\right)=(X-\alpha_r)^{m_r}Q_0+1$, pour un certain $Q_0\in K[X]$.
En multipliant les deux membres de la dernière égalité par P et tenant compte du fait que $\prod_{i=1}^{r-1}(X-\alpha_i)^{m_i}$ et $(X-\alpha_r)^{m_r}$ divisent P, on obtient
$P=\left(\prod_{i=1}^{r-1}(X-\alpha_i)^{m_i}\right)P\left(\prod_{i=1}^{r-1}(-Q_i)^{m_i}\right)-P(X-\alpha_r)^{m_r}Q_0=\left(\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}\right)\left[\overline{Q}_0-\overline{\overline{Q}}_0\right]$,
avec $\overline{Q}_0,\overline{\overline{Q}}_0\in K[X]$. Par conséquent $\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}$ divise P.

Corollaire 6.0.1 *1) Un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ admet au plus n racines distinctes.*
2) Si P possède une infinité de racines, alors P est le polynôme nul.

Preuve : 1) Supposons $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n+1}$ des racines distinctes de P, alors d'après la proposition précédente, $\prod_{i=1}^{n+1}(X-\alpha_i)$ divise P, donc
$n+1=\deg\left(\prod_{i=1}^{n+1}(X-\alpha_i)\right)\leq\deg P=n$, ce qui est absurde.
2) L'assertion 1) montre que si P admet une infinité de racine, alors $\deg P\notin\mathbb{N}$, donc P est nul.

Théorème 6.0.4 (Théorème fondamental de l'algèbre) *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*
Autrement dit : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n\geq 1$ admet n racines.

(La preuve de ce théorème dépasse le cadre du cours d'algèbre de $1^{ère}$ année LMD)

Remarque 6.0.6 *Il existe des formules donnant les racines d'un polynôme de degré $1,2,3$ et 4 de $\mathbb{C}[X]$. De telles formules n'existent pas pour un polynôme de degré $n\geq 5$, alors on ne peut décomposer un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ que dans des cas particuliers.*

Exemple Soit $P=X^7-8X$
$$\begin{aligned}P &= X^7-8X=X(X^6-8)=X\left((X^2)^3-2^3\right)=X(X^2-2)(X^4+2X^2+4)\\ &= X(X^2-2)\left(X^2+1-i\sqrt{3}\right)\left(X^2+1+i\sqrt{3}\right)\\ &= X\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\tfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\left(X+\tfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\left(X-\tfrac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\left(X+\tfrac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$
P admet 7 racines dans $\mathbb{C}$, 3 racines dans $\mathbb{R}$ et 1 racine dans $\mathbb{Q}$.
Cette écriture est une décomposition de P en facteurs indécomposables dans $\mathbb{C}[X]$.

Pour obtenir la décomposition en facteurs indécomposables dans $\mathbb{R}[X]$, il faut remplacer les facteurs dont les produits sont des polynômes indécomposables dans

$\mathbb{R}[X]$ par leurs produits.
Cette écriture est une décomposition de P en facteurs indécomposables dans $\mathbb{R}[X]$.

Pour obtenir la décomposition en facteurs indécomposables dans $\mathbb{Q}[X]$, il faut remplacer les facteurs dont les produits sont des polynômes indécomposables dans $\mathbb{Q}[X]$ par leurs produits.

$$\begin{aligned} P &= X\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X^2-\sqrt{2}X+2\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+2\right) \\ &= X\left(X^2-2\right)\left(X^4+2X^2+4\right). \end{aligned}$$

Cette écriture est une décomposition de P en facteurs indécomposables dans $\mathbb{Q}[X]$.

6.1 Exercices du chapitre 6

Exercice 6.1 *Montrer que dans $\mathbb{Z}[X]$ le polynôme Q divise le polynôme P dans les cas suivants : 1) $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ $\quad Q = (X-1)^2$*
2) $P = 1 + X + X^2 + ... + X^{2n+1}$ $\quad Q = 1 + X^{2n}$ (Calculer $(1-X)P$)

Exercice 6.2 *Trouver dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes de degré $n \leq 6$, divisibles par X^2+1 et $X^2 - X + 1$*

Exercice 6.3 *Dans $\mathbb{R}[X]$, un polynôme P a pour restes respectifs $3, 7$ et 13 dans les divisions euclidienne par $(X-1)$, $(X-2)$, et $(X-3)$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.*

Exercice 6.4 *Soit $A = a_0 + a_1X + ...a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$, avec $a_n \neq 0$ et $n \geq 2$.*
1) Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que p et q soit premiers entre eux. Montrer que si $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle de A alors, p divise a_0 et q divise a_n.
2) Que peut-on dire des racines rationnelles de A si, A est unitaire.
3) Déterminer les racines rationnelles des polynômes :
$X^4 - 10X^2 + 1$ *et* $3X^3 + 23X^2 + 57X + 45$.

Exercice 6.5 *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme de degré 2 soit indécomposable (irréductible) dans $\mathbb{R}[X]$ (resp dans $\mathbb{Q}[X]$).*
Application : $P_1 = \frac{1}{2}X^2 - 3$, $P_2 = X^2 - 2X - 3$, $P_1 = X^2 + X + 1$

Exercice 6.6 *Dans $\mathbb{R}[X]$, décomposer X^6+1 et X^4+2X^2+1 en facteurs indécomposables (irréductibles).*

Exercice 6.7 *Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le sous ensemble de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré au plus 2.*
1) Montrer que $(\mathbb{R}_2[X], +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}[X], +)$.
2) Soit u l'application définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie par $u(P) = X^2P' - 2XP$. Montrer que u est un endomorphisme de $(\mathbb{R}_2[X], +)$.

Deuxième partie

Algèbre I

Chapitre 7

Espaces vectoriels

7.1 Loi de composition externe

Soit $(K,+,\cdot)$ un corps commutatif.
On appelle loi de composition externe sur un ensemble $E \neq \varnothing$, à coefficients dans K, toute application $\bullet$ de $K \times E$ dans E.
* *L'image $\bullet(\alpha, x)$ est souvent notée $\alpha \bullet x$ (ou αx s'il n'y a pas de confusion)*
* *La loi $\bullet$ est aussi appelée multiplication par un scalaire.*

Exemples
1) L'application $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, définie par $\alpha \bullet z = \alpha z$, est une loi de composition externe sur $\mathbb{C}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

2) L'application $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, définie par $\alpha \bullet (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

3) Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
L'application $\bullet : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, définie par $\alpha \bullet f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} : (\alpha \bullet f)(x) = \alpha f(x)$, est une loi de composition externe sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Remarque 7.1.1 *La multiplication $\cdot_K$ du corps K est une loi de composition interne et externe en même temps.($\cdot_K : K \times K \to K$).*

7.2 Structure d'espace vectoriel

Définition 7.2.1 *Soit K un corps commutatif.*
On appelle espace vectoriel sur K (ou K-espace vectoriel) tout ensemble non vide $E \neq \varnothing$ muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe $\bullet$ à coefficients dans K, vérifiant :

1) $(E,+)$ *est un groupe commutatif.*
2) Pour tous $\alpha,\beta \in K$ *et tous* $x,y \in E$:
$\alpha \bullet (x+y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y$
$(\alpha +_K \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$
$(\alpha \cdot_K \beta) \bullet x = \alpha \bullet (\beta \bullet x)$
$1_K \bullet x = x$ *(où* 1_K *est l'élément unité du corps* K*)*

Remarque 7.2.1 *1) Un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *(respectivement sur* $\mathbb{C}$*) est appelé espace vectoriel réel (respectivement complexe).*
2) Les éléments d'un espace vectoriel E *sont appelés vecteurs et ceux du corps* K *sont appelés scalaires.*

Exemples :
1) Tout corps commutatif K est un espace vectoriel sur lui même.
$\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, pour l'addition et la multiplication usuelles de $\mathbb{R}$.
$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, pour l'addition et la multiplication usuelles de $\mathbb{C}$.

2) L'ensemble $\mathbb{C}$, avec l'addition usuelle $+$ et la multiplication par un réel $\bullet$, définie par $\alpha \bullet z = \alpha z$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3) Dans $\mathbb{R}^n$, on définit la loi interne $+$ et la loi externe $\bullet$ par :
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $(x_1,x_2,...,x_n)$, $(y_1,y_2,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$
$(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n) = (x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$
$\alpha \bullet (x_1,x_2,...,x_n) = (\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n)$
Avec ces lois $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel réel.

4) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), on définit la loi interne $+$ et la loi externe $\bullet$ par :
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous f, $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$\begin{array}{l}(f+g)(x) = f(x)+g(x) \\ (\alpha \bullet f)(x) = \alpha f(x)\end{array}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Avec ces lois $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.

5) L'ensemble $K[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps commutatif K muni de l'addition $+$ et la multiplication par un scalaire de K est un espace vectoriel sur K.

Théorème 7.2.1 *Soit* E *un* K*-espace vectoriel, alors pour tous* $x,y \in E$ *et tous* $\alpha,\beta \in K$*, on a :*
1) $0_K \bullet x = 0_E = \alpha \bullet 0_E$
2) $\alpha \bullet (-x) = -\alpha \bullet x = (-\alpha) \bullet x$
3) $\alpha \bullet (x-y) = \alpha \bullet x - \alpha \bullet y$ *et* $(\alpha-\beta) \bullet x = \alpha \bullet x - \beta \bullet x$
4) Si $\alpha \bullet x = 0_E$*, alors* $\alpha = 0_K$ *ou* $x = 0_E$

Preuve :
1) $0_{_E} = (0_{_K} \bullet x) - (0_{_K} \bullet x) = ((0_{_K} + 0_{_K}) \bullet x) - (0_{_K} \bullet x)$
$= (0_{_K} \bullet x) + (0_{_K} \bullet x) - (0_{_K} \bullet x) = (0_{_K} \bullet x)$
$0_{_E} = (\alpha \bullet 0_{_E}) - (\alpha \bullet 0_{_E}) = (\alpha \bullet (0_{_E} + 0_{_E})) - (\alpha \bullet 0_{_E})$
$= (\alpha \bullet 0_{_E}) + (\alpha \bullet 0_{_E}) - (\alpha \bullet 0_{_E}) = (\alpha \bullet 0_{_E})$
2) $\alpha \bullet x + \alpha \bullet (-x) = \alpha \bullet (x - x) = \alpha \bullet 0_{_E} = 0_{_E}$, alors $\alpha \bullet (-x) = -\alpha \bullet x$, de la même façon, $\alpha \bullet x + (-\alpha) \bullet x = (\alpha - \alpha) \bullet x = 0_{_K} \bullet x = 0_{_E}$, alors $(-\alpha) \bullet x = -\alpha \bullet x$
3) $\alpha \bullet (x - y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet (-y) = \alpha \bullet x - \alpha \bullet y$
et $(\alpha - \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + (-\beta) \bullet x = \alpha \bullet x - \beta \bullet x$
4) Si $\alpha \bullet x = 0_{_E}$, alors, ou bien $\alpha = 0$, ou bien $\alpha \neq 0$ et dans ce cas α est inversible dans K, par conséquent $\alpha^{-1} \bullet (\alpha \bullet x) = \alpha^{-1} \bullet 0_{_E}$ d'où $x = 1 \bullet x = (\alpha^{-1} \cdot_{_K} \alpha) \bullet x = 0_{_E}$

7.3 Sous espace vectoriel

Définition 7.3.1 *On appelle sous espace vectoriel d'un K-espace vectoriel E, toute partie non vide F de E qui est elle même un K-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\bullet$ de E restreintes à F.*

Proposition 7.3.1 *Soit E un K-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous espace vectoriel , ssi*
1) $0_E \in F$
2) $\forall \alpha \in K, \forall x,y \in F : \ x - y \in F$ *et* $\alpha \bullet x \in F$

Preuve : a) Supposons que F est un sous espace vectoriel de E pour les lois restreintes, alors la loi externe de E induit une loi externe sur F, donc pour tout $\alpha \in K$ et tout $x \in F$ on a : $\alpha \bullet x \in F$. Pour la loi interne $+$; $(F, +)$ est un sous groupe de E, donc $0_E \in F$ et pour tous x et y dans F, on a $x - y \in F$ (**voir Proposition ??**).

b) Supposons que F vérifie les assertions 1) et 2), alors $(F, +)$ est un sous groupe du groupe $(E, +)$ (**voir voir Proposition ??**) qui est commutatif.

L'assertion 2) montre que la loi externe $\bullet$ de E induit une loi externe sur F et le fait que $(F, +)$ est un sous groupe assure, l'assertion 2) de la définition des espaces vectoriels**.** Par conséquent F est un espace vectoriel pour les lois restreintes de E, c'est à dire un sous espace vectoriel de E.

Corollaire 7.3.1 *Soit E un K-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous espace vectoriel , ssi*
i) $0_E \in F$
ii) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x,y \in F : \ \alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F$

Preuve : a) Supposons que F vérifie *ii)*, alors en choisissant $(\alpha, \beta) = (1_K, -1_K)$ en suite $(\alpha, \beta) = (\alpha, 0_K)$, on obtient l'assertion 2) de la proposition précédente.

b) Inversement, si F vérifie l'assertion 2) de la proposition précédente, alors pour

tous $\alpha, \beta \in K$ et tous $x, y \in F$, on a $\alpha \bullet x \in F$ et $\beta \bullet y \in F$ d'où $\alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F$.

Exemples :

1) L'ensemble $F = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En effet : $0 + 0 + ... + 0 = 0$, alors $0_{\mathbb{R}^n} = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n \ z\acute{e}ros}\right) \in F$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in F$, on a $(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + ... + (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha (x_1 + x_2 + ... + x_n) + \beta (y_1 + y_2 + ... + y_n) = 0$, donc $\alpha (x_1, x_2, ..., x_n) + \beta (y_1, y_2, ..., y_n) \in F$.

2) L'ensemble $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet : La fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est continue, alors $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $\alpha f + \beta g$ est une fonction continue, donc $\alpha f + \beta g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

7.4 Parties libres, parties liées, parties génératrices et bases

Définition 7.4.1 *Soit E un K-espace vectoriel et $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une partie finie non vide de E.*
1) La partie A est dite libre si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K : (\lambda_1 \bullet a_1 + \lambda_2 \bullet a_2 + ... + \lambda_p \bullet a_p = 0) \Rightarrow (\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0 \wedge ... \wedge \lambda_p = 0)$$

(On dit aussi que les vecteurs $a_1, a_2, ..., a_p$ sont linéairement indépendants)
2) La partie A de E est dite liée si elle n'est pas libre.
3) La partie A est dite partie génératrice de E si

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K : x = \lambda_1 \bullet a_1 + \lambda_2 \bullet a_2 + ... + \lambda_p \bullet a_p$$

(On dit aussi que E est engendré par A et on ecrit $E = Gr(A)$ ou $E = \langle a_1, a_2, ..., a_p \rangle$)
4) L'espace E est dit de dimension finie s'il possède une partie génératrice finie.
5) La partie A est dite base de E si elle est libre et génératrice de E.

On a, **par convention**, la partie vide $\varnothing$ est génératrice de $E = \{0\}$ et elle est libre.

Exemples :

1) La partie $A = \{1, i\}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est une base, car elle est libre et génératrice.
En effet : Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
$\lambda_1 \bullet 1 + \lambda_2 \bullet i = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0)$ et soit $z \in \mathbb{C}$, prenons $\lambda_1 = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$

On a $z = \lambda_2 + \lambda_2 i$ (Comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}$).

La partie $B = \{1\}$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ car elle est libre et génératrice.
En effet : Soit $\lambda_1 \in \mathbb{C}$,
$\lambda_1 \bullet 1 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = 0)$
et soit $z \in \mathbb{C}$, prenons $\lambda_1 = z \in \mathbb{C}$.
On a $z = z \bullet 1 = \lambda_1 \bullet 1$ (Comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$).

2) Soient dans $\mathbb{R}^n$ les vecteurs $e_1 = (1,0,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0)$, ..., $e_n = (0,0,...,0,1)$.
La partie $A = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (appelée base canonique), car elle est libre et génératrice.

En effet : Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \bullet e_1 + \lambda_2 \bullet e_2 + ... + \lambda_n \bullet e_n = 0 \quad &\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

et soit $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, prenons $\lambda_1 = x_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = x_2 \in \mathbb{R}$,...,$\lambda_n = x_n \in \mathbb{R}$
On a $(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$.

3) La partie $A = \{(1,2,-1), (3,0,1), (0,-6,4)\}$ est liée dans $\mathbb{R}^3$.
En effet : Prenons $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 1$
On a $\lambda_1 (1,2,-1) + \lambda_2 (3,0,1) + \lambda_3 (0,-6,4) = 0 \wedge (\lambda_1 \neq 0)$.

4) La partie $A = \{1, X, X^2, X^3\}$ est une base du K-espace $K_3[X]$ des polynômes de degré au plus 3 à coefficients dans K.
En effet : Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$
$\lambda_1.1 + \lambda_2 X + \lambda_3 X^2 + \lambda_4 X^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$,
Soit $P \in K_3[X]$, il existe $a_1, a_2, a_3, a_4 \in K$ tels que $P = a_1.1 + a_2 X + a_3 X^2 + a_4 X^3$

5) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - 2z + t = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Soit $(x,y,z,t) \in F$, alors $x + y - 2z + t = 0 \Leftrightarrow x = -y + 2z - t$
On peut écrire

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) &= (-y + 2z - t, y, z, t) \\ &= y(-1,1,0,0) + z(2,0,1,0) + t(-1,0,0,1) \text{ ; avec } \ y,z,t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc $A = \{(-1,1,0,0), (2,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$ est une partie génératrice de F.

6) Le sous espace F_1 de $\mathbb{R}^3$, engendré par $A_1 = \{(0,-1,2), (1,1,1)\}$ est donné par

$$\begin{aligned} F_1 &= \{\lambda_1 (0,-1,2) + \lambda_2 (1,1,1) \ / \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) \ / \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z) \ / x = \lambda_2, \ y = -\lambda_1 + \lambda_2, \ z = 2\lambda_1 + \lambda_2 \text{ et } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z) \ / \ z - x = 2(x - y) \text{ et } y, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z - 3x + 2y = 0\} \end{aligned}$$

Théorème 7.4.1 *Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une partie finie d'un K-espace vectoriel E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
1) A est une base de E
2) A est une partie libre maximale[1] *de E*
3) A est une partie génératrice minimale[2] *de E*
4) Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = x_1a_1+x_2a_2+...+x_pa_p$ avec $x_1, x_2, ..., x_p \in K$.

Preuve : Si $A = \varnothing$, alors $E = \{0\}$ et l'équivalence des assertions est assurée par les conventions déjà faites. Supposons dans la suite de la preuve que $A \neq \varnothing$.
a) Montrons que 1) $\Rightarrow$ 2).
Supposons que A est une base de E, et soit B une partie contenant A.
Si $B \neq A$, alors il existe $x \in B : x \notin A$ et comme A est une base elle est génératrice de E, donc $x = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + ... + \lambda_pa_p$ avec $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$, ainsi $0 = -x + \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + ... + \lambda_pa_p$ qui représente une combinaison linéaire nulle des éléments de B avec des coefficients non tous nuls, donc B est liée. Par conséquent la seule partie libre contenant A est A, alors A est une partie libre maximale.
b) Montrons que 2) $\Rightarrow$ 3).
Supposons que A est une partie libre maximale et soit $x \in E$, alors ou bien $x \in A$ et il s'écrit comme combinaison linéaire $x = a_i = 0.a_1+...+1.a_i+...+0.a_p$, ou bien $x \notin A$ et dans ce cas la partie $A \cup \{x\}$ est liée car A est libre maximale, donc il existe des scalaires $\lambda_0 \neq 0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ de K vérifiants $\lambda_0x+\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+...+\lambda_pa_p = 0$, alors x s'écrit comme combinaison linéaire $x = -(\lambda_0)^{-1}\lambda_1a_1-(\lambda_0)^{-1}\lambda_2a_2-...-(\lambda_0)^{-1}\lambda_pa_p$.
Dans les deux cas x s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de A, alors A est une partie génératrice. Pour montrer qu'elle est génératrice minimale, étudions la partie $A' = \{a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_p\}$ qui est égale à A privé de a_i. L'élément a_i ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de A' (sinon A sera liée) et par conséquent A' n'est pas génératrice, donc A est une partie génératrice minimale.
c) Montrons que 3) $\Rightarrow$ 4).
Supposons que A est une partie génératrice minimale et soit $x = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_pa_p = x'_1a_1+x'_2a_2+...+x'_pa_p$, alors $(x_1 - x'_1)a_1+(x_2 - x'_2)a_2+...+(x_p - x'_p)a_p = 0$ et si l'un des $x_i - x'_i \neq 0$ on peut écrire $a_i = (x_i - x'_i)^{-1}(x_1 - x'_1)a_1 + ... + (x_i - x'_i)^{-1}(x_{i-1} - x'_{i-1})a_{i-1}+(x_i - x'_i)^{-1}(x_{i+1} - x'_{i+1})a_{i+1}+...+(x_i - x'_i)^{-1}(x_p - x'_p)a_p$ qui signifie que $A' = \{a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_p\}$ est une partie génératrice ce qui contredit le fait que A est une partie génératrice minimale. Par conséquent tous les $x_i - x'_i$ sont nuls, alors l'écriture $x = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_pa_p$ est unique.
d) Montrons que 4). $\Rightarrow$ 1)
Supposons que tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_pa_p$, alors A est une partie génératrice et puisque $0 = 0.a_1 + 0.a_2 + ... + 0.a_p$ est une écriture unique, alors $0 = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_pa_p \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_p = 0$ ce qui signifie

1. Maximale, pour l'orde de l'inclusion
2. Minimale, pour l'orde de l'inclusion

que A est libre. Par suite A est une base de E

Corollaire 7.4.1 *Soient L et G deux parties finies d'un K-espace vectoriel E telles que L est libre , G est génératrice et $L \subset G$, alors il existe une base A de E telle que $L \subset A \subset G$.*

Preuve : Considérons l'ensemble $\mathcal{A} = \{\mathcal{L}$ telle que $L \subset \mathcal{L} \subset G$ et $\mathcal{L}$ est génératrice$\}$. Puisque G est finie, $\mathcal{A}$ est aussi fini, alors il a au moins [3] un élément minimal A pour l'inclusion. A est donc partie génératrice telle que $L \subset A$.
Posons $L = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ et $A - L = \{a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_p\}$, et soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$ tels que $\lambda_1 \bullet a_1 + \lambda_2 \bullet a_2 + ... + \lambda_p \bullet a_p = 0$.
Supposons que $\lambda_i \neq 0$ pour un certain $i \in \{r+2, r+3, ..., p\}$, alors
$a_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \bullet a_1 + ... + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \bullet a_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \bullet a_{i+1} + ... + \frac{\lambda_p}{\lambda_i} \bullet a_p$. Ainsi $A - \{a_i\}$ est génératrice avec $L \subset A - \{a_i\}$, c'est à dire $A - \{a_i\} \in \mathcal{A}$. Ceci contredit la minimalité de A dans $\mathcal{A}$.
Par conséquent $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{r+2, r+3, ..., p\}$.
Après substitution, on obtient, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, car L est libre.
Par suite A est libre, donc c'est une base de E avec $L \subset A \subset G$.

Corollaire 7.4.2 (Théorème de la base incomplète) *Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie et L une partie libre finie de E, alors il existe une base A de E telle que $L \subset A$.*

Preuve : E est engendré par une partie finie G, alors $L \cup G$ est une partie génératrice finie contenant la partie libre L, donc il existe une base A de E telle que $L \subset A$

Corollaire 7.4.3 *Tout K-espace vectoriel E de dimension finie admet une base.*

Preuve : Si $E = \{0\}$ alors E admet, par convention, $\varnothing$ comme base.
S'il existe $a \in E$ et $a \neq 0$, alors la partie $\{a\}$ est libre dans E, donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une base A de E telle que $\{a\} \subset A$.

7.5 Dimension et composantes

Définition 7.5.1 *Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une base d'un K-espace vectoriel E.*
1) La dimension de E sur K notée $\dim_K E$ est le nombre des éléments de A.
2) Si $A \neq \varnothing$, alors le $p-$uplet unique $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de K^p, vérifiant $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_p a_p$, est appelé composantes de x dans la base A.

Remarque 7.5.1 *1) La dimension d'un espace vectoriel E ne dépend pas du choix de la base, car toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.*
2) Si $E = \{0\}$, alors $A = \varnothing$, donc $\dim_K E = 0$.

3. Si un ensemble ordonné n'admet pas d'élément minimal, alors il est infini.

Exemples :
1) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ car $\{1, i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Dans cette base (x, y) sont les composantes du complexe $x + iy$.
par contre, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ car $\{1\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
Dans cette base $(x + iy)$ est la seule composante du complexe $x + iy$.

2) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$, car $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Dans cette base $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont les composantes de $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Théorème 7.5.1 *Soit F un sous espace d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Alors :*
1) F est de dimension finie et $\dim_K F \leq \dim_K E$.
2) $F = E$ si et seulement, si $\dim_K F = \dim_K E$

Preuve : 1) Si $\dim_K E = n$, alors toute partie de $n+1$ éléments de F est liée (sinon on peut trouver une base de E contenant plus de $n + 1$ éléments ce qui implique que $n + 1 \leq \dim_K E = n$, qui est absurde), donc $\dim_K F < n + 1$, c'est à dire $\dim_K F \leq n = \dim_K E$.

2) Supposons que $\dim_K F = \dim_K E = n$, alors une base B_F du sous espace F est une partie libre contenant n éléments de E, donc elle est libre et maximale dans E (sinon $n + 1 \leq \dim_K E = n$), alors B_F est une base de E, donc E est engendré par des éléments de F et par conséquent $E \subset F$, ce qui donne l'égalité $E = F$.
Si $E = F$, il est clair que $\dim_K F = \dim_K E$.

7.6 Sommes directes et sous espaces supplémentaires

Théorème 7.6.1 *Si F_1 et F_2 sont deux sous espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E, alors $F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont deux sous espaces vectoriels de E.*
De plus, si E est de dimension finie alors,

$$\dim_K (F_1 + F_2) = \dim_K F_1 + \dim_K F_2 - \dim_K (F_1 \cap F_2)$$

Preuve : 1) On a $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, alors $0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$.
2) Si x, $y \in F_1 + F_2$ et $\alpha, \beta \in K$, alors $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in F_1$ et $x_2, y_2 \in F_2$.
On a $\alpha \bullet x + \beta \bullet y = \alpha \bullet (x_1 + x_2) + \beta \bullet (y_1 + y_2) = \underbrace{(\alpha \bullet x_1 + \beta \bullet y_1)}_{\in F_1} + \underbrace{((\alpha \bullet x_2 + \beta \bullet y_2))}_{\in F_2}$,
donc $\alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F_1 + F_2$. Par suite $F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E.
1') On a $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, alors $0_E \in F_1 \cap F_2$.
2') Si x, $y \in F_1 \cap F_2$ et $\alpha, \beta \in K$, alors x, $y \in F_1$ et x, $y \in F_2$.
donc $\alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F_1$ car F_1 est un sous espace vectoriel de E
et $\alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F_2$ car F_2 est un sous espace vectoriel de E

D'où $\alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F_1 \cap F_2$.
Par suite $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel de E.
3) On sait que $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel de F_1 et de F_2 et si E est de dimension finie, ces espaces sont de dimensions finies.
Soit $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une base de $F_1 \cap F_2$ qui peut être complétée par $\{a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_m\}$ pour avoir une base de F_1 et par $\left\{a'_{p+1}, a'_{p+2}, ..., a'_s\right\}$ pour avoir une base de F_2.
Soit $x \in F_1 + F_2$, alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.
Ainsi, il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p, \alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, ..., \alpha_m \in K$ et il existe $\lambda'_1, \lambda'_2, ..., \lambda'_p, \alpha'_{p+1}, \alpha'_{p+2}, ..., \alpha'_s \in K$ tels que

$$\begin{aligned} x &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_p a_p + \alpha_{p+1} a_{p+1} + \alpha_{p+2} a_{p+2} + .. + \alpha_m a_m) \\ &\quad + \left(\lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_2 + ... + \lambda'_p a_p + \alpha'_{p+1} a'_{p+1} + \alpha'_{p+2} a'_{p+2} + .. + \alpha'_s a'_s\right) \\ &= (\lambda_1 + \lambda'_1)\, a_1 + (\lambda_2 + \lambda'_2)\, a_2 + ... + \left(\lambda_p + \lambda'_p\right) a_p + \alpha_{p+1} a_{p+1} + \alpha_{p+2} a_{p+2} + .. + \alpha_m a_m \\ &\quad + \alpha'_{p+1} a'_{p+1} + \alpha'_{p+2} a'_{p+2} + .. + \alpha'_s a'_s \end{aligned}$$

D'où $\left\{a_1, a_2, ..., a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_m, a'_{p+1}, a'_{p+2}, ..., a'_s\right\}$ est une partie génératrice de $F_1 + F_2$.
Soit maintenant, $\lambda_1, ..., \lambda_p, \alpha_{p+1}, ..., \alpha_m, \alpha'_{p+1}, ..., \alpha'_s \in K$.
Supposons que

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_p a_p + \alpha_{p+1} a_{p+1} + .. + \alpha_m a_m + \alpha'_{p+1} a'_{p+1} + .. + \alpha'_s a'_s = 0 \qquad (\#)$$

Alors $-\left(\alpha'_{p+1} a'_{p+1} + .. + \alpha'_s a'_s\right) = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_p a_p + \alpha_{p+1} a_{p+1} + .. + \alpha_m a_m \in F_1$
Mais $-\left(\alpha'_{p+1} a'_{p+1} + .. + \alpha'_s a'_s\right) \in F_1 \cap F_2$, donc il existe $\gamma_1, ..., \gamma_p \in K$ tel que
$-\left(\alpha'_{p+1} a'_{p+1} + .. + \alpha'_s a'_s\right) = \gamma_1 a_1 + ... + \gamma_p a_p$
c.à.d : $\gamma_1 a_1 + ... + \gamma_p a_p + \alpha'_{p+1} a'_{p+1} + .. + \alpha'_s a'_s = 0$, mais $\left\{a_1, a_2, ..., a_p, a'_{p+1}, a'_{p+2}, ..., a'_s\right\}$ est une base de F_2, alors $\gamma_1 = ... = \gamma_p = \alpha'_{p+1} = .. = \alpha'_s = 0$, en particulier $\alpha'_{p+1} = .. = \alpha'_s = 0$.
De la même façon on montre que $\alpha_{p+1} = .. = \alpha_m = 0$.
En remplaçant dans (#), on obtient $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_p a_p = 0$ et comme $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une base de $F_1 \cap F_2$, alors $\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$.
On a montrer que $(\#) \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_p = \alpha_{p+1} = .. = \alpha_m \alpha'_{p+1} = .. = \alpha'_s = 0$.
Par suite $\left\{a_1, a_2, ..., a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_m, a'_{p+1}, a'_{p+2}, ..., a'_s\right\}$ est libre, donc une base de $F_1 + F_2$, ainsi :

$$\begin{aligned} \dim_K (F_1 + F_2) &= p + (m - p) + (s - p) = m + s - p \\ &= \dim_K F_1 + \dim_K F_2 - \dim_K (F_1 \cap F_2) \end{aligned}$$

Définition 7.6.1 *deux sous espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.*
1) La somme $F_1 + F_2$ est dite directe si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et on écrit dans ce cas $F_1 \oplus F_2$ au lieu de $F_1 + F_2$
2) Les sous espaces F_1 et F_2 sont dits supplémentaires si leur somme est directe et $E = F_1 \oplus F_2$.

Exemples :
1) Les ensembles $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ en tant qu'espace

vectoriel sur $\mathbb{R}$; et comme $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$, alors leur somme est directe et on peut écrire $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$.
On sait que $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = \mathbb{C}$, alors $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont deux sous espaces supplémentaires dans $\mathbb{C}$.

2) Les ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$ et $F' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = y = 0\}$ sont des sous espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. En effet :
$(x, y, z) \in F \cap F' \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$
donc $F \cap F' = \{0\}$, alors la somme est directe, donc $F + F' = F \oplus F'$.
Soit $(x, y, z) \in F$.
$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$
Il est facile de montrer que $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est une base de F, donc $\dim_K F = 2$.
Soit $(x, y, z) \in F'$.
$(x, y, z) = (0, 0, z) = z(0, 0, 1)$
Il est facile de montrer que $\{(0, 0, 1)\}$ est une base de F', donc $\dim_K F' = 1$.
Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}}(F + F') = \dim_{\mathbb{R}} F + \dim_{\mathbb{R}} F' - \dim_{\mathbb{R}}(F \cap F') = 2 + 1 - 0 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$
et puisque $F + F'$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, alors $F + F' = \mathbb{R}^3$.
Comme $F \oplus F' = F + F' = \mathbb{R}^3$, alors F et F' sont des sous espaces supplémentaires l'un de l'autre dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition 7.6.1 *Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.*
La somme $F_1 + F_2$ est directe, si et seulement, si tout $x \in F_1 + F_2$ s'écrit de façon unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.

Preuve : Supposons que la somme est directe, et $x = x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$ avec $x_1, x'_1 \in F_1$ et $x_2, x'_2 \in F_2$, alors $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2 \in F_1 \cap F_2 = \{0\}$, c'est à dire $x_1 = x'_1$ et $x'_2 = x_2$, d'où l'unicité de l'écriture $x = x_1 + x_2$

Inversement, supposons l'unicité de l'écriture $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$, alors $x = x_1 + x_2 \in F_1 \cap F_2$ permet d'écrire $0 = \underbrace{(x_1 - x)}_{\in F_1} + x_2 = x_1 + \underbrace{(x_2 - x)}_{\in F_2}$, qui est l'écriture unique $0 = 0 + 0$, alors $x_1 - x = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ et $x_2 - x = 0$ donc $x = x_1 + x_2 = 0$. Par conséquent $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et la somme est directe.

7.7 Exercices du chapitre 7

Exercice 7.1 *On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$ par les lois $\boxplus$ et $\boxdot$ définies comme suit :*
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$
$(x, y) \boxplus (x', y') = (x + x', yy')$ *et* $\alpha \boxdot (x, y) = (\alpha x, y^\alpha)$
Est-ce que $\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+, \boxplus, \boxdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 7.2 *On munit* $\mathbb{R}^2$ *par les lois* $+$ *et* $\odot$ *définies comme suit :*
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$
$(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$ *et* $\alpha \odot (x,y) = (\alpha x, y)$
Est-ce que $(\mathbb{R}^2,+,\odot)$ *est un* $\mathbb{R}$*- espace vectoriel ?*

Exercice 7.3 *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^4$ *? Dans le cas affirmatif, trouver des bases.*
$W_0 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 3x - 2y + 2z = 0 \text{ et } 2y = t\}$ $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2xy - t = 0\}$
$W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y - t = 0\ \}$

Exercice 7.4 *Est ce que l'ensemble* $\mathcal{F}_{IMP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *des fonctions impaires de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
Même question pour l'ensemble $\mathcal{F}_+(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *des fonctions positives de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$

Exercice 7.5 *Soient* $u = (2,1,1)$ *et* $v = (1,3,1)$.
1) Montrer que $\{u,v\}$ *est une partie libre de* $\mathbb{R}^3$.
2) Soit $w = (-2,\alpha,\alpha+2)$. *Déterminer le réel* α *pour que* $w \in \langle u,v\rangle$ *puis compléter* $\{u,v\}$ *pour obtenir une base de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7.6 *Soit* $\mathbb{R}_3[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \quad / \deg P \leq 3\}$.
1) Donner la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Montrer que $A = \{1+X, 2+3X, 1-X+2X^2\}$ *est une partie libre de* $\mathbb{R}_3[X]$, *puis compléter* A *pour obtenir une base de* $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7.7 *Soient les sous espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^4$ *suivants :*
$W_0 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 3x - 2y + 2z = 0 \text{ et } 2y = t\}$ $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y - t = 0\ \}$
$W_3 = \langle (0,2,1,0),(0,0,1,1),(0,2,2,1)\rangle$
1) W_0 *et* W_1 *sont-ils supplémentaires l'un de l'autre ?*
2) Même question pour W_0 *et* W_3.

Chapitre 8

Applications linéaires

8.1 Applications linéaires

Définition 8.1.1 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels.*
Une application $f : E \to F$ est dite linéaire, si

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in E: f(\alpha \bullet x + \beta \bullet y) = \alpha \bullet f(x) + \beta \bullet f(y).$$

**Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme.*
**Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme de E.*
**Un endomomorphisme bijectif est appelé automorphisme.*

Exemples :
1) L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x + z)$ est une application linéaire. En effet :
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ &= (2(\alpha x_1 + \beta x_2) + 3(\alpha y_1 + \beta y_2) - (\alpha z_1 + \beta z_2), (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)) \\ &= (\alpha(2x_1 + 3y_1 - z_1) + \beta(2x_2 + 3y_2 - z_2), \alpha(x_1 + z_1) + \beta(x_2 + z_2)) \\ &= \alpha(2x_1 + 3y_1 - z_1, x_1 + z_1) + \beta(2x_2 + 3y_2 - z_2, x_2 + z_2) \\ &= \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

* f n'est pas un isomorphisme d'espaces vectoriels (f n'est pas injective).

2) L'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $g(z) = \overline{z}$ n'est pas une application linéaire, si on considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En effet :
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a : $g(\alpha z + \beta z') = \overline{\alpha z} + \overline{\beta z'} = \overline{\alpha} g(z) + \overline{\beta} g(z')$
Prenons $z = 2, z' = i$ et prenons $\alpha = 1 + i$, $\beta = 2i$, on a :

$$g(\alpha z + \beta z') = g((1 + i).2 + 2i(i)) = -2i.$$
$$\alpha g(z) + \beta g(z') = (1 + i).2 + 2i(-i) = 4 + 2i \neq g(\alpha z + \beta z').$$

Mais si on considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, les scalaires α, β seront choisis de $\mathbb{R}$,

alors $\overline{\alpha} = \alpha$ et $\overline{\beta} = \beta$, donc dans ce cas g devient une application linéaire.
* g est un endomorphisme et puisque elle est bijective c'est un automorphisme.

3) La dérivation des polynômes $D : K[X] \to K[X]$ qui associe à chaque polynôme P son polynôme dérivé P' (**Voir Définition ??**) est une application linéaire. En effet : Soit $\alpha, \beta \in K$ et soit $P, Q \in K[X]$, on a :
$(D(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q' = \alpha D(P) + \beta D(Q))$.
* D est un endomorphisme qui n'est pas un automorphisme (D n'est pas injective).

Remarque 8.1.1 *Si f est une application linéaire, alors*
$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K, \forall a_1, a_2, ..., a_n \in K,$
$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n) = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + ... + \lambda_n f(a_n)$

Théorème 8.1.1 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :*
1) $f(0_E) = 0_F$
2) $\forall\, x \in E : f(-x) = -f(x)$
3) $Imf = f(E)$ est un sous espace vectoriel de F.
4) $\ker f = f^{-1}\{0_F\}$ est un sous espace vectoriel de E.
5) f est surjective $\Leftrightarrow Imf = F$
6) f est injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$

On rappelle que $Imf = f(E) = \{f(x) \ / \ x \in E\}$ et $\ker f = f^{-1}\{0_F\} = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$

Preuve :
1) On a : $f(0_E) = f(0_E) + 0_F = f(0_E) + f(0_E) - f(0_E)$
$= f(0_E + 0_E) - f(0_E) = f(0_E) - f(0_E) = 0_F$
2) Soit $x \in E$, on a :
$f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(0_E) = 0_F$, alors $f(-x) = -f(x)$.

3) D'après 1), on a $f(0_E) = 0_F$, alors $0_F \in \mathrm{Im}f$.
Soit $\alpha, \beta \in K$ et soit $y, y' \in \mathrm{Im}f$, alors $\exists x, x' \in E$, $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
On a $\alpha y + \beta y' = \alpha f(x) + \beta f(x') = f(\alpha x + \beta x') \in \mathrm{Im}f$,
alors $\mathrm{Im}f$ est un sous espace vectoriel de F.

4) D'après 1), on a $f(0_E) = 0_F$, alors $0_E \in \ker f$
Soit $\alpha, \beta \in K$ et soit $x, x' \in \ker f$.
On a $f(\alpha x + \beta x') = \alpha f(x') + \beta f(x') = \alpha 0_F + \beta 0_F = 0_F$, d'où $\alpha x + \beta x' \in \ker f$,
alors, $\ker f$ est un sous espace vectoriel de E.

5) On a : f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$
$\Leftrightarrow \forall y \in F, y \in \mathrm{Im}f$
$\Leftrightarrow F \subset \mathrm{Im}f$
$\Leftrightarrow F = \mathrm{Im}f$, car il est clair que $\mathrm{Im}f \subset F$
6) Supposons que f est injectif, alors :

$\ker f = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = \{x \in E \ / \ f(x) = f(0_E)\} = \{0_E\}$.
Inversement, supposons $\ker f = \{0_E\}$, et soit $x, x' \in E$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow f(x) - f(x') = 0_F \\ &\Rightarrow f(x - x') = 0_F \\ &\Rightarrow x - x' \in \ker f \\ &\Rightarrow x - x' = 0_E \\ &\Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

Alors f est injetive.
Exemples :
1) Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x + z)$.
$\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (2x + 3y - z, x + z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$.

$$\text{On a } \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = y = -x\}, \text{ alors } f \text{ n'est pas injective, car } \ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ \mathrm{Im} f &= \{f(x, y, z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(2x + 3y - z, x + z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(2, 1) + y(3, 0) + z(-1, 1) \ / \ x, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Alors $\mathrm{Im} f$ est le sous espace vectriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par la partie $G = \{(2, 1), (3, 0), (-1, 1)\}$ qui n'est pas libre (sinon $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = 3$, ce qui est impossible car $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$).
La partie G contient une base et comme la partie $G_1 = \{(2, 1), (3, 0)\}$ est libre, il existe une base A de $\mathrm{Im} f$ telle que $G_1 \subset A \subset G$, ce qui implque que $G_1 = A$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = 2$, d'où $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$ et par conséquent f est surjective.

8.2 Applications linéaires et dimensions

Théorème 8.2.1 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :*

$$\dim_K E = \dim_K(\ker f) + \dim_K(Imf).$$

Preuve : $\ker f$ est un sous espace de dimension finie de E.
Posons $k = \dim_K(\ker f)$ et soit $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ une base de $\ker f$, qu'on complète en base de E. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$, où $n = \dim_K E$.
Montrons que $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une base de $\mathrm{Im} f$.
Soit $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n \in K$,

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} f(e_{k+1}) + ... + \lambda_n f(e_n) = 0 &\Rightarrow f(\lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n \in \ker f \\ &\Rightarrow \exists \lambda_1, ..., \lambda_k \in K : \lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k \\ &\Rightarrow -\lambda_1 e_1 - ... - \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + ... + \lambda_n e_n = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une partie libre de $\mathrm{Im} f$.

Soit $y \in \mathrm{Im}f$, alors $\exists x \in E : y = f(x), x \in E$.
Or $\exists x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n \in K : x = x_1e_1 + ... + x_ke_k + x_{k+1}e_{k+1} + ... + x_ne_n$,
d'où $y = f(x_1e_1 + ... + x_ke_k + x_{k+1}e_{k+1} + ... + x_ne_n)$.
$= x_1f(e_1) + ... + x_kf(e_k) + x_{k+1}f(e_{k+1}) + ... + x_nf(e_n)$
$= x_{k+1}f(e_{k+1}) + ... + x_nf(e_n)$ car $\{e_1, e_2, ..., e_k\} \subset \ker f$.
Par conséquent $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une partie génératrice de $\mathrm{Im}f$.
En conclusion, $\{f(e_{k+1}), ..., f(e_n)\}$ est une base de $\mathrm{Im}f$, et $\dim_K(\mathrm{Im}f) = n - k$, ainsi, $n = \dim_K E = \dim_K(\mathrm{Im}f) + k = \dim_K(\mathrm{Im}f) + \dim_K(\ker f)$

Exemples :
1) Soit l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $g(a, b, c) = (b, a - b, b - c, a + 2c)$
$\ker g = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (b, a - b, b - c, a + 2c) = (0, 0, 0, 0)\}$,

On a $\begin{cases} b = 0 \\ a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$

Donc $\ker g = \{(0, 0, 0)\}$, alors g est injective.
On a $3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}g) + \dim_{\mathbb{R}}(\ker g) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}g)$, alors $\mathrm{Im}g \neq \mathbb{R}^4$, car $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Par conséquent g n'est pas surjective.

Corollaire 8.2.1 *Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :*
1) $\dim_K(Imf) = \dim_K E \Leftrightarrow f$ *est injective.*
2) $\dim_K(\ker f) = \dim_K E - \dim_K F \Leftrightarrow f$ *est surjective.*

Corollaire 8.2.2 *Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors :*
1) $\dim_K E = \dim_K F \Leftrightarrow E$ *est isomorphe à F.*
2) $\dim_K E = n \Leftrightarrow E$ *est isomorphe à K^n.*

8.2.1 Rang d'une application linéaire

Définition 8.2.1 *Le rang d'une application linéaire f noté $rg\ f$ est la dimension de son image. C.à.d : $rg\ f = \dim_K(Imf)$.*

Remarque 8.2.1 *En dimension finie, on a :*
1) $rg\ f = \dim_K(E) - \dim_K(\ker f)$, où E est l'espace de départ de f.
2) f est surjective $\Leftrightarrow rg\ f = \dim_K(F)$, où F est l'espace d'arrivée de f.

Exemples :
1) Soit l'application $h : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $h(P) = (X^2 + X + 4)P''$, où $\mathbb{R}_3[X]$ est l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus 3 et P'' le polynôme dérivé du polynôme dérivé de P **(voir Définition ??**)
Montrons que h est un endomorphisme et calculons son rang.

1) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$.
$h(\alpha P_1 + \beta P_2) = (X^2+X+4)(\alpha P_1 + \beta P_2)''$
$= \alpha(X^2+X+4)P_1'' + \beta(X^2+X+4)P_2'' = \alpha h(P_1) + \beta h(P_2)$
Alors h est une application linéaire.

Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.
$h(P) = (X^2+X+4)(2a_2 + 6a_3X)$
$= (6a_3)X^3 + (2a_2+6a_3)X^2 + (2a_2+24a_3)X + 8a_2$
$h(P) \in \mathbb{R}_3[X]$, donc h est un endomorphisme.

$\ker h = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ h(P) = 0\}$ et si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$

$$\text{On a } h(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6a_3 = 0 \\ 2a_2 + 6a_3 = 0 \\ 2a_2 + 24a_3 = 0 \\ 8a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

$\ker h = \{P = a_0 + a_1X \ / \ a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ qui admet $\{1, X\}$ comme base, donc $\dim_{\mathbb{R}}(\ker h) = 2$
et comme $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, alors $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.
En fin, $rg\ h = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[X]) - \dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 4 - 2 = 2$, et par suite h n'est pas surjective.

Théorème 8.2.2 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.*
Alors : $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire.

Preuve : Soit $\alpha, \beta \in K$ et soit $x, x' \in E$, on a :
$g \circ f(\alpha x + \beta x') = g(\alpha f(x) + \beta f(x')) = \alpha g(f(x)) + \beta g(f(x')) = \alpha g \circ f(x) + \beta g \circ f(x')$.

Théorème 8.2.3 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective.*
Alors : $f^{-1} : F \to E$ est une application linéaire.

Preuve : Soit $\alpha, \beta \in K$ et soit $y, y' \in F$.
Comme f est surjective, alors $\exists x, x' \in E$, $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
On peut écrire donc $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$.
On a : $f^{-1}(\alpha y + \beta y') = f^{-1}(\alpha f(x) + \beta f(x'))$
$= f^{-1}(f(\alpha x + \beta x'))$
$= \alpha x + \beta x'$, car $z = f(t) \Leftrightarrow t = f^{-1}(z)$
$= \alpha f^{-1}(y) + \beta f^{-1}(y')$

8.3 Exercices du chapitre 8

Exercice 8.1 *Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z, t) = (y, x + z - y, 3t - z)$*
Montrer que f, est une application linéaire, puis calculer $\dim \ker f$ *et* $\dim Imf$.

Exercice 8.2 *Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, définie par : $f(z_1, z_2) = (\overline{z_1} + iz_2, \overline{z_1} - z_2)$.*
Montrer que f n'est pas linéaire si on considère $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel complexe

et que f est linéaire si on considère $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel réel.
Déterminer $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2$, $\dim_{\mathbb{R}} (\ker f)$ *et* $\dim_{\mathbb{R}} (Imf)$. *En déduire si f est injective ou surjective.*

Exercice 8.3 *Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base d'un espace vectoriel réel E et soit φ l'endomorphisme de E défini par : $\varphi(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 4e_3$, $\varphi(e_2) = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $\varphi(e_3) = -e_1 - e_2 - e_3$.*
1) Montrer que l'ensemble P des vecteurs invariants par φ est un sous espace vectoriel de E et calculer sa dimension.
2) Soit $d = e_1 + e_2 + 2e_3$. et $D = \langle d \rangle$. Montrer que $E = P \oplus D$.

Exercice 8.4 *Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définies par : $f(P) = P + (1 - X)P'$*
Est ce que f est un automorphisme ?
($\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg P \leq 2\}$ et P' est le plynome dérivé de P)

Exercice 8.5 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f : E \to E$ une application linéaire. Montrer que :* $\ker f = Imf \Leftrightarrow (f \circ f \equiv 0$ *et* $n = 2rg(f))$

Chapitre 9

Matrices

9.1 Ensembles des matrices.

Définition 9.1.1 *Soit K un corps commutatif.*
On appelle matrice à coefficients dans K tout tableau réctangulaire ou carré de la forme $\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$
où les $A_{i,j}$ sont des éléments de K.

Si on note $(A_{i,j})$ cette matrice, alors :
** Les $A_{i,j}$ sont appelés coefficients ou termes de la matrice $(A_{i,j})$.*
** La matrice $(A_{i,j})$ est dite de type (m,n) si, elle est à m lignes et à n colonnes.*
L'ensemble des matrices de type (m,n) à coefficients dans K est noté $\mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

Remarque 9.1.1 *1) Les indices i et j sont, respectivement, le numéro de la ligne et le numéro de la colonne où se trouve l'élément $A_{i,j}$.*
2) Deux matrices $(A_{i,j})$ et $(B_{i,j})$ sont égales, si elles sont du même type et elles ont les mêmes coefficients.
C.à.d : $(A_{i,j}) = (B_{i,j}) \Leftrightarrow \forall i \in \{1,...,m\}, \forall j \in \{1,...,n\} : A_{i,j} = B_{i,j}$.
3) Chaque élément A de K est identifié à une matrice de type $(1,1)$, alors $\mathcal{M}_{(1,1)}(K) \simeq K$.

Exemples :
* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de type $(3,4)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Si on note cette matrice $(A_{i,j})$, alors $A_{1,1} = 1$, $A_{2,3} = -2$, $A_{2,4} = 0$, et $A_{3,3} = 2$.
* $\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ (avec $i^2 = -1$), est une matrice de $M_{(2,2)}(\mathbb{C})$.
Si on note cette matrice $(B_{k,l})$, alors $B_{1,2} = 0$, et $A_{2,1} = -2i$.

9.1.1 Matrices particulières

Définition 9.1.2 .
** Une matrice est appelée matrice nulle et est notée* 0, *si pour tout* i *et* j *on a :* $A_{i,j} = 0$.
** Une matrice est appelée matrice ligne d'ordre* n, *si elle est de type* $(1, n)$.
** Une matrice est appelée matrice colonne d'ordre* m, *si elle est de type* $(m, 1)$.
** Une matrice est appelée matrice carrée d'ordre* n, *si elle est de type* (n, n).
** Une matrice est appelée matrice triangulaire supérieure d'ordre* n, *si elle est de type* (n, n) *et* $A_{i,j} = 0$ *pour* $i > j$.
** Une matrice est appelée matrice triangulaire inférieure d'ordre* n, *si elle est de type* (n, n) *et* $A_{i,j} = 0$ *pour* $i < j$.
** Une matrice est appelée matrice diagonale d'ordre* n, *si elle est de type* (n, n), *et* $A_{i,j} = 0$ *pour* $i \neq j$.
** Une matrice est appelée matrice identité d'ordre* n *et est noté* I_n, *si elle est de type* (n, n), $A_{i,i} = 1$ *pour tout* i *et* $A_{i,j} = 0$ *pour* $i \neq j$.

Exemples :
* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et sont les matrices nulles de types, respectifs, $(3, 2)$ et $(2, 2)$.
* $(1, 6, -2, 0, 1)$ et $(0, 1)$ sont des matrices lignes d'ordres respectifs : 4 et 2.
* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}et\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices colonnes d'ordres respectifs : 2 et 3.
* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices carrées d'ordres, respectifs : 3 et 2.
* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont des matrices triangulaires supérieures d'ordres, respectifs : 3, et 2.
* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont des matrices triangulaires inférieures d'ordres, respectifs : 4 et 3.
* $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales d'ordres, respectifs : 3, et 2.
* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont respectivement les matrices identités I_3 et I_2, d'ordres, respectifs : 3 et 2.

Remarque 9.1.2 *Le coefficient* $(I_n)_{i,j}$ *de la matrice identité* I_n *est souvent noté* $\delta_{i,j}$ *et est appelé symbole de* ***Kronecker****.*$(\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \ si \ i \neq j \\ 1 \ si \ i = j \end{cases})$

9.1.2 Transposée d'une matrice

Définition 9.1.3 *On appelle transposée de la matrice* A *de* $\mathcal{M}_{(m,n)}(K)$*, la matrice de* $\mathcal{M}_{(n,m)}(K)$ *notée* ${}^tA$ *et définie par* $({}^tA)_{i,j} = A_{j,i}$.

Remarque 9.1.3
1) ${}^tA$ *est la matrice dont les lignes sont les colonnes de* A.
2) ${}^t({}^tA) = A$
3) Si ${}^tA = A$*, la matrice* A *est dite symétrique.*

Exemples :
1) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ d'où A est symétrique.

9.2 Opérations sur les matrices

9.2.1 Addition des matrices et multiplication par scalaire

Définition 9.2.1 *Soient* $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$*,* $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ *et* $\alpha \in K$*. On définit la somme* $A + B$ *et le produit par scalaire* $\alpha \bullet A$ *par :*

$$A + B = \left((A+B)_{i,j}\right) \text{ avec } (A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

et $\alpha \bullet A = \left((\alpha \bullet A)_{i,j}\right)$ *avec* $(\alpha \bullet A)_{i,j} = \alpha \bullet A_{i,j}$

Remarque 9.2.1 *La somme de matrices est définie si, les matrices sont du même type.*

Exemple :
Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, alors
$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $3 \bullet \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 3 & 0 & 18 \end{pmatrix}$,
La somme $A + M$ n'est pas définie, car $A \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_{(3,4)}(\mathbb{R})$.

9.2.2 Multiplication des matrices

Définition 9.2.2 *Soient* $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ *et* $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,k)}(K)$. *On définit le produit* $A.B$ *par :*

$$A.B = \left((A.B)_{i,j}\right), \text{ avec } (A.B)_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} A_{i,p}.B_{p,j}$$

Remarque 9.2.2 *1) Le produit de matrices est défini si, le nombre des colonnes de la première matrice est égal au nombre des lignes de la deuxième matrice.*
2) Les coefficients de la matrice produit $A.B$, *sont :*

$$\begin{aligned}(AB)_{i,j} &= \sum_{p=1}^{n} A_{i,p}.B_{p,j} = A_{i,1}.B_{1,j} + A_{i,2}.B_{2,j} + ... + A_{i,n}.B_{n,j} \\ &= \underbrace{(A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,n})}_{i^{ème}\ ligne\ de\ A}. \underbrace{\begin{pmatrix} B_{1,j} \\ B_{2,j} \\ \vdots \\ B_{n,j} \end{pmatrix}}_{j^{ème}\ colonne\ de\ B}\end{aligned}$$

Exemples :

1) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, alors

$A.B = \left((AB)_{i,j}\right)$ est une matrice du type $(2,4)$ avec

$$(AB)_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 3 \times (-1) = -3$$

$$(AB)_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 0 \times 2 + 6 \times (-1) = -5$$

$$(AB)_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times 4 + (-1) \times 3 + 3 \times 0 = 5$$

$$(AB)_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 4 + 0 \times 3 + 6 \times 0 = 4$$

$$(AB)_{1,3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times 2 + (-1) \times 1 + 3 \times (-2) = -3$$

$$(AB)_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + 0 \times 1 + 6 \times (-2) = -10$$

$$(AB)_{1,4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times (-1) + (-1) \times 0 + 3 \times 2 = 4$$

$$(AB)_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 0 \times 0 + 6 \times 2 = 11$$

C.à.d : $A.B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 & 4 \\ -5 & 4 & -10 & 11 \end{pmatrix}$

Le produit $B.A$ n'est pas défini, car $B \in \mathcal{M}_{(3,4)}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})$.

Propriétés *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ *;* $C, D \in \mathcal{M}_{(n,k)}(K)$ *et* $Q \in \mathcal{M}_{(k,s)}(K)$, *alors :*
1) $I_m.A = A = A.I_n$
2) $(A+B).C = A.C + B.C$ *et* $A.(C+D) = A.C + A.D$
3) $A.(C.Q) = (A.C).Q$
4) $\alpha \bullet (A.C) = (\alpha \bullet A).C = A.(\alpha \bullet C)$ *où* $\alpha \in K$.
5) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ *et* ${}^t(\alpha \bullet A) = \alpha \bullet {}^tA$ *où* $\alpha \in K$.
6) ${}^t(A.C) = {}^tC.{}^tA$
7) $A.0 = 0$ *et* $0.A = 0$ *où* 0 *désigne les matrices nulles convenables.*
8) On peut avoir $A.C = 0$, *avec* $A \neq 0$ *et* $C \neq 0$.

Théorème 9.2.1 *L'ensemble* $\mathcal{M}_{(m,n)}(K)$ *muni de l'addition des matrices et la multiplication par scalaire est un* K*-espace vectoriel de dimension* $m \times n$..

Exemple : $\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})\right) = 6$ et les matrices suivantes forment une base de $\mathcal{M}_{(2,3)}(\mathbb{R})$

$$E^{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E^{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E^{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E^{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E^{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.2.3 Matrices inversibles

Définition 9.2.3 *On dit qu'une matrice carée* $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$ *est inversible s'il existe une matrice* $B \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$ *telle que* $A.B = I_n = B.A$.

La matrice inverse B, *si elle existe, est notée* A^{-1}

Exemples :

Cherchons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

C.à.d, cherchons $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$ telle que $A.B = I_2 = B.A$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} B_{1,1} - 2B_{2,1} = 1 \\ -B_{1,1} + 3B_{2,1} = 0 \\ B_{1,2} - 2B_{2,2} = 0 \\ -B_{1,2} + 3B_{2,2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_{2,1} = 1 \\ B_{1,1} = 3 \\ B_{1,2} = 2 \\ B_{2,2} = 1 \end{cases}$$

donc $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

et puisque $B.A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$

2) Cherchons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

C.à.d, cherchons $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2 = BA$.

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B_{1,1} - 2B_{2,1} = 1 \\ -B_{1,1} + B_{2,1} = 0 \\ 2B_{1,2} - 2B_{2,2} = 0 \\ -B_{1,2} + B_{2,2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ B_{1,1} = B_{2,1} \\ 2B_{1,2} - 2B_{2,2} = 0 \\ -B_{1,2} + 1B_{2,2} = 1 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solutions, donc B n'existe pas et A n'est pas inversible.

Proposition 9.2.1 *Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_{(n,n)}(K)$, alors :*
1) A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2) $A.B$ est inversible et $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

9.3 Matrices et applications linéaires

Définition 9.3.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, où E et F sont des K-espaces vectoriels de dimensions finies de bases respectives $B_E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $B_F = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$.*

On appelle matrice associée à f relativement aux bases B_E et B_F, et on note $Mat_f(B_E, B_F)$, la matrice :

$$Mat_f(B_E, B_F) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & \cdots & f(e_n) & \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \vdots \\ \leftarrow f_m, \end{array}$$

où $A_{i,j}$ sont tels que $f(e_j) = A_{1,j}f_1 + A_{2,j}f_2 + ... + A_{m,j}f_m$.

Remarque 9.3.1 *1) Chaque colonne de $Mat_f(B_E, B_F)$ est formée des composantes de l'image d'un élément de la base B_E dans la base B_F.*
2) $Mat_f(B_E, B_F)$ dépend des bases choisies.

Exemples :
1) Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x+3y-z, x+z)$, et soient $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et $B_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0),(0,1)\}$ des bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

On a : $\begin{cases} f(1,0,0) = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1) \\ f(0,1,0) = (3,0) = 3(1,0) + 0(0,1) \\ f(0,0,1) = (-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1) \end{cases}$, donc $Mat_f(B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Soit la même application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x+3y-z, x+z)$, et soient $B'_{\mathbb{R}^3} = \{(1,1,0),(0,1,1),(2,1,0)\}$ et $B'_{\mathbb{R}^2} = \{(-1,0),(2,1)\}$ des bases respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

On a : $\begin{cases} f(1,1,0) = (5,1) = \alpha(-1,0) + \beta(2,1) \\ f(0,1,1) = (2,1) = \alpha'(-1,0) + \beta'(2,1), \\ f(2,1,0) = (7,2) = \alpha''(-1,0) + \beta''(2,1) \end{cases}$ ce qui entaîne $\begin{cases} \alpha = -3 \text{ et } \beta = 1 \\ \alpha' = 0 \text{ et } \beta' = 1 \\ \alpha'' = -3 \text{ et } \beta'' = 2, \end{cases}$

donc $Mat_f\left(B'_{\mathbb{R}^3}, B'_{\mathbb{R}^2}\right) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $h(P) = (X^2+X+4)P''$, où $\mathbb{R}_3[X]$ est l'espace des polynômes de degré au plus 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$, qui admet $B_{\mathbb{R}_3[X]} = \{1, X, X^2, X^3\}$ comme base.

On a : $\begin{cases} h(1) = 0 \\ h(X) = 0 \\ h(X^2) = 8 + 2X + 2X^2 \\ h(X^3) = 24X + 6X^2 + 6X^3 \end{cases}$, donc $Mat_h\left(B_{\mathbb{R}_3[X]}, B_{\mathbb{R}_3[X]}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition 9.3.1 *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimensions finies et de bases respectives B_E, B_F et B_G et soient $f_1 : E \to E, f : E \to F$, $g : E \to F$ et $h : F \to G$ des applications linéaires, et $\alpha \in K$. Alors :*
1) $Mat_{f+g}(B_E, B_F) = Mat_f(B_E, B_F) + Mat_g(B_E, B_F)$
2) $Mat_{\alpha \bullet f}(B_E, B_F) = \alpha \bullet Mat_f(B_E, B_F)$
3) $Mat_{h \circ f}(B_E, B_G) = Mat_h(B_F, B_G).Mat_f(B_E, B_F)$
4) $f_1 = Id_E \Leftrightarrow Mat_{f_1}(B_E, B_E) = I_n$ (où Id_E est l'application identique de E et I_n est la matrice identité d'ordre $n = dimE$)
5) Si f est un isomorphisme $\Leftrightarrow Mat_f(B_E, B_F)$ est inversible.
De plus $Mat_{f^{-1}}(B_F, B_E) = (Mat_f(B_E, B_F))^{-1}$

Théorème 9.3.1 (Changements de bases et matrices) *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, où E et F sont des K-espaces vectoriels de dimensions finies et soient $B_E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $B'_E = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ deux bases de E et $B_F = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$, $B'_F = \{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$ deux bases de F, alors :*

$$Mat_f(B'_E, B'_F) = (Mat_{Id_F}(B'_F, B_F))^{-1}.Mat_f(B_E, B_F).Mat_{Id_E}(B'_E, B_E).$$

Définition 9.3.2 *Soient B_E et B'_E deux bases d'un K-espace vectoriel E.*

On appelle matrice de passage de la base B_E à la base B'_E, la matrice

$$P = Mat_{Id_E}\left(B'_E, B_E\right).$$

(P a comme coefficients les composantes des vecteurs de la base B'_E dans la base B_E).

Remarque 9.3.2 *Si $P = Mat_{Id_E}\left(B'_E, B_E\right)$, alors $P^{-1} = Mat_{Id_E}\left(B_E, B'_E\right)$*

Exemple : Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x+3y-z, x+z)$, et soient $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et $B'_{\mathbb{R}^3} = \{(1,1,0),(0,1,1),(2,1,0)\}$ des bases de $\mathbb{R}^3$; et $B_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0),(0,1)\}$ et $B'_{\mathbb{R}^2} = \{(-1,0),(2,1)\}$ des bases de $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$A = Mat_f\left(B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = Mat_{Id_{\mathbb{R}^3}}\left(B'_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \begin{cases} (1,0) = \alpha(-1,0) + \beta(2,1) \\ (0,1) = \alpha'(-1,0) + \beta'(2,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \text{ et } \beta = 0 \\ \alpha' = 2 \text{ et } \beta' = 1 \end{cases},$$

$$\text{d'où } Q^{-1} = Mat_{Id_{\mathbb{R}^2}}\left(B_{\mathbb{R}^2}, B'_{\mathbb{R}^2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{alors } A' &= Mat_f\left(B'_{\mathbb{R}^3}, B'_{\mathbb{R}^2}\right) = Q^{-1}.A.P \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9.4 Rang d'une matrice

Définition 9.4.1 *Le rang d'une matrice $A = (A_{i,j})$ est le nombre maximum de vecteurs colonnes de A linéairement indépendants.*

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On vérifie facilement que $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ n'est pas libre et que $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ est libre. Alors $rg(A) = 2$.

Proposition 9.4.1 *Une matrice $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$ est inversible, ssi, $rg(A) = n$.*

9.5 Déterminant d'une matrice

Définition 9.5.1 *Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$.*
On appelle déterminant de A et on note $\det A$, le scalaire de K défini par :

* *Pour* $n = 1$, $\det A = A_{1,1}$.
* *Pour* $n > 1$,
$\det A = A_{1,1}.\ \det \underset{(1,1)}{A} - A_{1,2}.\ \det \underset{(1,2)}{A} + .. + (-1)^{1+j} A_{1,j}.\ \det \underset{(1,j)}{A} + .. + (-1)^{1+n} A_{1,n}.\ \det \underset{(1,n)}{A}$
Où $\underset{(i,j)}{A}$ *est la matrice obtenue à partir de* A *en supprimant* $A_{i,\bullet}$ *(la* $i-$*ème ligne) et* $A_{\bullet,j}$ *(la* $j-$*ème colonne).*

Cas n = 2 : $\det \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = A_{1,1}.\det(A_{2,2}) - A_{1,2}.\det(A_{2,1})$
$= A_{1,1}.A_{2,2} - A_{1,2}.A_{2,1}$

Cas n = 3 :
$$\det \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix} = A_{1,1}.\det \begin{pmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix} - A_{1,2}.\det \begin{pmatrix} A_{2,1} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,3} \end{pmatrix} + A_{1,3}\det \begin{pmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{pmatrix}$$
$$= A_{1,1}(A_{2,2}A_{3,3} - A_{3,2}A_{2,3}) - A_{1,2}(A_{2,1}A_{3,3} - A_{3,1}A_{2,3}) + A_{1,3}(A_{2,1}A_{3,2} - A_{3,1}A_{2,2})$$

Remarque 9.5.1 *1)* $\det A$ *est parfois noté* $|A|$.
2) Le déterminant $\det \underset{(i,j)}{A}$ *est appelé déterminant mineur d'indices* i *et* j *de* A.

Exemple :
$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2.\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 1.\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 0\det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 2 \times (-7) - 1 \times 1 + 0 \times 3 = -15$$

9.5.1 Propriétés fondamentales des déterminants

Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$ *et* $\lambda \in K$. *On a les propriétés suivantes :*
D1 : $\det I_n = 1$
D2 : $\det A$ *est linéaire par rapport à chaque colonne de* A.
D3 : $\det A = 0$, *si* A *a deux colonnes identiques.*
D4 : $\det A$ *change de signe lorsqu'on échange deux colonnes.*
D5 : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
D6 : $\det A = 0$, *si une colonne de* A *est nulle.*
D7 : $\det A$ *ne change pas si on ajoute à une colonne de* A *une combinaison linéaire des autres colonnes de* A.
C.à.d :
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\det\left(A_{\bullet,1},..,\alpha A_{\bullet,j}+\beta A'_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right) = \alpha\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$
$+\beta\det\left(A_{\bullet,1},..,A'_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$
$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,n}\right)=0$ *si* $A_{\bullet,j}=A_{\bullet,j'}$ *pour* $j\neq j'$
$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,n}\right)=-\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j'},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$
$\det\left(\lambda\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)\right)=\lambda^n\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$
$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,..,A_{\bullet,n}\right)=0$ *si* $A_{\bullet,j}=0$
$$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j}+\sum_{p\neq j}\alpha_p A_{\bullet,p},..,..,A_{\bullet,n}\right)=\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$$
où $A_{\bullet,1}$, $A_{\bullet,2}$,. . . ,$A_{\bullet,n}$ *sont les colonnes de* A *et* α_p, α, β *des scalaires de* K.

Preuve : Raisonnons par récurrence sur n.
Montrons D1). *Pour $n=1$, on a $\det I_1=\det(1)=1$
*Supposons la propriété D1) vraie pour toute matrice I_p d'ordre $p\leq n-1$.
$$\begin{aligned}\det I_n &= 1.\det\underset{(1,1)}{I_n}-0.\det\underset{(1,2)}{I_n}+..+0.(-1)^{1+j}\det\underset{(1,j)}{I_n}+..+(-1)^{1+n}0.\det\underset{(1,n)}{I_n}\\ &= \det\underset{(1,1)}{I_n}=\det I_{n-1}=1,\end{aligned}$$
car par hypothèse de récurrence, $\det I_{n-1}=1$.
Montrons D2). Posons $A''=\left(A_{\bullet,1},..,\alpha A_{\bullet,j}+\beta A'_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$
$A=\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$, $\quad A'=\left(A_{\bullet,1},..,A'_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right)$.
*Pour $n=1$, on a $\det(A'')=\det(\alpha A+\beta A')=\alpha A+\beta A'=\alpha\det A+\beta\det A'$.
*Supposons la propriété D2) vraie pour toute matrice d'ordre $p\leq n-1$.
$$\det A''=A''_{1,1}.\det\underset{(1,1)}{A''}-A''_{1,2}.\det\underset{(1,2)}{A''}+..+(-1)^{1+j}A''_{1,j}.\det\underset{(1,j)}{A''}+..+(-1)^{1+n}A''_{1,n}.\det\underset{(1,n)}{A''},$$
or $A''_{1,k}=A_{1,k}=A'_{1,k}$ pour tout $k\neq j$ et $A''_{1,j}=\alpha A_{1,j}+\beta A'_{1,j}$.
$\det\underset{(1,j)}{A''}=\det\underset{(1,j)}{A}=\det\underset{(1,j)}{A'}$ et par hypothèse de récurrence,
on a : $\det\underset{(1,k)}{A''}=\alpha\det\underset{(1,k)}{A}+\beta\det\underset{(1,k)}{A'}$, car $\underset{(1,k)}{A''}$ est d'ordre $n-1$, pour tout $k\neq j$.
Alors
$$\begin{aligned}\det A'' &= A_{1,1}.\left(\alpha\det\underset{(1,1)}{A}+\beta\det\underset{(1,1)}{A'}\right)-A_{1,2}.\left(\alpha\det\underset{(1,2)}{A}+\beta\det\underset{(1,2)}{A'}\right)+..\\ &\quad ..+(-1)^{1+j}\left(\alpha A_{1,j}+\beta A'_{1,j}\right).\det\underset{(1,j)}{A}+..+(-1)^{1+n}A_{1,n}.\left(\alpha\det\underset{(1,n)}{A}+\beta\det\underset{(1,n)}{A'}\right)\\ &= \alpha\left(A_{1,1}.\det\underset{(1,1)}{A}-A_{1,2}.\det\underset{(1,2)}{A}+..+(-1)^{1+j}A_{1,j}.\det\underset{(1,j)}{A}+..+(-1)^{1+n}A_{1,n}.\det\underset{(1,n)}{A}\right)\\ &\quad +\beta\left(A_{1,1}.\det\underset{(1,1)}{A'}-A_{1,2}.\det\underset{(1,2)}{A'}..+(-1)^{1+j}A'_{1,j}.\det\underset{(1,j)}{A}+..+(-1)^{1+n}A_{1,n}.\det\underset{(1,n)}{A'}\right)\\ &= \alpha\left(A_{1,1}.\det\underset{(1,1)}{A}-A_{1,2}.\det\underset{(1,2)}{A}+..+(-1)^{1+j}A_{1,j}.\det\underset{(1,j)}{A}+..+(-1)^{1+n}A_{1,n}.\det\underset{(1,n)}{A}\right)\\ &\quad +\beta\left(A'_{1,1}.\det\underset{(1,1)}{A'}-A'_{1,2}.\det\underset{(1,2)}{A'}..+(-1)^{1+j}A'_{1,j}.\det\underset{(1,j)}{A'}+..+(-1)^{1+n}A'_{1,n}.\det\underset{(1,n)}{A'}\right)\\ &= \alpha\det A+\beta\det A'\end{aligned}$$
Montrons D3) et D4). Commençons par une matrice ayant deux colonnes voisines identiques. Soit $A=\left(\begin{array}{cccccccc}A_{\bullet,1} & ,.. & A_{\bullet,j} & ,A_{\bullet,j+1} & ,.. & A_{\bullet,n}\end{array}\right)$, avec $A_{\bullet,j}=A_{\bullet,j+1}$

*Pour $n = 1$, nous n'avons qu'une seule colonne, et les propriété D3) et D4) n'ont pas de sens.

*Pour $n = 2$, on a : $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,1} \\ A_{2,1} & A_{2,1} \end{pmatrix} = A_{1,1}A_{2,1} - A_{2,1}A_{1,1} = 0.$

*Supposons la propriété vraie pour toute matrice d'ordre $p \leq n-1$.

$$\begin{aligned} \det A &= A_{1,1}.\det \underset{(1,1)}{A} - .. + (-1)^{1+j} A_{1,j}.\det \underset{(1,j)}{A} + (-1)^{1+j+1} A_{1,j+1}.\ \det \underset{(1,j\neq 1)}{A} + \\ &\quad ... + (-1)^{1+n} A_{1,n}.\det \underset{(1,n)}{A}, \end{aligned}$$

or $\det \underset{(1,j)}{A} = \det \underset{(1,j\neq 1)}{A}$ car $\underset{(1,j)}{A} = \underset{(1,j\neq 1)}{A}$,

et par hypothèse de récurrence, $\det \underset{(1,k)}{A} = 0$ pour tout $k \neq j$ et $k \neq j+1$, car les matrices $\underset{(1,k)}{A}$ d'ordere $n-1$ contiennent deux colonnes identiques.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \det A &= (-1)^{1+j} A_{1,j}.\det \underset{(1,j)}{A} + (-1)^{1+j+1} A_{1,j+1}.\ \det \underset{(1,j\neq 1)}{A} \\ &= (-1)^{1+j} A_{1,j}.\det \underset{(1,j)}{A} - (-1)^{j+1} A_{1,j+1}.\det \underset{(1,j)}{A} = 0 \end{aligned}$$

** En utilisant la linéarité du déterminant par rapport aux colonnes, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j} + A_{\bullet,j+1}, A_{\bullet,j+1} + A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n}) \\ &= \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, A_{\bullet,j+1}, .., A_{\bullet,n}) + \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n}) \\ &\quad + \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j+1}, A_{\bullet,j+1}, .., A_{\bullet,n}) + \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j+1}, A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n}) \\ &= \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, A_{\bullet,j+1}, .., A_{\bullet,n}) + \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j+1}, A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n}) \end{aligned}$$

d'où l'égalité :

$\det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, A_{\bullet,j+1}, .., A_{\bullet,n}) = -\det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j+1}, A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n})$.

Pour montrer D3) dans le cas général, on déplace $A_{\bullet,j}$ à $A_{\bullet,j'}$ et en tenant compte du fait que $A_{\bullet,j} = A_{\bullet,j'}$ pour $j < j'$, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,n}) &= (-1)^{j'-j-1} \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,n}) \\ &= (-1)^{j'-j-1} \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n}) = 0 \text{ d'où D4).} \end{aligned}$$

Concernant D4) dans le cas général, on procède comme dans le cas particulier précédent :

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j} + A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,j'} + A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n}) \\ &= \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,n}) + \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,n}) \\ &\quad + \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n}) + \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n}) \\ &= \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,n}) + \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n}) \end{aligned}$$

d'où l'égalité :

$\det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,n}) = -\det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j'}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n})$

Montrons D5). En appliquant n fois D2), on obtient :

$\det(\lambda(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n})) = \det(\lambda A_{\bullet,1}, .., \lambda A_{\bullet,j}, .., \lambda A_{\bullet,n}) = \lambda^n \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, .., A_{\bullet,n})$

Montrons D6). Si $A_{\bullet,j} = 0$, alors $A_{\bullet,j} = 0.A_{\bullet,j}$, et par application de D2), on obtient : $\det(A_{\bullet,1}, .., 0.A_{\bullet,j}, .., .., A_{\bullet,n}) = 0 \det(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, .., .., A_{\bullet,n}) = 0.$

Montrons D7). Par application de D2) et D3), on obtient :

$$\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j}+\sum_{p\neq j}\alpha_p A_{\bullet,p},..,..,A_{\bullet,n}\right) = \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,..,A_{\bullet,n}\right) + \sum_{p\neq j}\alpha_p \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,p},..,..,A_{\bullet,n}\right) = \det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,j},..,A_{\bullet,n}\right).$$

Car $\det\left(A_{\bullet,1},..,A_{\bullet,p},..,..,A_{\bullet,n}\right)$ contient la colonne $A_{\bullet,p}$ deux fois.

Remarque 9.5.2 *Les propriétés que nous venons de montrer permettent de ramener le calcul du déterminant d'une matrice A au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.*

Exemples :

1) $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (En ajoutant la $1^{ère}$colonne à la $3^{ème}$colonne)

$= \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{5}{3} & 2 \\ 4 & -\frac{10}{3} & 3 \end{pmatrix}$ (En ajoutant la $1^{ère}$colonne multipliée par $-\frac{1}{3}$ à la $2^{ème}$ colonne)

$= 3\det\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 \\ -\frac{10}{3} & 3 \end{pmatrix} = 3\times\left(\frac{15}{3}+\frac{20}{3}\right) = 35$

2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (En soustrayant la $1^{ère}$colonne de la $3^{ème}$colonne)

$= 0$ (car la $2^{ème}$colonne et la $3^{ème}$ colonne sont identiques)

Proposition 9.5.1 *Soit $A=(A_{i,j})$ et $B=(B_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{(n,n)}(K)$. On a :*

$$\det(BA) = \det B \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1),1}...A_{\sigma(j),j}...A_{\sigma(n),n}$$

où S_n est l'ensemble des permutations de $\{1,2,...,n\}$ et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ de S_n.

Corollaire 9.5.1 *Soit $A=(A_{i,j})$, $B=(B_{i,j})\in\mathcal{M}_{(n,n)}(K)$. On a :*
1) $\det A = \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1),1}...A_{\sigma(j),j}...A_{\sigma(n),n}$.
2) $\det(BA) = \det B.\det A$
3) A est inversible $\Leftrightarrow \det A\neq 0$.
De plus, si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Preuve :

1) $\det A = \det(I_n A) = \det I_n \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1),1}...A_{\sigma(j),j}...A_{\sigma(n),n}$

$= \sum_{\sigma\in S_n}\epsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1),1}...A_{\sigma(j),j}...A_{\sigma(n),n}$

2) $\det(BA) = \det B \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) A_{\sigma(1),1}...A_{\sigma(j),j}...A_{\sigma(n),n} = \det B.\det A$
3.1) Si A est inversible, alors il existe une matrice $B \in M_{(n,n)}(K)$ vérifiant : $BA = I_n$ d'où $\det B.\det A = \det(BA) = \det I_n = 1$, alors $\det A \neq 0$.
3.2) Pour la réciproque, raisonnons par contraposée.
Si A n'est pas inversible, alors $rg(A) \neq n$, ainsi les vecteurs colonnes $A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j}, ..., A_{\bullet,n}$ de A, sont linéairement dépendantes, c'est à dire, il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_j, ..., \lambda_n$ non tous nuls vérifiants $\lambda_1 A_{\bullet,1} + .. + \lambda_j A_{\bullet,j} + ... + \lambda_n A_{\bullet,n} = 0$, alors pour un $\lambda_j \neq 0$, on peut écrire $\frac{\lambda_1}{\lambda_j} A_{\bullet,1} + .. + \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} A_{\bullet,j-1} + A_{\bullet,j} + \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} A_{\bullet,j+1} + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_j} A_{\bullet,n} = 0$, et d'après les propriétés **D7** et **D6**, on conclut que

$$\det A = \det\left(A_{\bullet,1}, .., A_{\bullet,j} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^{n} \frac{\lambda_p}{\lambda_j} A_{\bullet,p}, ..., A_{\bullet,n}\right) = \det(A_{\bullet,1}, .., 0, ..., A_{\bullet,n}) = 0$$

3.3) Enfin, si A est inversible, on a :
$\det(A^{-1}) \det(A) = \det(A^{-1}A) = \det I_n = 1$, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Corollaire 9.5.2 *Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$. Alors :*
1) $\det({}^tA) = \det A$
2) Toute propriété vérifiée par $\det A$ *par rapport aux colonnes de A est aussi vérifiée par* $\det A$ *par rapport aux lignes de A.*
*(En particulier les propriétés **D1), D2), D3), D4), D5), D6)** et **D7))***

Preuve :
1) $$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) ({}^tA)_{\sigma(1),1} ... ({}^tA)_{\sigma(j),j} ... ({}^tA)_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) A_{1,\sigma(1)}...A_{j,\sigma(j)}...A_{n,\sigma(n)}\end{aligned}$$
et en remarquant que $A_{j,\sigma(j)} = A_{\sigma^{-1}(j'),j'}$ (c.à.d $\sigma(j) = j'$), on peut réarranger le produit $A_{1,\sigma(1)}...A_{j,\sigma(j)}...A_{n,\sigma(n)}$ suivant l'ordre croissant des $\sigma(j)$, pour qu'il devienne $A_{\sigma^{-1}(1),1}...A_{\sigma^{-1}(j'),j'}...A_{\sigma^{-1}(n),n}$.
Alors $$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) A_{\sigma^{-1}(1),1}...A_{\sigma^{-1}(j'),j'}...A_{\sigma^{-1}(n),n} \\ &= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \epsilon(\sigma^{-1}) A_{\sigma^{-1}(1),1}...A_{\sigma^{-1}(j'),j'}...A_{\sigma^{-1}(n),n} \\ &= \sum_{\sigma'\in S_n} \epsilon(\sigma') A_{\sigma'(1),1}...A_{\sigma'(j'),j'}...A_{\sigma'(n),n} \\ &= \det A\end{aligned}$$
car $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$ et σ^{-1} parcourt S_n, si et seulement, si σ parcourt S_n.
2) On a $\det({}^tA) = \det A$, alors toute propriété vérifiée par $\det({}^tA)$ par rapport aux colonnes de ${}^tA$, devient vérifiée par $\det A$ par rapport aux lignes de A.

Définition 9.5.2 *Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$.*
1) On appelle cofacteur d'indices i et j de A et on note $(cofA)_{i,j}$ le scalaire défini par $(cofA)_{i,j} = (-1)^{i+j}.\ \det A_{(i,j)}$
2) On appelle matrice des cofacteurs ou comatrice de A et on note $cofA$ la matrice

de $\mathcal{M}_{(n,n)}(K)$ dont les coefficients sont les cofacteurs de A.
C.à.d : $cofA = \left((cofA)_{i,j}\right)$.
Où $\underset{(i,j)}{A}$ est la matrice obtenue à partir de A en supprimant $A_{i,\bullet}$ (la $i-$ème ligne) et $A_{\bullet,j}$ (la $j-$ème colonne).

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(cofA)_{1,1} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 6$, $(cofA)_{1,3} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -3$

$(cofA)_{2,1} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$, $(cofA)_{2,3} = (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -4$

9.5.2 Développement d'un déterminant suivant une ligne et suivant une colonne

Soit $A = (A_{i,j})$ une matrice de $M_{(n,n)}(K)$. Alors :

1) $\det A = A_{i,1}.(cofA)_{i,1} + ... + A_{i,j}.(cofA)_{i,j} + ... + A_{i,n}.(cofA)_{i,n}$

2) $\det A = A_{1,j}.(cofA)_{1,j} + ... + A_{i,j}.(cofA)_{i,j} + ... + A_{n,j}.(cofA)_{n,j}$

Théorème 9.5.1 *Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{(n,n)}(K)$, alors l'inverse de A est donné par $A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t cofA)$,*
où $cofA$ est la matrice des cofacteurs de A.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\det A = 1 \times 6 + (-1) \times (-1) + 0 \times (-3) = 7$

$cofA = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t cofA) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

9.6 Exercices du chapitre 9

Exercice 9.1 *Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.*
1) Caluler, si c'est possible, $(A+B)^t(A-B)$, A^2, ${}^tBB$, ${}^tBB - A^tA$.
2) Trouver les matrices inverses de $\frac{1}{4}(A+B)^t(A-B)$ et ${}^tBB$ (si elles existent).

Exercice 9.2 *Donner les matrices associées à chacune des applications linéaires suivantes, relativement aux bases canoniques de leurs espaces de départ et d'arrivée.*
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g \circ f$ et $f_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, ($\mathbb{C}^2$ étant un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel),

définies par : $f(x,y,z)=(x+y+z,x-y+2z,x-2y-z)$,
$g(x,y,z)=(-x+y+z,x-y+z)$ *et* $f_1(z_1,z_2)=(\overline{z_1}+iz_2,\overline{z_1}-z_2)$

Exercice 9.3 *Soit* $E=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.
1) Montrer que E *est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$ *et donner une base de* E.
2) Soit $f: E\to E$ *définie par* $f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a+b+c \end{pmatrix}$;
Montrer que f *est un endomorphisme de* E *et déterminer sa matrice suivant la base trouvée, la dimension de son noyau et son rang.*
Est-ce que la matrice de f *est inversible ?*

Exercice 9.4 *Soit* $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ *l'application linéaire dont la matrice associée relativement aux bases canoniques est* $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -8 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ *et soient*
$B'_{\mathbb{R}^3}=\{(7,4,-3),(3,5,-2),(10,-9,4)\}$ *et* $B'_{\mathbb{R}^2}=\{(6,-4),(5,-3)\}$.
1) Trouver les matrices de passage des bases canoniques aux bases $B'_{\mathbb{R}^3}$ *et* $B'_{\mathbb{R}^2}$.
2) Calculer la matrice associée à g *relativement aux bases* $B'_{\mathbb{R}^3}$ *et* $B'_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 9.5 *Soit* $f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}^3$ *définie par :* $f(P)=(P(1),P'(1),P''(1))$
1) Déterminer la matrice A *associée à* f *relativement aux bases canoniques.*
2) Déterminer la base $\overline{B}_{\mathbb{R}_2[X]}$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$ *vérifiant*
$Mat_f\left(\overline{B}_{\mathbb{R}_2[X]},BC_{\mathbb{R}^3}\right)=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, *où* $BC_{\mathbb{R}^3}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.6 *Soient* $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer $\det A$, $\det B$, $\det C$, $\det(2A)$, $\det(2C)$, $\det(BC)$, $\det(B+C)$,

Chapitre 10

Systèmes algébriques linéaires

10.1 Notion de système algébrique linéaire

Définition 10.1.1 *Soient* $m, n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle système linéaire à m *équations et* n *inconnues à coefficients dans un corps commutatif* K *tout système d'équations de la forme*

$$\begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + ... + A_{1,n}x_n = b_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + ... + A_{2,n}x_n = b_2 \\ ..... \\ A_{m,1}x_1 + A_{m,2}x_2 + ... + A_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

où $(A_{i,j}) \in M_{(m,n)}(K)$ *et* $(b_i) \in M_{(m,1)}(K)$
Si on note (S) *ce système, alors :*
** Les* $A_{i,j}$ *sont appelés coefficients, les* x_j *inconnues et les* b_i *seconds membres du système* (S).
** La matrice* $A = (A_{i,j})$ *est appelée matrice du système* (S) *et son rang est appelé rang du système* (S).
** Si les seconds membres* b_i *sont tous nuls, le système* (S) *est dit homogène.*

Remarque 10.1.1 *1) Le système linéaire* (S) *de matrice* A *peut s'écrire sous la forme matricielle* $AX = B$, *où* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.
2) Le n*-uplet* ${}^tU = (u_1, u_2, ..., u_n) \in K^n$ *est une solution du système* (S), *s'il vérifie* $AU = B$.
La résolution d'un système est la détermination de l'ensemble de ses solutions.
3) Deux systèmes (S) *et* (S') *sont dits équivalents s'ils ont les mêmes ensembles de solutions.*

Exemple :
Le système $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ est un système linéaire à 2 équations et 3 inconnues à coefficients réels et de matrice est $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
${}^t\left(\frac{2}{5}, 0, -\frac{1}{5}\right)$ est une solution du système, par contre ${}^t(0,0,0)$ n'est pas une solution du système.

10.1.1 Système de Cramer

Définition 10.1.2 *Un système algébrique linéaire $AX = B$ est dit de Cramer si sa matrice A est carrée et de déterminant non nul.*

10.1.2 Formules de Cramer

Théorème 10.1.1 *Si un système algébrique linéaire $AX = B$ est de Cramer, alors il admet une solution unique ${}^tX = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donnée par les formules :*

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A \\ {\scriptstyle A_{\bullet,j} \leftarrow B} \end{pmatrix},$$

où $\underset{A_{\bullet,j}\leftarrow B}{A}$ est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la j-ème colonne $A_{\bullet,j}$ par la colonne $B = {}^t(b_1, b_2, ..., b_m)$.

$$C.à.d : x_j = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,j-1} & b_1 & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & \cdots & A_{2,j-1} & b_2 & A_{2,j+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,j-1} & b_m & A_{m,j+1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

Preuve : Le système s'écrit aussi, $x_1 A_{\bullet,1} + x_2 A_{\bullet,2} + ... + x_n A_{\bullet,n} = B$, alors

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A \\ {\scriptstyle A_{\bullet,j} \leftarrow B} \end{pmatrix} &= \det \left(A_{\bullet,1}, ..., A_{\bullet,j-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k A_{\bullet,k}, A_{\bullet,j+1}, ..., A_{\bullet,n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \det \left(A_{\bullet,1}, ..., A_{\bullet,j-1}, A_{\bullet,k}, A_{\bullet,j+1}, ..., A_{\bullet,n} \right) \\ &= x_j \det \left(A_{\bullet,1}, ..., A_{\bullet,j-1}, A_{\bullet,j}, A_{\bullet,j+1}, ..., A_{\bullet,n} \right), = x_j \det A \end{aligned}$$

et comme $\det A \neq 0$, alors la solution est unique et $x_j = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A \\ {\scriptstyle A_{\bullet,j} \leftarrow B} \end{pmatrix}$

Exemple : Soit (S) le système $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$
La matrice associée à (S) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\det A = 3$, alors le système (S) est de Cramer et sa solution unique est :

$$x_1 = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1, \qquad x_2 = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-10}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.$$

Définition 10.1.3 *Soient $A = (A_{i,j}) \in M_{(m,n)}(K)$ et $p \in \{1, 2, ..., \min(m,n)\}$*
On appelle matrice carrée d'ordre p extraite de A toute matrice obtenue à partir de A en supprimant $m - p$ lignes et $n - p$ colonnes.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ sont des matrices carrées d'orde 2 extraites de A.

$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 4 & 3 & -1 \\ -6 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices carrées d'orde 3 extraites de A.

10.1.3 Résolution d'un système algébrique linéaire par la méthode de Cramer

Soit (S) le système algébrique linéaire $AX = B$, d'inconnue $X = {}^t(x_1, x_2, ..., x_n)$, de second membre $B = {}^t(b_1, b_2, ..., b_m)$ et de matrice $A = (A_{i,j}) \in M_{(m,n)}(K)$.

Soit $A' = \begin{pmatrix} A_{i_1,j_1} & A_{i_1,j_2} & \cdots & A_{i_1,j_r} \\ A_{i_2,j_1} & A_{i_2,j_2} & \cdots & A_{i_2,j_r} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{i_r,j_1} & A_{i_r,j_2} & \cdots & A_{i_r,j_r} \end{pmatrix}$ une des matrices carrées extraites de A de déterminant non nul et d'ordre le plus grand.

* Les inconnues $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$ deviennent des inconnues principales et les inconnues $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, ..., x_{j_n}$ deviennent des paramètres.

* Le système (S') défini par

$$\begin{cases} A_{i_1,j_1}x_{j_1} + \cdots + A_{i_1,j_r}x_{j_r} = b_{i_1} - \left(A_{i_1,j_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \cdots + A_{i_1,j_n}x_{j_n}\right) \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{i_r,j_1}x_{j_1} + \cdots + A_{i_r,j_r}x_{j_r} = b_{i_r} - \left(A_{i_r,j_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \cdots + A_{i_r,j_n}x_{j_n}\right) \end{cases}$$ de matrice A'

est de Cramer, alors il admet une solution unique $X' = {}^t(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r})$ donnée en fonction des paramètres $x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}$.

* Si la solution de (S') vérifie les $m - r$ équations

$$\begin{cases} A_{i_{r+1},j_1}x_{j_1} + \cdots + A_{i_{r+1},j_r}x_{j_r} = b_{i_{r+1}} - \left(A_{i_{r+1},j_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \cdots + A_{i_{r+1},j_n}x_{j_n}\right) \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{i_n,j_1}x_{j_1} + \cdots + A_{i_n,j_r}x_{j_r} = b_{i_n} - \left(A_{i_n,j_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \cdots + A_{i_n,j_n}x_{j_n}\right) \end{cases}$$ qui res-

tent de (S), alors ${}^tX = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont les solutions de (S), et si l'une des $m-r$ équations n'est pas vérifieé par la solution de (S'), alors le système (S) n'a pas de solution.

Exemples :

1) Soit le système $(S_1) : \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \end{array} \right.$

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice du système (S_1)

$A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de A_1 de déterminant non nul et d'ordre le plus grand, alors le système $(S'_1) : \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = -2x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 + x_3 \end{array} \right.$ est de Cramer et il admet la solution (x_1, x_2) telle que :

$x_1 = \frac{1}{\det A'_1} \det \begin{pmatrix} -2x_3 & -3 \\ 1 + x_3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}(-5x_3 + 3)$

$x_2 = \frac{1}{\det A'_1} \det \begin{pmatrix} 1 & -2x_3 \\ 2 & 1 + x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}(5x_3 + 1)$

Par suite $\left(\frac{1}{10}(-5x_3 + 3), \frac{1}{10}(5x_3 + 1), x_3\right)$ avec $x_3 \in \mathbb{R}$ sont les solutions de (S_1).

2) Soit le système $(S_2) : \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right.$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, est la matrice du système (S_2).

$A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de A_2 de déterminant non nul et d'ordre 3 , alors le système $(S'_2) : \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right.$ est de Cramer et il admet la solution (x_1, x_2, x_3) telle que :

$x_1 = \frac{1}{\det A'_2} \det \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{\det A'_2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}$

$x_2 = \frac{1}{\det A'_2} \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$

La solution $(x_1, x_2, x_2) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$, ne vérifie pas l'équation $3x_1 + x_2 + x_3 = 2$ qui reste, par suite le système (S) n'a pas de solutions.

10.2 Exercices du chapitre 10

Exercice 10.1 *Résoudre, par la méthode de Cramer, les sytèmes réels suivants.*

$$(S_1):\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ 3x-2y+2z=5 \\ 5x-3y-z=16 \end{cases},\ (S_2):\begin{cases} 2x+3y=3 \\ x-2y=5 \\ 3x+2y=7 \end{cases},\ (S_3):\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1 \\ x-2y+z+5t=5 \end{cases}$$

Exercice 10.2 *Soit* $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Est ce qu'il existe une matrice réelle carrée X *vérifiant* $AX+XA=I_2$ *?*

Exercice 10.3 *Résoudre et discuter, suivant le paramètre réel* α*, le syetème réel suivant :* $(S_1):\begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ 3x+y-\alpha z=\alpha \end{cases}$

Chapitre 11

Sujets d'examens

Sujet d'examen N 1

Exercice 01 :

Soit S la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : aSb \Leftrightarrow \tfrac{a+2b}{3} \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que S est une relation d'équivalence.
Déterminer les classes d'équivalence de : -1 ; 0 et 1.

Exercice 02 :

1) Montrer que $\forall p, p' \in \mathbb{N}^* - \{1\} : -\frac{1}{2} < \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} < \frac{1}{2}$.
2) Soit $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}^* - \{1\}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'application définie par : $f(p, q) = p + \frac{1}{q}$.
2.1) Déterminer $f\{(-2, 2) ; (0, 3)\}$ et $f^{-1}\{1\}$.
2.2) Montrer que f est injective.
2.3) f est-elle bijective ? (justifier).

Exercice 03 : Soit Δ la loi de composition définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x, y \in]1, +\infty[: x\Delta y = (x-1)(y-1) + 1$$

1) Vérifier que Δ est une loi interne.
2) Montrer que $(]1, +\infty[, \Delta)$ est un groupe commutatif.
3) Est ce que $\left(\left\{\frac{4}{3}; \frac{3}{2}; 2; 3; 4\right\}, \Delta\right)$ est un sous groupe du groupe $(]1, +\infty[, \Delta)$?

Solution de l'exercice 01 :

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$, on a : $\frac{a+2a}{3} = a \in \mathbb{Z}$, c.à.d aSa.
Alors S est reflexive.

2) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, on a :
$aSb \implies \frac{a+2b}{3} \in \mathbb{Z} \implies a + 2b = 3k$, avec $k \in \mathbb{Z}$
$\implies a = 3k - 2b$, avec $k \in \mathbb{Z} \implies 2a = 6k - 4b$, avec $k \in \mathbb{Z}$
$\implies b + 2a = 3(2k - b)$, avec $k \in \mathbb{Z}$
$\implies \frac{b+2a}{3} \in \mathbb{Z} \implies bSa$
Alors S est symetrique.

2) Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on a :
$aSb \wedge bSc \implies \left(\frac{a+2b}{3} \in \mathbb{Z}\right) \wedge \left(\frac{b+2c}{3} \in \mathbb{Z}\right)$
$\implies \frac{a+2b}{3} + \frac{b+2c}{3} \in \mathbb{Z} \implies \frac{a+2c}{3} + b \in \mathbb{Z}$
$\implies \frac{a+2c}{3} \in \mathbb{Z} \implies aSc$
Alors S est transitive.
Par suite S est une relation d'équivalence.

2) $\widehat{\overset{\bullet}{(-1)}} = \{a \in \mathbb{Z} : aS(-1)\}$
$aS(-1) \Leftrightarrow \frac{a-2}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 3k + 2$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors $\widehat{\overset{\bullet}{(-1)}} = \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} + 2$.

$\overset{\bullet}{0} = \{a \in \mathbb{Z} : aS0\}$
$aS0 \Leftrightarrow \frac{a+0}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 3k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors $\overset{\bullet}{0} = \{3k : k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$.

$\overset{\bullet}{1} = \{a \in \mathbb{Z} : aS1\}$
$aS1 \Leftrightarrow \frac{a+2}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 3k - 2$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors $\overset{\bullet}{1} = \{3k - 2 : k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} - 2 = 3\mathbb{Z} + 1$.

Solution de l'exercice 02 :

1) Soient $p, p' \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, c.à.d : $p \geq 2$ et $p' \geq 2$, donc
$0 < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{p'} \leq \frac{1}{2}$, d'où $0 < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{p'} < 0$,
alors $-\frac{1}{2} < \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} < \frac{1}{2}$.

2) $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}^* - \{1\}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par : $f(p, q) = p + \frac{1}{q}$.
2.1) $f\{(-2, 2), (0, 3)\} = \left\{\frac{-3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$.
On a : $p + \frac{1}{q} = 1 \implies \frac{1}{q} = 1 - p \implies \frac{1}{q} \in \mathbb{Z} \implies (q = 1 \vee q = -1)$
mais $q = 1 \vee q = -1$ est impossible car $q \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.
Alors $f^{-1}\{1\} = \phi$.

2.2) Soient (p, q) ; $(p', q') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}^* - \{1\})$, on a :

$$\begin{aligned} f(p,q) = f(p',q') &\Longrightarrow p + \tfrac{1}{q} = p' + \tfrac{1}{q'} \\ &\Longrightarrow \tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{q'} = p' - p \\ &\Longrightarrow \left(\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{q'} = p' - p\right) \wedge \left(\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{q'}\right) \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \left(\tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{q'} = 0\right) \wedge (0 = p' - p), \text{ d'après la 1ère question.} \\ &\Longrightarrow (p' = p) \wedge (q = q') \Longrightarrow (p,q) = (p',q') \end{aligned}$$

Alors f est injective.

2.3) D'après la question 2) $f^{-1}\{1\} = \phi$, alors f n'est pas surjective, donc elle n'est pas bijective.

Solution de l'exercice 03 :

1) Soient $x, y \in]1, +\infty[$; c,à,d $x - 1 > 0$ et $y - 1 > 0$, donc $(x-1)(y-1) > 0$, d'où $(x-1)(y-1) + 1 > 1$, c,à,d $x \Delta y \in]1, +\infty[$.

Alors Δ est une loi interne.

2) Montrons que $(]1, +\infty[, \Delta)$ est un groupe commutatif.

2.1) Soient $x, y \in]1, +\infty[$, on a :

$y \Delta x = (y-1)(x-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1 = x \Delta y$.

Alors Δ est commutative.

2.2) Soient $x, y, z \in]1, +\infty[$, on a :

$(x \Delta y) \Delta z = ((x-1)(y-1) + 1) \Delta z = (x-1)(y-1)(z-1) + 1$

$x \Delta (y \Delta z) = x \Delta ((y-1)(z-1) + 1) = (x-1)(y-1)(z-1) + 1 = (x \Delta y) \Delta z$

Alors Δ est associative.

2.3) Cherchons $e \in]1, +\infty[$, tel que $\forall x \in]1, +\infty[: e \Delta x = x \Delta e = x$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } x \Delta e = x &\Longleftrightarrow (x-1)(e-1) + 1 = x \Longleftrightarrow (x-1)(e-1) = x - 1 \\ &\Longleftrightarrow e - 1 = 1 \Longleftrightarrow e = 2. \end{aligned}$$

Puisque $2 \in]1, +\infty[$ et Δ est commutative, alors $e = 2$ est l'élément neutre de la loi Δ.

2.4) Soit $x \in]1, +\infty[$, cherchons $x' \in]1, +\infty[$, tel que $x' \Delta x = x \Delta x' = 2$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } x \Delta x' = 2 &\Longleftrightarrow (x-1)(x'-1) + 1 = 2 \Longleftrightarrow (x-1)(x'-1) = 1 \\ &\Longleftrightarrow x' = \tfrac{1}{x-1} + 1. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{x-1} + 1 \in]1, +\infty[$ et Δ est commutative, alors $x' = \frac{1}{x-1} + 1$ est le symétrique de x par rapport à la loi Δ.

Par suite $(]1, +\infty[, \Delta)$ est un groupe commutatif.

3) On a : $e = 2 \in]1, 3[$.

Il suffit de prendre $x = \frac{8}{2} \in]1, 3[$ et $y = \frac{5}{2} \in]1, 3[$; on a :

$x \Delta y^{-1} = 3\Delta(4)^{-1} = 3\Delta\left(\frac{1}{4-1} + 1\right) = 3\Delta\left(\frac{4}{3}\right) = (3-1)\left(\frac{4}{3} - 1\right) + 1 = \frac{5}{3} \notin \left\{\frac{4}{3}; \frac{3}{2}; 2; 3; 4\right\}$

Alors $\left(\left\{\frac{4}{3}; \frac{3}{2}; 2; 3; 4\right\}, \Delta\right)$ n'est pas un sous groupe du groupe $(]1, +\infty[, \Delta)$.

Sujet d'examen N 2

Exercice 01 :

Sur $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on définit les deux lois $\boxplus$ et $\odot$ par
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall (x,y), (x',y') \in E$:
$(x,y) \boxplus (x',y') = (xx', yy')$ et $\alpha \odot (x,y) = (x^\alpha, y^\alpha)$.
On admet que $(E, \boxplus)$ est un groupe commutatif.
Montrer que $(E, \boxplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 02 :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ par :
$f(x,y,z,t) = (x - y + z, 0, x + y - z + t, t)$
1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\ker f$ et sa dimension.
3. Donner la dimension de Imf est dire si f est surjective ?
4. Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et donner sa dimension.
5. E et $\ker f$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 03 :

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Soient $a = e_1 - e_2 + e_3$, $b = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $c = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$
1. Montrer que $B' = (a,b,c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de B à B'. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice A' de g dans la base B'.
4. Calculer A'. En déduire A'^{4n}, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 01 :

1) $(E, \boxplus)$ etant un groupe commutatif, il reste à vérifier les propriétés liées à la deuxème loi $\odot$.

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(x,y), (x',y') \in E$.

2.0) On a $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $x^\alpha, y^\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; c,à,d : $(x^\alpha, y^\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = E$.
Alors la loi $\odot$ est une loi externe dans E à coefficients dans $\mathbb{R}$.

2.1) $\begin{aligned} \alpha \odot ((x,y) \boxplus (x',y')) &= \alpha \odot (xx', yy') = ((xx')^\alpha, (yy')^\alpha) \\ &= (x^\alpha x'^\alpha, y^\alpha y'^\alpha) = (x^\alpha, y^\alpha) \boxplus (x'^\alpha, y'^\alpha) \\ &= \alpha \odot (x,y) \boxplus \alpha \odot (x',y'). \end{aligned}$

2.2) $\begin{aligned} (\alpha+\beta) \odot (x,y) &= \left(x^{(\alpha+\beta)}, y^{(\alpha+\beta)}\right) = \left(x^\alpha x^\beta, y^\alpha y^\beta\right) \\ &= (x^\alpha, y^\alpha) \boxplus \left(x^\beta, y^\beta\right) \\ &= \alpha \odot (x,y) \boxplus \beta \odot (x,y). \end{aligned}$

2.3) $\begin{aligned} (\alpha.\beta) \odot (x,y) &= \left(x^{(\alpha.\beta)}, y^{(\alpha.\beta)}\right) = \left(\left(x^\beta\right)^\alpha, \left(y^\beta\right)^\alpha\right) \\ &= \alpha \odot \left(x^\beta, y^\beta\right) \\ &= \alpha \odot (\beta \odot (x,y)) \end{aligned}$

2.4) $1 \odot (x,y) = (x^1, y^1) = (x,y)$

Par suite $(E, \boxplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution de l'exercice 02 :

1) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z,t), (x',y',z',t') \in \mathbb{R}^4$. On a :

$f(\alpha(x,y,z,t) + \beta(x',y',z',t')) = f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t')$

$= (\alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y' + \alpha z + \beta z', 0, \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' - \alpha z - \beta z' + \alpha t + \beta t', \alpha t + \beta t')$

$= (\alpha x - \alpha y + \alpha z, 0, \alpha x + \alpha y - \alpha z + \alpha t, \alpha t) + (\beta x' - \beta y' + \beta z', 0, \beta x' + \beta y' - \beta z' + \beta t', \beta t')$

$= \alpha(x - y + z, 0, x + y - z + t, t) + \beta(x' - y' + z', 0, x' + y' - z' + t', t')$

$= \alpha f(x,y,z,t) + \beta f(x',y',z',t')$

Alors f est linéaire.

2) $\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : f(x,y,z,t) = 0\}$

On a $f(x,y,z,t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ t = 0 \end{cases}$

$\ker f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = t = 0 \text{ et } y = z\}$

Soit $(x,y,z,t) \in \ker f$,

On a $(x,y,z,t) = (0,z,z,0) = z(0,1,1,0)$

Il est clair que $(0,1,1,0) \in \ker f$, donc $\{(0,1,1,0)\}$ est une partie génératrice de $\ker f$.

Puisque $(0,1,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ alors $\{(0,1,1,0)\}$ est libre.

Par suite $\{(0,1,1,0)\}$ est une base de $\ker f$ et $\dim \ker f = 1$

3) On a $\dim Imf = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker f = 4 - 1 = 3$.

$\dim Imf \neq \dim \mathbb{R}^4$, alors f n'est pas surjective.

4) $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0\}$

4.1) On a $0 + 0 - 0 + 0 = 0$, alors $0_{\mathbb{R}^4} \in E$. On a

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z,t), (x',y',z',t') \in E$. On a

$\alpha(x,y,z,t) + \beta(x',y',z',t') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t')$ et

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y'-\alpha z-\beta z'+\alpha t+\beta t' &= \alpha(x+y-z+t)+\beta(x'+y'-z'+t')\\ &= \alpha(0)+\beta(0)=0,\end{aligned}$$

alors $\alpha(x,y,z,t)+\beta(x',y',z',t')\in E$.

Par suite E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

4.2) Soit $(x,y,z,t)\in E$; c,à,d $z=x+y+t$.

$$\begin{aligned}\text{On a } (x,y,z,t) &= (x,y,x+y+t,t)=(x,0,x,0)+(0,y,y,0)+(0,0,t,t)\\ &= x(1,0,1,0)+y(0,1,1,0)+t(0,0,1,1)\end{aligned}$$

Il est clair que $(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\in E$,

alors $A=\{(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\}$ est une partie génératrice de E.

Soit $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$;

$$\text{On a } \lambda_1(1,0,1,0)+\lambda_2(0,1,1,0)+\lambda_3(0,0,1,1)=0_{\mathbb{R}^4}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

Alors A est libre.

Par suite A est une base de E et $\dim E=3$.

5) On remarque que $(0,1,1,0)\in\ker f\cap E$, donc $\ker f\cap E\neq\{0\}$,

d'où E et $\ker f$ ne sont pas supplémentaires

Solution de l'exercice 03 :

1) Soit $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}&\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c=0\Rightarrow\lambda_1(e_1-e_2+e_3)+\lambda_2(2e_1-e_2+e_3)+\lambda_3(2e_1-2e_2+e_3)=0\\ &\Rightarrow(\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3)e_1+(-\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)e_2+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e_3=0\\ &\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=0\\ -\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2=0\\ -\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\\ \lambda_3=0\end{cases}\end{aligned}$$

Alors B' est une partie libre.

Puisque B' est libre dans $\mathbb{R}^3$ et $\dim\mathbb{R}^3=3$, alors B' est libre maximale,

donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$

$$2)\ P=Mat_{Id}(B',B)=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&-1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\text{ car }\begin{matrix}Id(a)=a=e_1-e_2+e_3\\ Id(b)=b=2e_1-e_2+e_3\\ Id(c)=c=2e_1-2e_2+e_3\end{matrix}.$$

$$\text{Soit } P'=\begin{pmatrix}x&y&z\\x'&y'&z'\\x''&y''&z''\end{pmatrix}$$

$$P'P=I_3\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x&y&z\\x'&y'&z'\\x''&y''&z''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&-1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ 2x-2y+z=0 \\ x'-y'+z'=0 \\ 2x'-y'+z'=1 \\ 2x'-2y'+z'=0 \\ x''-y''+z''=0 \\ 2x''-y''+z''=0 \\ 2x''-2y''+z''=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=2 \\ x'=1 \\ y'=1 \\ z'=0 \\ x''=0 \\ y''=-1 \\ z''=-1 \end{cases}$$

$P^{-1}=P'=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $P'P=I_3$.

3) $A'=P^{-1}AP$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'^4=A'^2A'^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

$A'^{4n}=(I_3)^n=I_3$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Sujet d'examen N 3

Exercice 01 :

Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
1) Déterminer $f\left(\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}\right)$ et $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}\right)$.
2) f -est elle injective ? Est-elle surjective ?
3) Montrer que la restriction $g : [-1,0] \longrightarrow [0,1]$, $g(x) = f(x)$ est bijective.
4) Déterminer l'application réciproque g^{-1}.

Exercice 02 :

Soit S la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ xSy \Longleftrightarrow (|x| \geq |y| \text{ et } xy \geq 0)$$

1) Montrer que S est une relation d'ordre.
2) L'ordre est-il total ?

Exercice 03 :

Soit $*$ la loi de composition définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, (x,y) * (x',y') = \left(xx', yx' + y'x^2\right)$$

1) Vérifier que $*$ est une loi interne.
2) Calculer $(-1,1) * (-1,2)$ et $(-1,2) * (-1,1)$.
3) La loi $*$ est-elle commutative ?
4) Montrer que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ est un groupe
3) On a $(-1,1) * (-1,2) \neq (-1,2) * (-1,1)$,
4) Montrons que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ est un groupe.

Solution de l'exercice 01 : 1) $f\left(\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\}\right)=\left\{\sqrt{\frac{3}{4}},0\right\}$ et $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2},2\right\}\right)=\left\{-\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}\right\}$.

2) Etudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

2.1)Il suffit de prendre $x=-\frac{1}{2}$ et $x'=\frac{1}{2}$, on a :

$f(-\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{3}{4}}=f(\frac{1}{2})$ et $-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$.

Alors f n'est pas injective.

2.2) Il suffit de prendre $y=2$, il n'existe aucun $x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=2$, car l'équation $\sqrt{1-x^2}=2$ n'a pas de solution réelle.

Alors f n'est pas surjective.

3) Soit $g:[-1,0]\to[0,1]$ telle que $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

3.1) Soit $x,x'\in[-1,0]$, on a :

$$\begin{aligned} g(x)=g(x') &\Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x'^2}\\ &\Rightarrow x^2=x'^2\\ &\Rightarrow x=x' \text{ , car } x,x' \text{ sont de même signe.}\end{aligned}$$

Alors f est injective.

3.2) Soit $y\in[0,1]$, cherchons $x\in[-1,0]$ tel que $y=g(x)$.

on a : $$\begin{aligned} y=g(x) &\Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}\\ &\Rightarrow x^2=1-y^2\\ &\Rightarrow \left(x=-\sqrt{1-y^2}\vee x=\sqrt{1-y^2}\right)\end{aligned}$$

Il suffit de prendre : $x=-\sqrt{1-y^2}$, car

$$\begin{aligned} 0\leq y\leq 1 &\Rightarrow -1\leq -y^2\leq 0\\ &\Rightarrow 0\leq \sqrt{1-y^2}\leq 1\\ &\Rightarrow -1\leq -\sqrt{1-y^2}\leq 0\end{aligned}$$

Alors f est surjective.

Par suite f est bijective.

4) $g^{-1}:[0,1]\to[-1,0]$ avec $g^{-1}(y)=x=-\sqrt{1-y^2}$.

Solution de l'exercice 02 :

1) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

1.1) Soient $x\in\mathbb{R}$.

On a $|x|\geq|x|$ et $x^2\geq 0$, donc $x\mathcal{S}x$.

Alors $\mathcal{S}$ est reflexive.

1.2) Soient $x,y\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \quad (x\mathcal{S}y\wedge y\mathcal{S}x) &\Rightarrow \begin{cases} |x|\geq|y| \text{ et } xy\geq 0\\ |y|\geq|x| \text{ et } yx\geq 0\end{cases}\\ &\Rightarrow (|x|=|y| \text{ et } xy\geq 0)\\ &\Rightarrow x=y\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{S}$ est antisymetrique.

1.3) Soient $x,y,z\in\mathbb{R}$

$$\text{On a } (x\mathcal{S}y \wedge y\mathcal{S}z) \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq |y| \text{ et } xy \geq 0 \\ |y| \geq |z| \text{ et } yz \geq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (|x| \geq |z| \text{ et } xy^2z \geq 0)$$

On étudie deux cas :

1er cas : Si $y \neq 0$, on a

$$(|x| \geq |z| \text{ et } xy^2z \geq 0) \Rightarrow (|x| \geq |z| \text{ et } xz \geq 0)$$
$$\Rightarrow x\mathcal{S}z$$

1er cas : Si $y = 0$, on a

$$\begin{cases} |x| \geq |y| \text{ et } xy \geq 0 \\ |y| \geq |z| \text{ et } yx \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 0 \text{ et } xy \geq 0 \\ 0 \geq |z| \text{ et } yz \geq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 0 \text{ et } xy \geq 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow |x| \geq |z| \text{ et } xz \geq 0$$
$$\Rightarrow x\mathcal{S}z$$

Alors $\mathcal{S}$ est transitive.

Par suite $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

2) Il suffit de prendre $x = 3$ et $y = -2$, on a :

$|3| \geq |-2|$ et $3(-2) \ngeq 0$, c.à.d : $3\not\mathcal{S}(-2)$

et $|-2| \ngeq |3|$ et $(-2)3 \ngeq 0$, c.à.d : $(-2)\not\mathcal{S}3$

Alors $\mathcal{S}$ est un ordre partiel.

Solution de l'exercice 03 :

1) Vérifions que $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, c.à.d $x, x' \in \mathbb{R}^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$,

donc $xx' \in \mathbb{R}^*$ et $yx' + y'x^2 \in \mathbb{R}$, d'où $(x, y) * (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Alors $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

2) $(-1, 1) * (-1, 2) = (1, 1)$ et $(-1, 2) * (-1, 1) = (1, -1)$.

3) On a $(-1, 1) * (-1, 2) \neq (-1, 2) * (-1, 1)$,

Alors $*$ n'est pas commutative.

4) Montrons que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

4.1) Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') &= (xx', yx' + y'x^2) * (x'', y'') \\ &= \left(xx'x'', (yx' + y'x^2)x'' + y''(xx')^2\right) \\ &= (xx'x'', yx'x'' + y'x^2x'' + y''x^2x'^2) \\ (x, y) * ((x', y') * (x'', y'')) &= (x, y) * (x'x'', y'x'' + y''x'^2) \\ &= (xx'x'', yx'x'' + (y'x'' + y''x'^2)x^2) \\ &= (xx'x'', yx'x'' + y'x''x^2 + y''x'^2x^2) \\ &= ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') \end{aligned}$$

Alors la loi $*$ est associative dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

4.2) Cherchons $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, vérifiant

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : (x, y) * (e_1, e_2) = (x, y)$ et $(e_1, e_2) * (x, y) = (x, y)$

On a $(x,y)*(e_1,e_2)=(x,y) \Leftrightarrow (xe_1, ye_1+e_2x^2)=(x,y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xe_1 = x \\ ye_1 + e_2x^2 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

Il suffit de prendre $(e_1,e_2)=(1,0)\in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ et soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.
On a : $(x,y)*(1,0)=(x.1, y.1+0.x^2)=(x,y)$ et
$(1,0)*(x,y)=(1.x, 0.x+y.1^2)=(x,y)$
Alors $(1,0)$ est l'élément neutre de la loi $*$ dans $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.
4.3) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, cherchons $(x',y')\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, vérifiant :
$(x,y)*(x',y')=(1,0)$ et $(x',y')*(x,y)=(1,0)$

On a $(x,y)*(x',y')=(1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ yx' + y'x^2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = -\frac{y}{x^3} \end{cases}$$

Il suffit de prendre $(x',y')=\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3}\right)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.
On a : $(x,y)*\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3}\right)=\left(x\frac{1}{x}, y\frac{1}{x}+\left(-\frac{y}{x^3}\right)x^2\right)=(1,0)$ et
$\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3}\right)*(x,y)=\left(\frac{1}{x}x, \left(-\frac{y}{x^3}\right)x+y\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)=(1,0)$
Alors $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^3}\right)$ est l'élément inverse de (x,y) par rapport à la loi $*$ dans $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.
Par suite $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}, *)$ est un groupe.

Bibliographie

[1] E. Ramis, C. Deschamps et D. Odoux, Cours de mathématiques spéciales, 1 algèbre, 2^e édition, Masson, 1993.

[2] M. Mechab, Cours d'algèbre, Maths1, LMD Sciences et Techniques, www.univ-sba.dz/fsi/lmd/ALGEBRE.pdf.

[3] A. I. Kostrikin, Introduction L'Algèbre, Mir Moscou, 1981.

[4] M. Zitouni, ALGÈBRE, Office des Publications Universitaires (OPU), Alger, 1993.

[5] M. Queysanne, ALGÈBRE, Premier cycle Scientifique, préparation aux Grandes Écoles, Office des Publications Universitaires (OPU), Alger, 1984.

[6] J. Rivaud, Exercices d'Algèbre, Vuibert, Paris, 1982.

[7] S. Lipschutz, ALGEBRE LINEAIRE, Cours et Problems, McGraw-Hill, Paris, 1977.

[8] C. Baba-Hamed et K. Benhabib, ALGEBRE I, Rappels de cours et Exercices avec solutions , Office des Publications Universitaires (OPU), Alger, 2015.