RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET

Faculté de mathématiques et informatique

Département de mathématiques

INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES MÉTHODES ET APPLICATIONS

(Un polycopié destiné aux étudiants de master 1 Mathématiques)(**M1**)

Réalisé par :

Dr. **Halim Benali**

benali.halim@univ-tiaret.dz

Expertisé par :

Pr. **Senouci Abdelkader** - Université Ibn Khaldoun, Tiaret.

Pr.**Hedia Benaouda** - Université Ibn Khaldoun, Tiaret.

-2019-

Table des matières

INTRODUCTION

Le fascicule intitulé **"Introduction aux Equations intégrales linéaires : Méthodes et applications "** est conçu pour servir de guide et de référence,pour être accessible aux étudiants .

Dans ce fascicule on introduit et on explique les méthodes classiques. L'objectif de ce fascicule est d'offrir un guide pratique des équations intégrales linéaires en mettant l'accent sur la nécessité d'assimiler les notions sur les équations intégrales en résolvant des exercises .

De nombreux exemples et exercices sont donnés dans chaque section pour permettre á l'étudiant de vérifier ses connaissances sur les équations intégrales linéaires .

Le fascicule comprend une introduction et cinq chapitres qui traitent les équations intégrales et Intégro-différentielles linéaires en utilisant certaines des méthodes traditionnelles .

Le chapitre 1 fournit les définitions et les concepts de base : La série Taylor, la règle de différentiation de Leibnitz et la méthode du transformé de Laplace sont présentées . Ces notions sont nécessaires á l'étude des chapitres qui suivent.

Au chapitre 2, les classifications des équations intégrales et intégro-différentielles sont présentées et illustrées par des exemples. En outre, la linéarité et les concepts d'homogènèité des équations intégrales sont abordés.

Les chapitres 3,4 et 5 soulignent l'importance des méthodes proposées pour résoudre ces equations.

Dans le chapitre 3 on présente les équations linéaires intégrales de Volterra du premier et du second type, respectivement. Chaque type est abordé par une variété de méthodes qui sont décrites en détails. Le chapitre 3 donne á l'étudiant une analyse complète des deux types d'équations.

Le chapitre 4 est entièrement consacré aux équations intégrales de Fredholm du premier et du second type, respectivement. Chaque type est abordé á l'aide de différentes méthodes qui sont aussi décrites en détails.

Au chapitre 5 on considère le processus de conversion de problèmes á valeurs initiales (P.V.I) et problèmes aux bord (P.V.B) en équation intégrale de Volterra , de Fredholm respectivement. Aussi sont présentées les équations linéaires Intégro-différentielles de Volterra et celles de Fredholm .

A la fin on trouve une réference assez détaillée.

Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté de mathématiques et informatique
Halim Benali

Chapitre 1

Préliminaires

Une équation intégrale est une équation dans laquelle la fonction inconnue $u(x)$ apparaît sous le signe intégral [5],[13],[20],[19],[6]. Une équation intégrale standard en $u(x)$ est de la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt, \tag{1}$$

oú $g(x)$ et $h(x)$ sont les bornes de l'intégration λ est un paramètre constant et $K(x,t)$ est une fonction de deux variables x et t appelée le noyau de l'équation intégrale. La fonction $u(x)$ qui sera déterminé apparaît sous le signe intégral et á l'extérieur du signe intégral. Les fonctions $f(x)$ et $K(x,t)$ sont données á l'avance. Il convient de noter que les bornes de l'intégration $g(x)$ et $h(x)$ peuvent être á la fois variables, constantes ou mixtes.

Une équation intégro-différentielle est une équation dans laquelle la fonction inconnue $u(x)$ apparaît sous le signe intégral et contient une dérivée ordinaire $u^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}$ ainsi une équation Intégro-différentielle standard est de la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt, \tag{2}$$

oú $g(x), h(x), f(x), \lambda$ et le noyau $K(x,t)$ sont donnés. Les équations intégrales et les équations intégro-différentielles seront classées en types distincts selon les bornes de l'intération et le noyau $K(x,t)$. les types d'équations intégrales et d'équations intégro-différentielles seront classées et étudiées dans les prochains chapitres. Dans ce chapitre, nous examinerons les concepts les plus importants pour étudier les équations intégrales. Les méthodes traditionnelles, comme la méthode de la série Taylor et la méthode de transformation de Laplace, seront utilisées dans ce texte. En outre, les méthodes récemment développées, qui seront utilisées dans ce texte, détermineront la solution sous la forme d'une série de puissance qui convergera vers une solution exacte si une telle solution existe. En outre, nous examinerons les concepts de base pour résoudre les équations différentielles ordinaires. D'autres concepts mathématiques, comme la règle de Leibnitz, seront présentés.

1.1 Séries de Taylor

Soit $f(x)$ une fonction indéfinnement dérivables au point a d' un intervalle $[x_0, x_1]$. La série de Taylor de $f(x)$ centré en $x = a$ est

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{3}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}(a)(x-a)^3 \\ &+ \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

La série de Taylor de $f(x)$ en $a = 0$ est appelée la série de Maclaurin donnée par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \tag{5}$$

cela équivaut á

$$f(x) = f(0) + \frac{f(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}(0)x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{6}$$

Dans ce qui suit, nous donnons quelques exemples pour la détermination de la série de Maclaurin en $a = 0$.

Exemple 1.1 *Trouver la série de Taylor pour $f(x) = e^x$ en $a = 0$. Nous énumérons la fonction exponentielle et ses dérivées comme suit :*

$$f^{(n)}(x): \ f(x) = e^x, \ f'(x) = e^x, \ f^2(x) = e^x, \ f^3(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(0): \ f(0) = 1, f'(0) = 1, f^{(2)}(0) = 1, f^{(3)}(0) = 1, \ldots$$

et ainsi de suite. On a la série de Taylor de la fonction exp

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \ldots$$

et sous une forme compacte par $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
De même, nous pouvons facilement montrer que

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}, \quad e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!}.$$

Exemple 1.2 *Trouvez la série de Taylor de* $f(x) = \cos x$ *en* $a = 0$. *D'après ce qui a été présenté avant, nous avons*

$$f'(x) = \sin x, f^{(2)}(x) = \cos x, f^{(3)}(x) = \sin x, f^{(iv)}(x) = \cos x \ldots$$

et ainsi de suite. Ceci donne la série de Taylor pour $\cos x$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

De la même façon, nous pouvons déduire que :

$$\cos ax = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ax)^{2n}}{(2n)!}.$$

Pour $f(x) = \sin x$ *et* $f(x) = \sin(ax)$, *nous avons :*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\sin ax = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

1.1.1 Exercices

A) Trouver la fonction $f(x)$ ayant la série de Taylor :

1. $f(x) = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \ldots$

2. $f(x) = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + \ldots$

3. $f(x) = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$

4. $f(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 +$

5. $f(x) = \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + \frac{81}{80}x^6 + \cdots +$

6. $f(x) = 2 + x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$

B) **Solutions**

1. $f(x) = e^{2x} - 1.$
2. $f(x) = e^{3x}.$
3. $f(x) = e^{x} - 1.$
4. $f(x) = \cos x - \sin x.$
5. $f(x) = \cosh 3x - 1.$
6. $f(x) = 1 + x + \cos x.$

1.2 Équations différentielles ordinaires

Dans cette section, nous examinerons certaines équations différentielles ordinaires linéaires que nous utiliserons pour résoudre des équations intégrales. Pour les preuves, de l'existence et l'unicité des solutions, et d'autres détails, le lecteur est conseillé d'utiliser des textes d'équations différentielles ordinaires.

1.2.1 Équations diff linéaires(E.D.L.O)du premier ordre

La forme standard de l'équation différentielle linéaire ordinaire du premier ordre est

$$u' + p(x)\,u = q(x), \tag{7}$$

oú $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions données continues sur un certain intervalle $x_0 < x < x_1$. Nous déterminons d'abord un facteur intégrant $mu(x)$ en utilisant la formule :

$$\mu(x) = e^{\int^x p(t)dt}. \tag{8}$$

Rappelons qu'un facteur intégrant $\mu(x)$ est une fonction de x qui est utilisée pour faciliter la résolution d'une équation différentielle. La solution de (7) est obtenue en utilisant la formule :

$$u(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(t)\,q(t)dt\ + c\right], \tag{9}$$

oú c est une constante arbitraire qui peut être déterminée en utilisant une condition initiale donnée.

Exemple 1.3 *Résoudre l'E. D. O. de premier ordre suivante*

$$xu' + 3u = \frac{\cos x}{x},\ u(\pi) = 0,\ x > 0. \tag{10}$$

convertir l'équation á la forme standard (7) le facteur intégrant $\mu(x)$ *est*

$$\mu(x) = \exp^{\int^x \frac{3}{t}\, dt} = e^{3 \ln x} = x^3. \tag{11}$$

Par conséquent $u(x)$ *est*

$$u(x) = \frac{1}{x^3}(\cos x + x \sin x + 1), \tag{12}$$

obtenue á l'aide de la condition initiale donnée.

1.2.2 Exercices

A) Trouver la solution générale pour chacune des E.D.Os. du premier ordre suivantes :
1. $u^{'} + u = e^x, \ x > 0.$
2. $xu^{'} - 4u = x5e^x, \ x > 0.$
3. $(x^2 + 9)u^{'} + 2xu = 0, \ x > 0.$
4. $xu^{'} - 4u = 2x^6 + x^5, \ x > 0.$
5. $xu^{'} + u = 2x, \ x > 0.$
6. $xu^{'} - u = x^2 \sin x, \ x > 0.$

B) Trouver la solution particulière pour chacun des problèmes suivants :
7. $u^{'} - u = 2xe^x, \ u(0) = 0.$
8. $xu^{'} + u = 2x, \ u(1) = 1.$
10. $u^{'} - 3u = 4x^3 e^{3x}, \ u(0) = 1.$

C) **Réponses**
1. $u(x) = (x + c)e^x.$
2. $u(x) = x^4(c + e^x).$
3. $u(x) = cx^2 + 9.$
4. $u(x) = x^4(c + x + x^2).$
5. $u(x) = x + cx.$
6. $u(x) = x(c - \cos x).$
7. $u(x) = x^2 e^x.$
8. $u(x) = x^9.$
9. $u(x) = (1 + x^4)e^{3x}.$

1.2.3 Équations diff linéaires du second ordre

Comme indiqué précédemment, nous allons examiner quelques équations différentielles linéaires du deuxième ordre. L'accent sera mis sur les équations du second ordre, homogènes et non homogènes.

1. Equations homogènes á coefficients constants : La forme standard des équations différentielles ordinaires homogènes du deuxième ordre avec des coefficients constants est
$$au^{''} + bu' + cu = 0, a \neq 0, \tag{13}$$
oú $a, b,$ et c sont des constantes. La solution de cette équation est supposée être de la forme :
$$u(x) = e^{rx}. \tag{14}$$
En remplaçant cette hypothèse dans l'équation (13) on obtient l'équation suivante :
$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0. \tag{15}$$
Comme e^{rx} n'est pas nulle, alors nous avons l'équation :
$$ar^2 + br + c = 0, \tag{16}$$
dite équation caractéristique ou équation auxiliaire. La résolution de cette équation quadratique conduit á l'un des trois cas suivants :
   (i) Si les racines r_1 et r_2 sont réelles et $r_1 \neq r_2$, alors la solution générale de l'équation homogène est
   $$u(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, \tag{17}$$
   oú A et B sont des constantes.
   (ii) Si les racines r_1 et r_2 sont réelles et $r_1 = r_2 = r$, alors la solution générale de l'équation homogène est
   $$u(x) = Ae^{rx} + Be^{rx}, \tag{18}$$
   oú A et B sont des constantes.
   (iii) Si les racines r_1 et r_2 sont complexes et $r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu$, alors la solution générale de l'équation homogène est donnée par
   $$u(x) = e^{\lambda x}(A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)), \tag{19}$$
   oú A et B sont des constantes.
2. Equations non homogènes avec des coefficients constants
La forme standard des équations différentielles ordinaires non homogènes du deuxième ordre avec des coefficients constants est
$$au^{"} + bu' + cu = g(x), a \neq 0, \tag{20}$$
oú $a, b,$ et c sont des constantes. La solution générale se compose de deux parties,á savoir, la solution complémentaire u_c et une solution particulière u_p. La solution générale est de la forme

$$u(x) = u_c(x) + u_p(x), \tag{21}$$

oú u_c est la solution de l'équation homogéne :

$$au'' + bu' + cu = 0, a \neq 0. \tag{22}$$

Une solution particulière u_p découle de la partie non homogène $g(x)$. Elle est appelée une solution particulière parce qu'elle justifie l'équation non homogène (20), pour obtenir $u_p(x)$, nous utilisons la méthode des coefficients indéterminés. Pour appliquer cette méthode, nous considérons les trois types suivants de $g(x)$:

(i) Si $g(x)$ est un polynôme donné par

$$g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{23}$$

alors u_p devrait être supposé comme

$$u_p(x) = x^r(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n),\ r = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

(ii) Si $g(x)$ est une fonction exponentielle de la forme :

$$g(x) = a_0e^{\alpha x}, \tag{25}$$

alors u_p devrait être supposé comme

$$u_p(x) = b_0x^re^{\alpha x},\ r = 0, 1, 2, \ldots \tag{26}$$

(iii) Si $g(x)$ est une fonction trigonométrique de la forme :

$$g(x) = a_0 \sin(\alpha x) + b_0 \cos(\beta x), \tag{27}$$

alors u_p devrait être assumé comme

$$u_p(x) = x^r(A_0 \sin(\alpha x) + B_0 \cos(\beta x)), r = 0, 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Pour d'autres formes de $g(x)$ comme $\tan x$ et $\sec x$, nous utilisons habituellement la méthode de la variation des paramètres qui ne sera pas revue dans ce texte.

Exemple 1.4 *Résoudre l'E. D. O. du deuxième ordre suivante :*

$$u'' - 7u' + 6u = 0.$$

L'équation auxiliaire est donnée par :

$$r^2 - 7r + 6 = 0,$$

dont les racines sont $r_1 = 1$, *ou* $r_2 = 6$. *La solution générale est donnée par*

$$u(x) = Ae^x + Be^{6x}.$$

Exemple 1.5 *Résoudre l'E. D. O. du deuxième ordre suivante :*

$$u^{"} - 5u^{'} + 6u = 6x + 7.$$

Nous trouvons d'abord u_c. *L'équation auxiliaire pour l'équation homogène associée est donnée par*

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

dont les racines sont $r_1 = 2$, *ou* $r_2 = 3$. *La solution générale est donnée par*

$$u(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}.$$

notons que $g(x) = 6x + 7$, *alors une solution particulière est supposée être de la forme*

$$u_p(x) = Ax + B.$$

En remplaçant dans l'équation non homogène on a $6Ax + (6B - 5A) = 6x + 7$. *Par identification des coefficients des termes similaires des deux membres ,on obtient* $A = 1, B = 2$. *Par conséquent*

$$u(x) = u_c(x) + u_p(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x} + x + 2,$$

oú α *et* β *sont des constantes arbitraires.*

1.2.4 Exercices

A) Trouver la solution générale pour les E. D. Os.
   1. $u^{''} - 4u' + 4u = 0,$
   2. $u^{''} - 2u' - 3u = 0,$
   3. $u^{''} - u' - 2u = 0,$
   4. $u^{''} - 6u' + 9u = 0,$
   5. $u^{''} - 2u' = 0,$
   6. $u^{''} + 4u = 0.$

B) Trouver la solution générale pour les problèmes suivants
   7. $u^{''} - 2u^{'} + 2u = 0, u(0) = 1, u^{'}(0) = 1$
   8. $u^{''} - 6u^{'} + 9u = 0, u(0) = 1, u^{'}(0) = 4$
   9. $u^{''} - 3u^{'} - 10u = 0,\ u(0) = 2,\ u^{'}(0) = 3$
   10. $u^{''} + 9u = 0, u(0) = 1,\ u^{'}(0) = 0$
   11. $u^{''} - 9u^{'} = 0,\ u(0) = 3,\ u^{'}(0) = 9$
   12. $u^{''} - 9u = 0, u(0) = 1, u^{'}(0) = 0.$

C) Utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour trouver la solution générale pour les E. D. Os. du second ordre suivantes :

13. $u^{''} - u = 1$
14. $u^{''} + u = 3$
15. $u^{''} - u = 3x$
16. $u^{''} - u = 2\cos x.$

D) Utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour trouver la solution des problèmes avaleurs initiales suivants :
17. $u^{''} - u^{'} = 6,\ u(0) = 3, u^{'}(0) = 2.$
18. $u^{''} + u = 6e^{x},\ u(0) = 3, u^{'}(0) = 2.$
19. $u^{''} - u = 2\sin x,\ u(0) = 1, u^{'}(0) = 2.$
20. $u^{''} - 5u^{'} + 4u = -1 + 4x,\ u(0) = 3, u^{'}(0) = 9.$

E) **Réponses :**
1. $u(x) = e^{2x}(A + Bx),$
2. $u(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}$
3. $u(x) = Ae^{x} + Be^{2x},$
4. $u(x) = e^{3x}(A + Bx),$
5. $u(x) = A + Be^{2x},$
6. $u(x) = (A\sin 2x + B\cos 2x)$
7. $u(x) = e^{x}\cos x,$
8. $u(x) = e^{3x}(1 + x)$
9. $u(x) = e^{-2x} + e^{5x}$
10. $u(x) = \cos 3x,$
11. $u(x) = 2 + e^{9x},$
12. $u(x) = \cosh 3x,$
13. $u(x) = A + Be^{x} - x,$
14. $u(x) = 3 + A\sin x + B\cos x,$
15. $u(x) = A\cosh x - 3x,$
16. $u(x) = A\cosh x - \cos x,$
17. $u(x) = 8e^{x} - 6x - 5,$
18. $u(x) = -\sin x + 3e^{x},$
19. $u(x) = e^{x} + \sin x,$
20. $u(x) = 1 + x + 2e^{4x}.$

1.2.5 La méthode de série solution

Pour les équations différentielles de tout ordre avec des coefficients constants ou avec coefficients variables, avec $x = 0$ est un point ordinaire,nous pouvons utiliser la méthode de la série solution pour déterminer la solution de l'équation différentielle. La série solution obtenue peut converger vers la solution exacte si une telle solution de forme compacte existe. La méthode de la série solution suppose que la solution est donnée par

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{29}$$

oú en utilisant peu de termes de la série

$$u(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\ldots$$

La différenciation terme par terme donne

$$u^{'}(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5+\ldots$$
$$u^{"}(x)=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20\,a_5x^3+30a_6x^4+\ldots$$
$$u^{"'}(x)=6a_3+24a_4x+60a_5x^2+120\,a_6x^3+\ldots$$

et ainsi de suite. En substituant $u(x)$ et ses dérivées dans l'équation différentielle donnée et par identification des coefficients de même puissance de x, nous obtenons des relations de récurrence qui peuvent être résolus pour déterminer les coefficients $a_n, n\geq 0$, ce qui donne la solution par substitution des valeurs obtenues des a_n, $n\geq 0$ dans la série (29) .

Exemple 1.6 *Trouver la solution sous forme de série pour l' E. D. O :*

$$u^{''}+u=0.$$

La substitution de la série pour $u(x)$ et $u^{''}(x)$ donne

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+30a_6x^4\ldots \tag{30}$$
$$+a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots=0. \tag{31}$$

Cela peut s'écrir sous la forme

$$(a_0+2a_2)+(a_1+6a_3)x+(a_2+12a_4)x^2+(a_3+20a_5)x^3+(a_4+30a_6)x^4+\ldots=0.$$

Cette équation n'est satisfaite que si le coefficient de chaque puissance de x est nul. Ce qui donne les relations de récurrence

$$a_0+2a_2=0, a_1+6a_3=0, a_2+12a_4=0, a_3+20a_5=0\ldots$$

En résolvant ces équations, nous obtenons $a_2=-\frac{1}{2!}a_0$, $a_3=-\frac{1}{3!}a_1$, $a_4=-\frac{1}{2!}112$ $a_2=\frac{1}{4!}a_0, a_5=-120\quad a_3=\frac{1}{5!}a_1,\ldots$ *La solution sous forme de série est donnée par*

$$u(x)=a_0\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\ldots\right).$$

Ou sous la forme

$$u(x)=a_0\cos x+a_1\sin x, \tag{32}$$

oú a_0 et a_1 sont des constantes qui seront déterminées pour une solution particulière si les conditions initiales sont données.

1.2.6 Exercices

A) Trouver la solution série pour les E. D. Os :

1. $u^{''} + xu' + u = 0$

2. $u^{''} - xu' + xu = 0$

3. $u^{''} - (1+x)u' + u = 0$

4. $u^{''} - u' + xu = 0$

B) Trouver la solution pour les E. D. Os non homogènes suivantes :

5. $u^{''} - u' + xu = \sin x$

6. $u^{''} - xu' + xu = e^x$.

1.3 Règle de Leibnitz de différenciation des intégrales

Une des méthodes qui sera utilisée pour résoudre les équations intégrales : est la conversion de l'équation intégrale en une équation différentielle équivalente. La conversion est réalisée en utilisant la règle bien connue de Leibnitz [4],[19],[6] pour la différenciation des intégrales.

1.3.1 Règle de Leibnitz

Soit $f(x,t)$ continue et $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ continue dans un domaine du plan : (x,t) qui comprend le rectangle $a \leq x \leq b$, $t_0 \leq t \leq t_1$ et soit

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)\,dt, \tag{33}$$

la fonction dérivée de $F(x)$ existe et elle est donnée par

$$F^{'}(x) = h^{'}(x)f(x,h(x)) - g^{'}(x)f(x,g(x)) + \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dt. \tag{34}$$

Nous illustrons la règle de Leibnitz par les exemples suivants.

Exemple 1.7 *Trouver $F^{'}(x)$ pour ce qui suit :*

$$F(x) = \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \sqrt{1+t^3}dt. \tag{35}$$

En utilisant la règle de Leibnitz (34), nous trouvons que

$$F^{'}(x) = -\sin(x)\sqrt{1+\cos^3(x)} - \cos(x)\sqrt{1+\sin^3(x)}.$$

Considérons les intégrales de la forme :

$$F(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt. \tag{36}$$

Dans ce cas,la règle de Leibnitz (34), donne :

$$F^{'}(x) = K(x,x)u(x) + \int_0^x \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} u(t)\, dt. \tag{37}$$

1.3.2 Exercices

Différencier $F(x)$, autant de fois pour se débarrasser du signe intégral.

1. $F(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt.$
2. $F(x) = x^2 + \int_0^x (x-t)^2 u(t)dt.$
3. $F(x) = 1 + \int_0^x (x-t)^3 u(t)dt.$
4. $F(x) = e^x + \int_0^x (x-t)^4 u(t)dt.$

1.4 Réduire des intégrales multiples á des integrales simples

On verra plus tard que nous pouvons convertir les problèmes de valeur initiale et d'autres problèmes en équations intégrales. Il est normal de décrire la formule qui réduira les intégrales multiples en intégrales simples.

1.4.1 Réduction d'intégrales

Nous allons d'abord montrer que la double intégrale peut être réduite á une intégrale simple en utilisant la formule

$$\int_0^x \int_0^{x_1} F(t)dt\, dx_1 = \int_0^x (x-t)F(t)dt.$$

Cela peut être facilement prouvé de deux façons. La première façon posons

$$G(x) = \int_0^x (x-t)F(t)dt, \tag{38}$$

oú $G(0) = 0$. La différenciation des deux membres de (38) donne

$$G^{'}(x) = \int_0^x F(t)dt.$$

En intégrant les deux membres de la dernière équation de 0 á x, nous obtenons

$$G(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} F(t)dt\, dx_1.$$

Pour la deuxième méthode, nous utiliserons le concept d'intégration par parties.
Rappelons que

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Soit

$$u(x_1) = \int_0^{x_1} F(t)\, dt,$$

alors, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\int_0^x \int_0^{x_1} F(t)dt\, dx_1 &= x_1 \int_0^{x_1} F(t)dt|_0^x - \int_0^x x_1 F(x_1)dx_1 \\
&= x\int_0^x F(t)dt - \int_0^x tF(t)dt \\
&= \int_0^x (x-t)F(t)dt.
\end{aligned}$$

La formule générale qui convertit des intégrales multiples en une seule intégrale est donnée par

Théorème 1.1

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} F(x_n)dx_n\, dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}F(t)dt, \tag{39}$$

cette formule sera utilisée pour convertir les problèmes á valeur initiale en équations intégrales de Volterra .

Corollaire 1.1

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x (x-t)F(t)\, dt\, dt \dots dt}_{n\ intgrales} = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n F(t)dt. \tag{40}$$

C'est une formule essentielle et utile qui a beaucoup d'applications dans les problèmes d'équations intégrales.

1.4.2 Exercices

Prouvez ce qui suit :

1. $\int_0^x \int_0^{x_1} (x-t)^3\, u(t)\, dt\, dx_1 = \dfrac{1}{4} \int_0^x (x-t)^4 u(t) dt$

2. $\int_0^x \int_0^{x_1} (x-t)^4\, u(t)\, dt\, dx_1 = \dfrac{1}{5} \int_0^x (x-t)^5 u(t) dt$

3. $\int_0^x \int_0^{x_1} (x-t)^4\, u(t)\, dt\, dx_1 = \dfrac{1}{3} \int_0^x (x-t)^3 u(t) dt$

4. $\int_0^x \int_0^{x_1} (x-t)\, u(t)\, dt\, dx_1 + \int_0^x \int_0^{x_1} (x-t)^2\, u(t)\, dt\, dx_1 = \dfrac{1}{6} \int_0^x (x-t)^2 (3+2(xt))\, u(t) dt.$

1.5 Série géométrique

1.5.1 Suites géométriques

Une suite (a_n) est dite géométrique s'il existe un nombre $r \neq 0$ tel que

$$a_{n+1} = a_n\, r,\ n \geq 1. \tag{41}$$

a_1 : est le premier terme de la suite et r est la raison de la suite.
La série géométrique associée est donnée par

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k\, r^k,\ n \geq 1. \tag{42}$$

La somme des n premier termes d'une suite géométrique est donnée par l'expression

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1. \tag{43}$$

Une série géométrique converge si est seulement si $|r| < 1$. Si non elle diverge. La somme d'une série géométrique pour $|r| < 1$, est

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}, \tag{44}$$

obtenue á partir de (44) en notant que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0, |r| < 1$.

Exemple 1.8 *Trouver la somme de la série*

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots \tag{45}$$

Le premier terme de la suite est $a_1 = 1$ *et la raison est* $r = 2/3$. *La somme de la série est*

$$S = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3. \tag{46}$$

1.5.2 Exercices

Trouver la somme dans chaque cas

1. $\frac{5}{6}x + \frac{5}{36}x + \frac{5}{2216}x + \ldots.$

2. $x + \frac{n}{9}x + \frac{n^2}{81}x + \frac{n^3}{729}x + \ldots, \; 0 < n < 9.$

Chapitre 2

Introduction aux concepts d'équations intégrales

Les équations intégrales apparaissent sous de nombreuses formes.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)\,dt. \tag{1}$$

oú $g(x)$ et $h(x)$ sont les bornes de l'intégration, λ est un paramètre constant et $K(x,t)$ est une fonction donnée de deux variables x et t appelé le noyau de l'équation intégrale. La fonction inconnue $u(x)$ qui sera déterminée apparaît á l'intérieur du signe intégral. Dans beaucoup d'autres cas, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît á l'intérieur et á l'extérieur du signe intégral, oú les fonctions $f(x)$ et $K(x,t)$ sont données á l'avance.

1) Si les bornes d'intégration a, b sont des constantes fixées l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)\,dt, \tag{2}$$

est appelée équation intégrale de Fredholm.

2) Si au moins une borne est variable, l'équation

$$u(x) = f(x) + \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)\,dt, \tag{3}$$

est appelée équation intégrale de Volterra.

3) Si la fonction inconnue $u(x)$ apparaît seulement sous le signe intégral de l'équation de Fredholm ou Volterra ,l'équation intégrale est appelée respectivement équation intégrale de Fredholm ou de Volterra du premier type.
4) Si la fonction inconnue $u(x)$ apparaît á la fois á l'intérieur et á l'extérieur du signe intégral de l'équation de Fredholm ou Volterra, l'équation intégrale est appelée respectivement équation de Fredholm ou de Volterra du second type .

2.1 Classification des équations intégrales

Les équations intégrales apparaissent sous forme de nombreux types. Les types dépendent principalement des bornes de l'intégration et le noyau de l'équation. Dans ce texte nous nous s'intéressons aux équations intégrales du type suivant.

2.1.1 Équations Intégrales de Fredholm

Pour les équations intérales de Fredholm, les bornes de l'intégration sont fixées. La fonction inconnue $u(x)$ peut apparaître seulement á l'intérieur de l'équation intégrale sous la forme :

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt, \tag{4}$$

est appelée équation du premier type (ou espèce)de Fredholm .

Exemple 2.1

$$\cos(x) = \int_0^1 (x-t)u(t)\,dt. \tag{5}$$

Pour les équations intégrales du second type de Fredholm , la fonction inconnue $u(x)$ apparaît á l'intérieur et á l'extérieur du signe intégral. Le deuxième type est représenté par la forme :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt. \tag{6}$$

Exemple 2.2 *Soit l'équation intégrale du second type de Fredholm*

$$\cos(x^2) = x^2 + x + \int_0^1 xt\,u(t)\,dt. \tag{7}$$

2.1.2 Equations intégrales de Volterra

Dans les équations intégrales de Volterra, au moins une des bornes de l'intégration est une variable. Pour les équations intégrales de la première espèce de Volterra, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît seulement á l'intérieur du signe intégral sous la forme :

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)\,dt. \tag{8}$$

Exemples d'équations intégrales du premier type de Volterra sont

Exemple 2.3

$$x\,e^{2x-1} = \int_0^x e^{xt}\,u(t)\,dt, \tag{9}$$

et

Exemple 2.4

$$x^2 - x = \int_0^x x\cos(t)\,u(t)\,dt. \tag{10}$$

Cependant,dans les équations intégrales du deuxième espèce de Volterra, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît á l'intérieur et á l'extérieur du signe intégral.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)\,dt, \tag{11}$$

exemples d'équations intégrales du deuxième espèce de Volterra

$$u(x) = x - 3 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)\,dt, \tag{12}$$

et

$$u(x) = \ln(x+1) + \int_0^x (xt^2 + x\,t)u(t)\,dt. \tag{13}$$

2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous deux formes,á savoir

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x K_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b K_2(x,t)u(t)dt, \tag{14}$$

et

$$u(x,t) = f(x,t) + \lambda \int_0^t \int_\Omega F(x,t,\mu,\tau,u(\mu,\tau))d\mu d\tau, \tag{15}$$

oú $f(x,t)$ et $F(x,t,\mu,\tau,u(\mu,\tau))$ sont des fonctions analytiques sur $D = \Omega \times [0,T]$, et Ω est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}^n, n = 1,2,3$.

Exemple 2.5 *Soient les équations intégrales*

$$u(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x x\,u(t)dt - \int_0^1 t\,u(t)dt, \tag{16}$$

et

$$u(x,t) = x + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \mu)d\mu\,d\tau. \tag{17}$$

2.1.4 Equations intégrales singulières

Les équations intégrales de Volterra du premier type

$$f(x) = \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} K(x,t)\, u(t)dt \tag{18}$$

ou du second type

$$u(x) = f(x) + \int_{h(x)}^{g(x)} K(x,t)\, u(t)dt \tag{19}$$

sont appelées singulières si l'une des bornes de l'intégration $g(x), h(x)$ ou les deux sont infini. De plus, les deux équations précédentes sont appelées singulières si le noyau $K(x,t)$ est non borné en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt,\ 0 < \alpha < 1, \tag{20}$$

ou du second type :

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt, 0 < \alpha < 1. \tag{21}$$

Les deux dernières formes sont appelées équation intégrale d'Abel généralisée pour $\alpha = \frac{1}{2}$, l'équation :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)\, dt \tag{22}$$

est appelée équation intégrale singulière d'Abel.

2.1.5 Exercices

Pour chacune des équations intégrales suivantes, classer : équation intégrale de Fredholm,de Volterra ou de Volterra-Fredholm et trouver son type. Classer l'équation comme singulière ou non.

1. $u(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt.$
2. $x = \int_0^x (1 + x - t)u(t)dt.$
3. $u(x) = e^x + e - 1 - \int_0^1 u(t)dt.$
4. $x + 1 - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - t)u(t)dt.$
5. $u(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x (x - t)u(t)dt - \int_0^1 x\, u(t)dt.$

6. $u(x,t) = x + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \mu)\, d\mu\, d\tau.$

7. $x^3 + \sqrt{x} = \int_0^x \frac{1}{(x-t)}^{\frac{2}{3}} u(t)dt.$

8. $u(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\, u(t)dt.$

2.2 Classification des équations intégro-diff

Les équations intégro-différentielles apparaissent dans de nombreuses applications scientifiques, surtout lorsque nous convertissons des problèmes á valeurs initiales ou des problèmes á valeur au bord en équations intégrales. Les équations intégro-différentielles contiennent á la fois des opérateurs intégraux et différentiels. Les dérivées des fonctions inconnues peuvent apparaître dans n'importe quel ordre. Dans la classification des équations intégro-différentielles, nous suivrons la même procédure utilisée précédemment.

2.2.1 Equations intégro-différentielles de Fredholm

L'équation intégro-différentielle de Fredholm apparaît sous la forme :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t)dt, \tag{23}$$

oú $u^{(n)}$ indique la **n-** ième dérivée de $u(x)$.

Exemple 2.6 *Équations intégro-différentielles de Fredholm*

$$u^{'}(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xu(t)dt,\ u(0) = 0, \tag{24}$$

et

$$u^{''}(x) + u'(x) = x - \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt\, u(t)dt, u(0) = 0,\ u^{'}(0) = 1. \tag{25}$$

2.2.2 Equations intégro-diff de Volterra

les équations Intégro-diff de Volterra apparaissent lorsque nous convertissons les problèmes á valeurs initiales en équations intégrales. L'équation integro-diff de Volterra contient la fonction inconnue $u(x)$ et l'une de ses dérivées $u^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ á l'intérieur et á l'extérieur du signe inégral. L'éqation intégro-différentielle de Volterra apparaît sous la forme suivante :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\,u(t)dt, \tag{26}$$

oú $u^{(n)}$ indique la **n** ème dérivée de $u(x)$.
Exemples d'équations intégro-différentielles de Volterra

Exemple 2.7

$$u^{'}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_0^x tu(t)dt,\; u(0) = 0, \tag{27}$$

et

$$u^{''}(x) + u^{'}(x) = 1 - x(\sin x + \cos x) - \int_0^x tu(t)\,dt,\; u(0) = 1, u^{'}(0) = 1. \tag{28}$$

2.3 Linéarité et Homogènèité

Les équations intégrales et intégro-différentielles sont aussi classées selon les concepts de linéarité et homogènèité. Ces concepts jouent un rôle majeur dans la structure des solutions. Dans ce qui suit nous soulignons les définitions de ces concepts.

2.3.1 Concept de linéarité

Si l'exposant de la fonction inconnue $u(x)$ á l'intérieure du signe intégral est un,alors l'équation intégrale ou l'équation intégro-différentielle est dite linéaire [19]. Si la fonction inconnue $u(x)$ a un exposant autre qu'un, ou si l'équation contient des fonctions non linéaires de $u(x)$, comme $e^u, \sinh u, \cos u,\; \ln(1+u)$, l'équation intégrale ou l'équation intégro-différentielle est dite non linéaire. Pour expliquer ce concept, nous considérons les équations

1. $u(x) = 1 + x - \int_0^x (x-t)u(t)dt$,
2. $u(x) = 1 - \int_0^1 (x-t)u(t)dt$,
3. $u(x) = 1 + \int_0^x (1+x-t)u^3(t)dt$,
4. $u^{'}(x) = x + \int_0^1 x\,te^{u(t)}dt, u(0) = 1$.

1. et **2.** sont des équations intégrales linéaires de Volterra et Fredholm respectivement.
3. et **4.** sont des équation Intégro-différentielles non linéaire de Fredholm et Volterra respectivement.

2.3.2 Concept d'homogènèité

Les équations intégrales et les équations intégro-différentielles du second type sont classées comme homogène ou non homogène, si la fonction $f(x)$ dans les équations intégrales ou intégro-différentielles du second type de Volterra ou Fredholm est identiquement nulle, l'équation est appelée homogène. Pour clarifier ce concept, nous considérons les équations suivantes :

1. $u(x) = \sin x + \int_0^x xt\, u(t)dt$,
2. $u(x) = x + \int_0^1 (xt)^2 u(t)dt$,
3. $u(x) = \int_0^x (1 + xt)u^4(t)dt$,
4. $u''(x) = \int_0^x xt\, u(t)dt$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$.

1. et **2.** sont non homogènes parce que $f(x) = \sin x$ et $f(x) = x$.
3. et **4.** sont homogènes parce que $f(x) = 0$.

2.3.3 Solution d'une equation intégrale

Une solution d'une équation différentielle ou d'une équation intégrale se présente dans l'une des situations suivantes : deux types :

1) **Solution exacte :**
La solution est dite exacte si elle peut être exprimée sous une forme fermée, comme une fonction polynomiale, exponentielle,ou fonction trigonométrique ou la combinaison de deux ou plusieurs de ces fonctions élémentaires. Voici des exemples de solutions exactes :
$u(x) = x + e^x$,
$u(x) = \sin x + e^{2x}$,
$u(x) = 1 + \cosh x + \tan x$.
Soit l'équation

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt.$$

Montrer que $u(x) = \sin x$ est une solution de l'équation intégro-différentielle de Volterra :
Procédons comme auparavant et remplaçons $u(x) = \sin x$ dans les deux membres de l'équation nous trouvons

$$\text{membre gauche} = u'(x) = \cos x,$$

$$\begin{aligned} \text{membre droit} &= 1 - \int_0^x \sin t dt \\ &= 1 - (-\cos t)|_0^x = \cos x. \end{aligned}$$

2) **Séries solution :**
Pour des problèmes concrets, parfois nous ne pouvons pas obtenir des solutions exactes. Dans ce cas nous déterminons la solution sous une forme de série qui peut converger vers la solution exacte, si une telle solution existe.

2.3.4 Exercices

A)Montrer que la fonction donnée $u(x)$ est solution de l'équation intégrale correspondante

1. $u(x) = \cos x + 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, u(t) dt,\ u(x) = \sin(x) + \cos(x)$
2. $u(x) = e^{2x+\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{3} \int_0^1 e^{2x-\frac{5}{3}t}\, u(t)\, dt,\ \ u(x) = e^{2x}$
3. $u(x) = x + \int_{-1}^{1} (x^4 - t^4)\, u(t) dt,\ -1 \leq x \leq 1,\ u(x) = x$

B)Trouver l'inconue si la solution de chaque équation est donnée :

1. Trouver α si $u(x) = e^{-x^2}$ est solution de

$$u(x) = 1 - \alpha \int_0^x t\, u(t) dt,$$

2.Trouver $f(x)$ si $u(x) = e^x$ est solution de

$$u(x) = f(x) + \int_0^x (2u^2(t) + u(t)) dt,$$

3.Trouver $f(x)$ si $u(x) = \sin x$ est une solution de

$$u(x) = f(x) + \frac{4}{\pi} \int_0^x \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(t) dt\, dt.$$

B)**Réponses**

1.) $\alpha = 2.$
2.) $f(x) = 2 - e^{2x},$
3.) $f(x) = \sin x - x.$

Chapitre 3

Equations Intégrales de Volterra

Ce chapitre étudie des équations intégrales de Volterra et présente quelques méthodes de solution. Les principaux chercheurs de la théorie des equations intégrales sont Vito Volterra (1860-1940) et Ivar Fredholm (1866-1927), avec David Hilbert (1862-1943) et Erhard Schmidt (1876-1959). Volterra a été le premier á reconnaitre l'importance de la théorie et l'étudier systématiquement. Dans ce chapitre, nous appliquerons certaines des méthodes traditionnelles, á savoir la méthode des approximations successives, la méthode des solutions en série et la méthode de la transformation de Laplace sera également utilisée. Nous appliquons aussi les méthodes récemment développées,la méthode de décomposition de Adomian (MAD). Les théoremes d'unicité,d'existence et la convergence sont importants et peuvent être trouvées dans la littérature. La préoccupation sera sur la détermination de la solution $u(x)$ de l'equation intégrale de Volterra du premier et second type.

3.1 Equations intégrales de Volterra du second type

Nous étudions d'abord l'equation intégrale non homogène du deuxième espece de Volterra de la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)\,dt, \tag{1}$$

oú $K(x,t)$ est le noyau de l'equation intégrale,$f(x)$ une fonction continue de x et λ un paramètre. Ici $f(x)$ et $K(x,t)$ sont des fonctions á valeurs réelles données mais $u(x)$ est une fonction inconnue qui doit être déterminer. L'equation intégrale non homogène du premier type de Volterra est définie par

$$\int_0^x K(x,t)\,u(t)dt = f(x). \tag{2}$$

Les equations intégrales de Volterra du second type peuvent être facilement résolues en utilisant le processus de Picard d'approximations successives.

3.1.1 La méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives également appelée méthode d'itération de Picard fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes á valeur initiale ou des equations intégrales. Dans cette méthode, nous remplaçons la fonction inconnue $u(x)$ sous le signe intégral de l'equation de Volterra (1) par toute fonction continue á valeurs réelles sélectionée $u_0(x)$, appelée l'approximation zéro. Cette substitution donnera la première approximation $u_1(x)$,

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t)\,dt \tag{3}$$

Il est évident que $u_1(x)$ est continue si $f(x), K(x,t)$ et $u_0(x)$ sont continues. La deuxième approximation $u_2(x)$ peut être obtenue de la même façon en remplaçant $u_0(x)$ dans l'equation (3) par $u_1(x)$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_1(t)\,dt \tag{4}$$

En continuant ainsi, nous obtenons une suite infinie de fonctions

$$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

qui satisfait la relation de récurrence

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)\,dt,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

Ainsi á la limite la solution $u(x)$ est obtenue comme suit

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x), \tag{6}$$

de sorte que la solution résultante $u(x)$ soit indépendante du choix de l'approximation $u_0(x)$.

Théorème 3.1 *Si*

1) *la fonction $f(x)$ dans (5) est continue dans l'intervalle* $0 \leq x \leq a$,
2) *le noyau $K(x,t)$ est également continu dans le triangle* $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$, *alors la suite des approximations successives $u_n(x)$ $n \geq 0$ converge vers la solution $u(x)$.*

Ce processus d'approximation est extrêmement simple. Cependant, si nous suivons la méthode d'approximation successive de Picard nous devons fixer $u_0(x) = f(x)$, et déterminer

$u_1(x)$ et d'autres approximations successives comme suit :

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\, f(t)\, dt \\ u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u_1(t)\, dt \\ &\ldots\ldots. \\ u_{n-1}(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u_{n-2}(t)\, dt \\ u_n(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u_{n-1}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Considérons

$$\begin{aligned} u_2(x) - u_1(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t) \left[f(t) + \lambda \int_0^t K(t,\tau) f(\tau) d\tau \right] dt \\ &- \lambda \int_0^x K(x,t) f(t)\, dt \\ &= \lambda^2 \int_0^x K(x,t) \int_0^t K(t,\tau)\, f(\tau) d\tau\, dt \\ &= \lambda^2 \psi_2(x) \end{aligned} \tag{8}$$

oú

$$\psi_2(x) = \int_0^x K(x,t) dt \int_0^t K(t,\tau) f(\tau) d\tau \tag{9}$$

Ainsi de (8) nous pouvons écrire pour tout $n = 1.2\ldots$ que

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \psi_m(x) \tag{10}$$

$\psi_0(x) = f(x)$ et en plus

$$\psi_m(x) = \int_0^x K(x,t)\, \psi_{m-1}(t)\, dt, \tag{11}$$

pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ et donc $\psi_1(x) = \int_0^x K(x,t) f(t)\, dt$ et nous obtenons

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \int_0^x f(\tau) d\tau \int_\tau^x K(x,t) K(t,\tau)\, dt \\ &= \int_0^x K_2(x,\tau) f(\tau)\, d\tau, \end{aligned}$$

oú $K_2(x,\tau) = \int_\tau^x K(x,t) K(t,\tau)\, dt$. De même nous trouvons en général

$$\psi_m(x) = \int_0^x K_m(x,\tau) f(\tau)\, d,\ m = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

oú les noyaux itératifs $K_1(x,t) := K(x,t), K_2(x,t), K_3(x,t), \ldots$ sont définis par la formule de récurrence

$$K_{m+1}(x,t) = \int_t^x K(x,\tau)\, K_m(\tau,t)\, d\tau,\ m = 1,2,3,\ldots \tag{13}$$

Ainsi, l'expréssion de $u_n(x)$ peut être écrite comme

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \psi_m(x). \tag{14}$$

Il est également plausible que nous devrions être conduits á la solution de l'équation (1) au moyen de la somme si elle existe de la série infinie définie par l'équation (10)

$$\begin{aligned} u_n(x) &= f(x) + \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \int_0^x K_m(x,\tau)\, f(\tau) d\tau \\ &= f(x) + \int_0^x \left\{ \sum_{m=1}^{n} \lambda^m\, K_m(x,\tau) \right\} f(\tau)\, d\tau; \end{aligned} \tag{15}$$

et la solution de l'équation (1) est donnée par

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n(x) &= u(x) \\ &= f(x) + \int_0^x \left\{ \sum_{m=1}^{n} \lambda^m\, K_m(x,\tau) \right\} f(\tau)\, d\tau \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x H(x,\tau;\lambda)\, f(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{16}$$

oú

$$H(x,\tau;\lambda) = \sum_{m=1}^{n} \lambda^m K_m(x,\tau) \tag{17}$$

est connu sous le nom de noyau résolvant.

Exemple 3.1 *Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode des approximations successives*

$$u(x) = -1 + e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2}\int_0^x tu(t)dt. \tag{18}$$

Solution : *nous choisissons $u_0(x) = 0$. Nous utilisons ensuite la formule d'itération*

$$u_{n+1}(x) = -1 + e^x + \frac{1}{2}x^2\, e^x - \frac{1}{2}\int_0^x t\, u_n(t)dt, n \geq 0. \tag{19}$$

En substituant $u_0(x) = 0$ dans (19) nous obtenons

$$u_1(x) = -1 + e^x + \frac{1}{2!}x^2e^x,$$
$$u_2(x) = -3 + \frac{1}{4}x^2 + e^x(3 - 2x + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3),$$
$$u_3(x) = x\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots\right).$$
$$\dots.\ u_n(x) = x\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 \dots\right).$$

Remarquons que nous avons utilisé le développement de Taylor pour e^x *pour déterminer* $u_3(x), u_4(x), \dots$ *La solution* $u(x)$ *de (18) est*

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(x) = xe^x.$$

3.1.2 La méthode de transformation de Laplace

La méthode de transformation de Laplace est une technique puissante qui peut être utilisée pour résoudre des problèmes á valeur initiale et des équations intégrales . Nous supposons que le lecteur a utilisé la méthode de transformation Laplace et l'inverse du transformé de Laplace, pour résoudre les équations différentielles ordinaires. Les détails et les propriétés de la méthode de Laplace peuvent être trouvés dans les textes d'équations différentielles ordinaires. Le transformé de Laplace [9],[7] change les équations différentielles et les équations intégrales en équations polynomiales qui peuvent être facilement résolues, et donc en utilisant la transformation inverse de Laplace nous obtenons la solution de l'équation en question.

Définition 3.1 *La transformation de Laplace d'une fonction* $\phi(t)$ *définie pour* $x \geq 0$ *est la fonction*

$$f(s) = \mathcal{L}\phi(t) = \int_0^\infty e^{-st}\phi(t)\,dt. \tag{20}$$

oú s *est réel et* $\mathcal{L}$ *est appelé l'opérateur de transformation de Laplace. Le transformé* $f(s)$ *peut ne pas exister. Ici* $\phi(t)$ *s'appelle la fonction déterminante et* $f(s)$ *est la fonction génératrice.*

Pour que (20) ait un sens il suffit que $\phi(t)$ appartient á la classe L^1 (Lebesgue-intégrable) sur $(0, R)$ pour chaque $R > 0$. Nous supposons seulement que $\phi(t)$ dans $\mathcal{C}$ est continue sur $(0, \infty)$ et que (20) converge pour certains s.

Théorème 3.2 *Si*

1. $\phi(t) \in \mathcal{C}(0, \infty)$;
2. $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\phi(t)\,dt = 0, a < s < \infty,$ *certain* a
   alors $\phi(t) = 0, 0 < t < \infty.$

3.1.3 Propriétés de la transformtion de Laplace

De la définition de la transformation de Laplace donnée en (20) nous pouvons citer les propriétés suivantes

1.) **Multiplication** :

$$\mathcal{L}(af(x)) = a\mathcal{L}(f(x)), \; a \text{ est une constante} \tag{21}$$

2.) **Linéarité :**

$$\mathcal{L}(af(x) + bg(x)) = a\mathcal{L}(f(x)) + b\mathcal{L}(g(x)), \; a, b \text{ sont constantes.} \tag{22}$$

3.) **Multiplication par x :**

$$\mathcal{L}(xf(x)) = -\frac{d}{dx}\mathcal{L}(\phi(t)) = -f^{'}(s) \tag{23}$$

4.) **transformé de Laplace et dérivées :**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(x)) &= s\mathcal{L}(f(x)) - f(0), \\
\mathcal{L}(f^{"}(x)) &= s^2\mathcal{L}(f(x)) - sf(0) - f'(0), \\
\mathcal{L}(f^3(x)) &= s^3\mathcal{L}(f(x)) - s^2f(0) - sf'(0) - f^{"}(0), \\
&\dots \\
\mathcal{L}(f^{(n)}(x)) &= s^n\mathcal{L}(f(x)) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned} \tag{24}$$

5.) **Inverse du transformé de Laplace**
Si l'inverse du transformé de Laplace de $f(s)$ est $\phi(x)$ nous ecrivons

$$\mathcal{L}^{-1}(f(s)) = \phi(x), \tag{25}$$

oú $\mathcal{L}^{-1}$ désigne l'inverse du transformé de Laplace. La propriété de linéarité a lieu également pour la transformation inverse de Laplace. Cela signifie que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(a\, f(s) + b\, g(s)) = a\mathcal{L}^{-1}(f(s)) + b\mathcal{L}^{-1}(g(s)) \\
= a\,\phi(x) + b\,\psi(x).
\end{aligned} \tag{26}$$

6). **Le théorème de convolution pour le transformé de Laplace** C'est un théoreme important qui sera utilisé pour résoudre des equations intégrales.
Soit l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)\, u(t) dt, \tag{27}$$

le noyau $K(x,t)$ dépend de la différence $x-t$ ainsi en prenant le transformé de Laplace de l'équation intégrale du second type de Volterra ,nous obtenons

$$\mathcal{L}(u(x)) = \mathcal{L}(f(x)) + \lambda\mathcal{L}(K(x))\mathcal{L}(u(x))$$

et la solution pour $\mathcal{L}(u(x))$ est donnée par

$$\mathcal{L}(u(x)) = \frac{\mathcal{L}f(x)}{(1-\lambda\mathcal{L}(K(x)))}. \tag{28}$$

En inversant cette transformation, nous obtenons

$$u(x) = \int_0^x \psi(x-t)f(t)dt \tag{29}$$

la solution de l'équation intégrale du deuxième type de Volterra du type convolution, oú $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1-\lambda\mathcal{L}K(x)}\right) = \psi(x)$.

Exemple 3.2 *Résoudre l'équation intégrale de Volterra suivante par*

(a) La méthode du transformé de Laplace.

(b) La méthode des approximations successives $u_0(x) = 0$.

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_0^x e^{x-t}\, u(t)dt \tag{30}$$

Solution

(a) ***Solution par la méthode de Laplace.***
Prenons le transformé de Laplace de l'équation (30), nous obtenons

$$\mathcal{L}u(x) = \mathcal{L}(f(x)) + \lambda\mathcal{L}(e^x)\mathcal{L}(u(x)),$$

en résolvant pour $\mathcal{L}(u(x))$ *cela donne*

$$\mathcal{L}(u(x)) = \left(1 + \frac{\lambda}{(s-1-\lambda)}\right)\mathcal{L}(f(x)).$$

On obtient

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \delta(x-t) + \lambda e^{(1+\lambda)(x-t)}\, f(t)dt \\ &= f(x) + \lambda\int_0^x e^{(1+\lambda)(x-t)}\, f(t)dt \end{aligned} \tag{31}$$

oú $\delta(x)$ est la fonction delta de Dirac, nous avons utilisé la propriété intégrale [18] pour évaluer l'intégrale.

(b) ***Solution par les approximations successives :*** *Supposons que l'approximation zéro est*

$$u_0(x) = 0. \tag{32}$$

Ensuite, la première approximation

$$u_1(x) = f(x), \tag{33}$$

la deuxième approximation est donnée par

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t}\, f(t)dt, \tag{34}$$

la troisième approximation est

$$\begin{aligned} u_3(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t} u_2(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t} \left[f(t) + \lambda \int_0^t e^{t\tau} f(\tau)d\tau \right] dt \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t} f(t)\, dt + \lambda^2 \int_0^x \int_0^t e^{x-}\, f(\tau)d\tau\, dt \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t}\, f(t)\, dt + \lambda^2 \int_0^x (x-t)e^{x-t}\, f(t)\, dt \end{aligned}$$

en continuant ainsi, nous obtenons quand $n \to \infty$

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n\to\infty} u_n(x) \\ &= f(x) + \lambda \left[\int_0^x e^{x-t} \left(1 + \lambda(x-t) + \frac{1}{2!}\lambda^2 (x-t)^2 + \dots \right) f(t)dt \right] \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{(x-t)}\, e^{\lambda(x-t)}\, f(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{(1+\lambda)(x-t)}\, f(t)dt. \end{aligned} \tag{35}$$

Ici,la fonction $H(x,t;\lambda) = e^{(1+\lambda)(x-t)}$ *est appelée noyau réssolvant .*

(c) ***Une autre méthode pour déterminer la solution par le noyau résolvant***

La procédure pour déterminer le noyau résolvant est la suivante : étant donné que

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t}\, u(t)\, dt.$$

oú le noyau est $K(x,t) = e^{x-t}$. *La solution par la méthode des approximations successives est donnée par*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x H(x,t;\lambda)\, f(t)\, dt$$

oú le noyau résolvent est exprimé par

$$H(x,t;\lambda) = \sum_{n=0} \lambda^n K_{n+1}(x,t)$$

oú

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,\tau)\, K_n(t,\tau) d\tau,\ n = 1,2,3,\ldots$$

Il faut noter que $K_1(x,t) = K(x,t)$.
Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} K_2(x,t) &= \int_t^x e^{x-\tau} e^{\tau - t}\, d\tau \\ &= e^{x-t} \int_t^x d\tau \\ &= (x-t)\, e^{x-t}. \end{aligned}$$

De même, en procédant de cette maniére, nous obtenons

$$\begin{aligned} K_3(x,t) &= \int_t^x (e^{x-\tau})(e^{\tau t}(\tau - t)) d\tau \\ &= e^{x-t} \frac{(x-t)^2}{2!} \\ K_4(x,t) &= e^{x-t} \frac{(x-t)^3}{3!} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ K_{n+1}(x,t) &= e^{x-t} \frac{(x-t)^n}{n!} \end{aligned} \tag{36}$$

Par conséquent le noyau résolvant est

$$\begin{aligned} H(x,t;\lambda) &= \sum_{n=0} \lambda^n\, K_{n+1}(x,t) \\ &= e^{x-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} \\ &= e^{(1+\lambda)(x-t)}. \end{aligned}$$

La solution découle une fois le noyau résolvant est détermié.

Exercices
Résoudre les équations intégrales linéaires de Volterra suivantes

1. $u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt.$
2. $u(x) = 1 - x\sin x + x\cos x + \int_0^x tu(t)dt.$
3. $\cos x - x - 2 + \int_0^x (x-t)u(t)dt,$

en utilisant

a) la méthode du transformé de Laplace

b) la méthode des approximations successives $(u_0(x) = x,\ ).$

Réponses

1. $\sin(x),$
2. $u(x) = \sin x + \cos x.$
3. $u(x) = -\cos x - \sin x - \dfrac{x}{2}\sin x.$

3.1.4 La méthode des substitutions successives

Dans cette méthode, nous substituons successivement $u(x)$ par sa valeur donnée par l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{37}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\left[f(t) + \lambda \int_0^t K(t,t_1)u(t_1)dt_1\right]dt \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)u(t_1)dt_1\, dt \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1\, dt \qquad + \dots \\ &+ \lambda^n \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)\dots \\ &\times \int_0^{t_{n-2}} K(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})dt_{n-1}\dots dt_1 dt + R_{n+1}(x), \end{aligned}$$

oú

$$R_{n+1} = \lambda^{n+1}\int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)\dots\int_0^{t_{n-1}} K(t_{n-1},t_n)u(t_n)dt_n \dots dt_1 dt$$

est le reste après n termes. Il est facile de montrer que (voir [8]) $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$. En conséquence, la série générale $u(x)$ sécrit

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) f(t) dt \\ &+ \lambda^2 \int_0^x \int_0^t K(x,t) K(t,t_1) f(t_1) dt_1 dt \\ &+ \lambda^3 \int_0^x \int_0^t \int_0^{t_1} K(x,t) K(t,t_1) K(t_1,t_2) f(t_2) dt_2 dt_1 dt \\ &+ \ldots \end{aligned} \tag{38}$$

Notons ici que dans cette méthode la fonction inconnue $u(x)$ est substituée par la fonction donnée $f(x)$ qui rend l'évaluation des intégrales multiples facilement calculable.

Théorème 3.3 *Si*

(a) $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt$, *oú* a *est une constante.*

(b) $K(x,t)$ *est une fonction á valeurs réelles , continue dans le rectangle* $R = \{(x,t) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b,\}$

$$|K(x,t)| \leq M \; dans \, R, \;\; K(x,t) \neq 0.$$

(c) $f(x) \neq 0$, *est réelle et continue dans* $I = \{x : a \leq x \leq b.\}$.

(d) λ *une constante.*

Alors l'équation $u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt$ *possède une seule solution continue* $u(x)$ *dans l'intervalle* I, *et cette solution est donnée par la série absolument et uniformément convergente (38).*

Les résultats de ce théorème restent sans changement pour l'équation

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \text{ pour } \lambda = 1.$$

3.1.5 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian semble fonctionner pour les équations différentielles linéaires et non linéaires, équations intégrales, équations intégro-différentielles. La méthode utilisée a été introduite par Adomian au début de l'an 1990 dans ses livres [8] et [7] et autres documents de recherche [9] et [10]. La méthode est essentiellement une méthode de série de puissances . Nous démontrerons la méthode en exprimant $u(x)$ sous la forme d'une série :

$$u(x) = \sum_{n=0} u_n(x) \tag{39}$$

avec $u_0(x)$ choisi comme terme égale au terme figurant á l'extérieure du signe intégral. Soit l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt; \tag{40}$$

prenons

$$u_0(x) = f(x), \tag{41}$$

la substitution de (39) dans l'équation (40) donne

$$\sum_{n=0} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right] dt \tag{42}$$

Les termes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ de la fonction inconnue $u(x)$, seront complétement déterminés de manière récurrente, en effet

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x) \\ u_1(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt \\ u_2(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt \\ \ldots &= \ldots \\ u_n(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt. \end{aligned} \tag{43}$$

Cet ensemble d'équations (43) peut être écrit sous la forme

$$u_0(x) = f(x) \tag{44}$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u_n(t)dt, \; n \geq 0. \tag{45}$$

Nous illustrons la méthode avec quelques exemples.

Exemple 3.3 *Résourdre l'équation intégrale de Volterra :*

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt. \tag{46}$$

Nous notons que $f(x) = 1, \lambda = -1, K(x,t) = 1$. *Par substitution de (39) dans les deux membres de (46), nous obtenons*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt. \tag{47}$$

d'oú la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 \\ u_{k+1}(x) &= -\int_0^x u_k(t)dt, k \geq 0, \end{aligned} \tag{48}$$

ce qui donne la solution sous forme de série :

$$u(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots, \tag{49}$$

qui converge vers la solution exacte

$$u(x) = e^{-x}. \tag{50}$$

Exemple 3.4 *Résourdre l'équation intégrale*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t} u(t)dt, \tag{51}$$

par la méthode de décomposition.
Solution
Considérons $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *la solution de l'équation. Par substitution dans l'équation (51), nous obtenons*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt.$$

D'oú en identifiant les termes similaires , nous avons

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_1(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} f(t)dt$$

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= \lambda \int_0^x e^{x-t}\, u_1(t)dt \\
&= \lambda \int_0^x e^{x-t} \left[\lambda \int_0^t e^{t-t_1}\, f(t_1)dt_1\right] dt \\
&= \lambda^2 \int_0^x f(t_1)dt_1 \int_{t_1}^x e^{x-t}e^{t-t_1}dt \\
&= \lambda^2 \int_0^x (x-t_1)e^{x-t_1}f(t_1)\, dt_1 \\
&= \lambda^2 \int_0^x (x-t)e^{x-t}f(t)\, dt,
\end{aligned}$$

noter ici que

$$u_2(x) = \lambda^2 \int_0^x \int_0^x e^{x-t}f(t)dt\, dt = \lambda^2 \int_0^x (x-t)e^{x-t}f(t)\, dt.$$

De même en faisant des calculs ,nous obtenons

$$u_3(x) = \lambda^3 \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}e^{x-t}f(t)\, dt.$$

Ainsi, la série de décomposition devient

$$\begin{aligned}
&u_0(x) + u_1(x) + \dots \\
&\qquad = f(x) + \lambda \int_0^x \left[1 + \lambda(x-t) + \lambda^2\frac{(x-t)^2}{2!} + \dots\right] e^{x-t}f(t)dt \\
&\qquad = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t}e^{\lambda(x-t)}f(t)dt \\
&\qquad = f(x) + \lambda \int_0^x e^{(\lambda+1)(x-t)}f(t)dt.
\end{aligned}$$

3.1.6 Exercises

Résoudre par la méthode de décomposition les équations intégrales de Volterra suivantes : Âă

1. $u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt$
2. $u(x) = 1 + \int_0^x (t-x)u(t)dt$
3. $u(x) = x + x^4\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 \int_0^x u(t)\, dt$
4. $u(x) = 6x - 3x^2 + \int_0^x u(t)dt.$

Réponses

1. $u(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots = \sin x$
2. $u(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \ldots = \cos x.$
3. $u(x) = x + x^4.$

3.1.7 La méthode de serie solution

Dans cette section, nous présentons une méthode utile, qui provient principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques, pour résoudre les équations intégrale de Volterra. Nous supposons que la solution $u(x)$ de l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{52}$$

est analytique, et possède donc une série de Taylor de la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{53}$$

oú les coefficients a_n sont déterminés par recurence. Substituons (53) dans les deux membres de (52) nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \tag{54}$$

oú $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$.

Exemple 3.5 *Utiliser la méthode de série solution pour résoudre l'équation de Volterra*

$$u(x) = 1 + 2\sin x - \int_0^x u(t)dt$$

Solution :
Nous supposons la solution sous forme de série $u(x) = \sum_{n=0\infty} a_n x^n$. *Après substitution dans l'équation, nous avons*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt \\ &= 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients,nous obtenons

$a_0 = 1$
$a_1 = 2 - a_0$
$a_2 - \frac{a_1}{2}$
$a_3 = -\frac{2}{3!} - \frac{a_2}{3}$
$a_4 = -\frac{a_3}{4!} \dots$

Donc la solution est donnée par

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots\right) \\ &+ \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right) \\ &= \cos x + \sin x. \end{aligned}$$

3.1.8 Exercices

Utilisez la méthode de série solution pour résoudre les équations

1. $u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt$
2. $u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt$
3. $u(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t)dt$
4. $u(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t+1)u(t)dt$

3.2 Equation de Volterra du premier type

La forme standard des équations intégrale de Volterra du premier type est donnée par

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{55}$$

Dans cette section, nous discuterons trois méthodes principales qui sont couramment utilisées pour les équations intégrales de Volterra du premier type.

3.2.1 La méthod de séries solution

Comme dans la section précédente, nous considérerons la solution $u(x)$ comme analytique,qui a des dérivées de tout ordre,et possede un développement en série de Taylor en

$x = 0$ de la forme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{56}$$

oú les coefficients a_n seront déterminés par recurence. La Substitution de (56) dans les deux membres de (55), donne

$$T(f(x)) = \int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \tag{57}$$

oú $T(f(x))$ est la série de Taylor de $f(x)$.

3.2.2 Exercises

Utiliser la méthode de la solution de série pour résoudre les equations intégrale de Volterra du premier type :

1. $e^x - 1 - x = \int_0^x (x - t - 1)u(t)dt.$
2. $1 + xe^x - e^x = \int_0^x tu(t)dt.$
3. $\frac{1}{2}x^2 e^x = \int_0^x e^{x-t}u(t)dt.$

3.2.3 La méthode de la transformation de Laplace

Si le noyau $K(x,t)$ de l'équation intégrale

$$f(x) = \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{58}$$

dépends de la différence $x - t$, l'équation intégrale de Volterra du premier type peut s'exprimer comme

$$f(x) = \int_0^x K(x-t)u(t)dt. \tag{59}$$

En prenant le transformé de Laplace des deux membres de (59), nous trouvons

$$F(s) = K(s)U(s), \tag{60}$$

oú

$$U(s) = \mathcal{L}u(x), K(s) = \mathcal{L}K(x), F(s) = \mathcal{L}f(x). \tag{61}$$

Résolvons (61), ce qui donne

$$U(s) = \frac{F(s)}{K(s)}, \tag{62}$$

oú

$$K(s) \neq 0. \tag{63}$$

La solution $u(x)$ est obtenue en prenant l'inverse du transformé de Laplace dans (62), nous trouvons

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{K(s)}\right). \tag{64}$$

Rappelons que le membre droit de (64) peut être évalué á l'aide de la table.

3.2.4 Conversion á une équation du deuxième type de Volterra

Dans cette section, nous présentons une méthode qui converti équations intégrales du premier type de Volterra en équations intégrales du second type de Volterra. Une différenciation des deux membres de l'équation intégrale de Volterra du premier type et en utilisant la règle de Leibnitz, nous trouvons

$$f'(x) = K(x,x)u(x) + \int_0^x K_x(x,t)u(t)dt, \tag{65}$$

résolu en $u(x)$, á condition que $K(x,x) \neq 0,$ nous obtenons l'equation intégrale du second type de Volterra donnée par

$$u(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} - \int_0^x \frac{1}{K(x,x} K_x(x,t)u(t)dt. \tag{66}$$

Notons que le terme non-homogène et le noyau ont changé,en

$$g(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} \tag{67}$$

et

$$G(x) = -\frac{1}{K(x,x)} K_x(x,t), \tag{68}$$

respectivement. Ainsi, nous pouvons utiliser la méthode déjá indiquée plus haut.

Exemple 3.6 *Convertir l'équation intégrale de Volterra du premier type á une équation du second type et résoudre l'équation résultante*

$$1 + \sin x - \cos x = \int_0^x (x - t + 1)u(t)dt \tag{69}$$

Solution
Nous différencions les deux membres (69) et nous utilisons la règle de Leibnitz, nous obtenons l'équation intégrale du second type de Volterra

$$u(x) = \cos x + \sin x - \int_0^x u(t)dt, \tag{70}$$

nous sélectionnons une méthode pour résoudre l'équation intégrale du type de Volterra. Cela donne la solution exacte $u(x) = \cos x$.

Exemple 3.7 *Convertire l'équation á une équation du second type*

$$\sinh x = \int_0^x e^{x-t} u(t) dt. \tag{71}$$

Solution
Différencions les deux membres de (71) et utilisons la règle de Leibnitz,alors

$$\cosh x = u(x) + \int_0^x e^{x-t} u(t) dt, \tag{72}$$

d'oú

$$u(x) = \cosh x - \int_0^x e^{x-t} u(t) dt. \tag{73}$$

Pour résourdre cette équation utilisons le transformé de Laplace.Nous avons

$$\begin{aligned} U(s) &= \mathcal{L}(u(x)) \\ &= \mathcal{L}\left(\cosh x - \int_0^x e^{x-t} u(t) dt\right) \\ &= \frac{s}{s^2 - 1} - \frac{1}{s-1} U(s) \end{aligned}$$

ce qui conduit á

$$U(s) = \frac{1}{s+1}. \tag{74}$$

En prenant le transformé inverse,nous avons

$$u(x) = e^{-x}. \tag{75}$$

Remarque 3.1
1. *Cependant, si* $K(x, x) = 0$ *et* $K_x(x, x) \neq 0$, *en différenciant l'équation intégrale du premier type de Volterra autant de fois que nécessaire,á condition que* $K(x, t)$ *soit différentiable, alors l'équation sera réduite á l'équation intégrale du second type de Volterra.*
2. *La fonction* $f(x)$ *doit satisfaire á des conditions spécifiques pour garantir une unique solution continue pour* $u(x)$.

3.2.5 Exercices

Convertir les équations intégrales du premier type suivantes :

(a) $xe^x = \int_0^x e^{x-t}u(t)dt.$
(b) $5x^2 + x^3 = \int_0^x (5 + 3x - 3t)u(t)dt.$
(c) $2\cosh x - \sinh x - (2 - x) = \int_0^x (2 - x + t)u(t)dt.$
(d) $5x^4 + x^5 = \int_0^x (x - t + 1)u(t)dt.$

Réponses

a.) $u(x) = e^{-x}.$
b.) $u(x) = 2x.$
c.) $u(x) = \sinh(x).$

Chapitre 4

Equations Intégrales De Fredholm

4.1 Introduction

Erik Ivar Fredholm (1866-1927)était un mathématicien suédois qui a établi la théorie d'équations intégrales et son document 1903 á Acta Mathematica a joué un rôle majeur dans l'etablissement de la théorie des opérateurs. Fredholm est surtout connu pour son travail sur les équations intégrales et la théorie spectrale. Dans ce chapitre, nous utiliserons surtout des noyaux dégénérés ou séparables. Un noyau dégénéré ou séparable est une fonction qui peut être exprimée comme la somme du produit de deux fonctions chacune dépend d'une seule variable. Un tel noyau peut être exprimé sous la forme

$$K(x,t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x) g_i(t). \tag{1}$$

Les fonctions $x-t,\ (x-t)^2,\ 4xt, \exp^{x-t}$ etc... sont des exemples de noyaux séparables.

Dans ce qui suit nous énonçons, sans preuve, le théorème alternatif de Fredholm.

Théorème 4.1 *(Théorème d'alternative de Fredholm) Si l'équation intégrale homogène de Fredholm*

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt \tag{2}$$

possède seulement la solution triviale $u(x) = 0$, *alors l'équation non homogène de Fredholm correspondante*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt \tag{3}$$

possède toujours une unique solution. Ce théorème est connu par le théorème alternatif de Fredholm.

Théorème 4.2 *(Solution Unique) Si le noyau $K(x,t)$ dans l'équation intégrale de Fredholm (4.1) est une fonction réelle ,continue,bornée dans le carré $a \leq x \leq b$ et $a \leq t \leq b$, et si $f(x)$ est une fonction continue á valeurs réelles une condition nécessaire pour l'existence d'une solution unique pour l'equation intégrale de Fredholm (4.1) est donnée par*

$$|\lambda|M(b-a) < 1, \tag{4}$$

oú

$$|K(x,t)| \leq M \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Au contraire, si la condition nécessaire (4) n'a pas lieu, alors une solution continue peut exister pour l'équation intégrale de Fredholm. Pour illustrer cela, nous considérons l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = -2 - 3x + \int_0^1 (3x+t)u(t)dt. \tag{6}$$

Il est clair que $\lambda = 1, |K(x,t)| = |3x+t| \leq 4$ et $(b-a) = 1$ ce qui donne

$$|\lambda|M(b-a) = 4,$$

Cependant, l'équation de Fredholm (6) a une solution exacte donnée par $u(x) = 6x$.

Diverses méthodes analytiques et numériques ont été utilisées pour traiter les équations intégrales de Fredholm . La méthode de calcul direct, la méthode des approximations et la conversion de l'équation de Fredholm en un problème á valeur au bord sont parmi de nombreuses méthodes traditionnelles qui ont été couramment utilisées. Cependant, dans ce texte, nous appliquerons les méthodes récemment développées,á savoir la méthode de décomposition d'Adomian (MDA).

4.2 Equations intégrales du second type de Fredholm

Nous étudions d'abord des équations intégrales du second type de Fredholm données par

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \tag{7}$$

oú la fonction $u(x)$ qui apparaît á l'intérieur et á l'extérieur du signe intégral est la fonction inconnue. Le noyau $K(x,t)$, la fonction $f(x)$ et λ un paramètre sont donnés.

Dans les sections suivantes, nous discuterons différentes méthodes de solutions de l'équation intégrale de Fredholm.

4.2.1 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian (MAD) a été introduite et développée par George Adomian en [7],[2],[4]et a été utilisée auparavant au chapitre 3. La méthode de décomposition d'Adomian consiste á décomposer la fonction inconnue $u(x)$ de toute équation en une somme d'un nombre infini de composantes définies par la série de décomposition.

$$u(x) = \sum_{n=0} u_n(x) \tag{8}$$

avec $u_0(x)$ choisi égale au terme figurant á l'extérieur du signe intégral.
Soit l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt. \tag{9}$$

La Substitution de (8) dans l'équation (9) donne

$$\sum_{n=0} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right] dt \tag{10}$$

Les termes $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ de la fonction inconnue $u(x)$ sont complètement déterminés par recurence, si nous posons

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= f(x) \\
u_1(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)u_0(t)dt \\
u_2(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)u_1(t)dt \\
\ldots &= \ldots \\
u_n(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)u_{n-1}(t)dt
\end{aligned} \tag{11}$$

et de proche en proche on calcule les autres termes. Cet ensemble d'équations (11) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= f(x) \\
u_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)u_n(t)dt,\ n \geq 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

On voit clairement que la méthode de décomposition a converti l'équation intégrale en une détermination de termes calculables. Il a été formellement démontré que si une solution exacte existe pour le problème, alors la série obtenue converge trés rapidement vers cette solution exacte. Le concept de convergence de la série de décomposition a été étudié par de nombreux chercheurs afin de confirmer la convergence de la série résultante.

Exemple 4.1 *Résoudre l'équation intégrale*

$$u(x) = e^x - x + x\int_0^1 tu(t)dt$$

par la méthode de décomposition .

Solution :

Considérons $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *est la solution de l'équation. D'oú par substitution dans l'équation donnée*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = e^x - x + \lambda\int_0^1 t\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt, \tag{13}$$

nous avons

$$u_0(x) = f(x) = e^x - x$$

$$u_1(x) = x\int_0^1 t\,(e^t - t)dt = \frac{2}{3}x,$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= x\int_0^1 t\,u_1(t)dt \\ &= x\int_0^1 \frac{2}{3}t^2 dt \\ &= \frac{2}{9}x, \end{aligned}$$

$$u_3(x) = x\int_0^1 \frac{2}{9}tdt = \frac{2}{27}x,$$

et ainsi de suite. En utilisant (28) cela donne la série solution

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + u_1(x) + \dots \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}x\left(\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots}_{S}\right) && (14) \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}xS, && (15) \end{aligned}$$

la somme S *de la série géométrique infinie est donnée par*

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

La série solution (14) converge vers la solution exacte $u(x) = e^x$.

4.2.2 Exercices

Résoudre l'équation intégrale de Fredholm suivante en utilisant la méthode de décomposition d'Adomian .

1. $u(x) = \pi x + \sin 2x + x \int_{-\pi}^{\pi} tu(t)dt$
2. $u(x) = 2 + \cos x + \int_0^{\pi} tu(t)dt$
3. $u(x) = -x + \sin x + \int_0^{\pi/2} xtu(t)dt.$

Réponses

1.) $u(x) = \sin 2x.$
2.) $u(x) = \cos x.$
3.) $u(x) = \sin x.$

4.2.3 La méthode de calcul direct

Dans cette section, la méthode de calcul direct sera appliquée pour résourdre l'équations intégrale de Fredholm . La méthode approche les équations intégrale de Fredholm de manière directe et donne la solution sous une forme exacte et non sous une forme de série. Il est important de souligner que cette méthode sera appliquée pour les noyaux dégénérés ou séparables

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t). \tag{16}$$

La méthode de calcul direct peut être appliquée comme suit :

1) Nous remplaçons d'abord (16) dans l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt. \tag{17}$$

2) Cette substitution donne

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t)u(t)dt \tag{18}$$

Basé sur ceci, l'équation (18) devient

$$u(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k(x), \tag{19}$$

oú

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)u(t)dt,\ 1 \leq i \leq n. \tag{20}$$

4) La substitution de (19) dans (20) donne un système de n équations algébriques qui peut être résolu pour déterminer les constantes $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$. En utilisant les valeurs numériques obtenues de α_i en (19), la solution $u(x)$ de l'équation intégrale de Fredholm (17) est obtenue.

Remarque 4.1 *Il faut noter ici que la méthode de calcul direct a fourni une solution exacte, plutôt qu'une solution sous forme de série oú la constante α a été déterminée. L'évaluation est entiérement dépendante de la structure du noyau $K(x,t)$, et parfois il peut arriver que des difficultés de calcul peuvent survenir dans la détermination de la constante α si l'équation algébrique résultante est de troisième ordre ou plus. Ce genre de difficulté peut survenir dans l'équation intégrale non linéaire.*

Exemple 4.2 *Résoudre l'équation intégrale de Fredholm en utilisant la méthode de calcul direct*

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 t u(t)dt. \tag{21}$$

Solution : *Le noyau $K(x,t) = x^2 t$ est séparable. Par conséquent, nous réécrivons (21) comme suit :*

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}x^2\int_0^1 t u(t)dt. \tag{22}$$

l'équation (22) peut être réécrite comme suit :

$$u(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2, \tag{23}$$

oú

$$\alpha = \int_0^1 t u(t)dt. \tag{24}$$

Pour déterminer α, nous substituons (23) dans (24), nous avons

$$\alpha = \int_0^1 t\left(3t + 3t^2 + \frac{1}{2}\alpha t^2\right)dt. \tag{25}$$

Intégrons le membre droit de (25), d'oú

$$\alpha = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\alpha, \tag{26}$$

ce qui donne $\alpha = 2$. Substituons la valeur de α dans (23), nous obtenons la solution exacte

$$u(x) = 3x + 4x^2. \tag{27}$$

Exemple 4.3 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm*

$$u(x) = e^x - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 u(t)dt. \tag{28}$$

Posons $\alpha = \int_0^1 u(t)dt$. *Alors (28) s'écrit*

$$u(x) = e^x - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha. \tag{29}$$

Remplaçons la valeur de $u(x)$ *dans l'intégrale ci-dessus,nous obtenons*

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^1 \left(e^t - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right) dt \\ &= (e-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{2}\right) + \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

ce qui donne $\alpha = e - 1$. *Par conséquent ,la solution exacte est la fonction* $u(x) = e^x$.

4.2.4 Exercices

Utilisez la méthode de calcul direct pour résoudre les équations intégrales de Fredholm suivantes :

1. $u(x) = 1 + 9x + 2x^2 + x^3 - \int_0^1 (20xt + 10x^2t^2)u(t)dt$
2. $u(x) = 1 + \ln x - \int_{0^+}^1 \ln(xt^2)u(t)dt, 0 < x, t \leq 1$
3. $u(x) = 1 + \int_{0^+}^1 \ln(xt)u(t)dt, 0 < x \leq 1$
4. $u(x) = 4 + 45x + 26x^2 - \int_0^1 (1 + 30xt^2 + 12x^2t)u(t)dt$
5. $u(x) = 2x + e^x - \frac{3}{4}\int_0^1 (xt)u(t)dt$
6. $u(x) = 1 + x + e^x - \frac{2}{3}\int_0^1 xtu(t)dt$
7. $u(x) = \sin x + (\pi - 1)\cos x - \cos x \int_0^\pi tu(t)dt$
8. $u(x) = \sin x - \cos x + \int_0^\pi x \cos t u(t)dt.$

Réponses :

1.) $u(x) = 1 - x^2 + x^3$
2.) $u(x) = 1 + \frac{1}{2}\ln x$
3.) $u(x) = 1 + \frac{1}{2}\ln x$

4.) $u(x) = u(x) = 1 + 2x + 3x^2$
5.) $u(x) = x + e^x 16$
6.) $u(x) = 1 + e^x 15$
7.) $u(x) = \sin x + \cos x 11$
8.) $u(x) = \sin x - \cos x 12$

4.2.5 La méthode des approximations successives :Série de Neumann

La méthode des approximations successives, ou la méthode d'itération de Picard a été déjá introduite au chapitre 3. Cette méthode résout tout problème en trouvant des approximations successives á la solution en commençant par une estimation initiale comme $u_0(x)$ appelée l'approximation zéro. Les valeurs les plus couramment utilisées pour les approximations zéro sont $0, 1,$ ou $,x$. Bien sûr d'autres valeurs réelles peuvent également être sélectionnées.
La méthod des approximations successives permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \text{n'importe quelle fonction réelle sélectionnée,} \\ u_{n+1}(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u_n(t)\, dt,\ n \geq 0 \end{aligned} \tag{30}$$

La question de la convergence de $u_n(x)$ est justifiée par le théorème 4.1 la solution est déterminée en utilisant la limite

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(x). \tag{31}$$

Exemple 4.4 *Utilisez la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm suivante*

$$u(x) = x + e^x - \int_0^1 xtu(t)dt \tag{32}$$

Solution
Sélectionnons $u_0(x) = 0.$

$$u_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 (xt) u_n(t)\, dt,\ n \geq 0 \tag{33}$$

Substituons $u_0(x) = 0$ *dans (33), nous obtenons*

$$u_1(x) = x + e^x,$$

$$u_2(x) = e^x - \frac{1}{3}x,$$

$$u_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 (xt)u_n(t)\,dt = e^x + \frac{(-1)^n}{3^n}x. \tag{34}$$

Conséquement, la solution $u(x)$ *de (32) est donnée par*

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(x) = e^x. \tag{35}$$

4.2.6 Exercices

Utilisez la méthode des approximations successives pour résoudre les équations intégrales de Fredholm suivantes :

1. $u(x) = x + \lambda \int_{-1}^{1} xtu(t)dt$
2. $u(x) = 1 + x + x^3 - \lambda \int_0^1 xtu(t)dt$
3. $u(x) = x + \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt.$

4.2.7 La méthode série solution

Une fonction réelle $u(x)$ est dite analytique si elle a des dérivées de tout ordre de sorte que la série de Taylor centrée en b dans son domaine

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n, \tag{36}$$

converges vers $f(x)$ dans un voisinage de b. Par souci de simplicité, la forme de la série Taylor en $x = 0$ peut être écrite comme

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{37}$$

Suite á la discussion présentée précédemment au chapitre 3, la méthode de série solution qui découle principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques, sera utilisée pour résoudre les équations intégrales de Fredholm. Nous supposerons que la solution $u(x)$ de l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{38}$$

est analytique, et possède donc une série de Taylor de la forme donnée en (37), oú les coefficients a_n seront déterminés par recurence. Substituons (37) dans les deux membres de (38) ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_a^b K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \tag{39}$$

oú $T(f(x))$ est la série de Taylor pour $f(x)$.

Exemple 4.5 *Résoudre l'équation intégrale de Fredholm par la méthode de série*

$$u(x) = (x+1)^2 + \int_{-1}^{1} (xt + x^2t^2) u(t) dt. \tag{40}$$

Solution
substituons $u(x)$ par la série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{41}$$

dans les deux membres de l'équation (40), nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (x+1)^2 + \int_{-1}^{1} (xt + x^2t^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt, \tag{42}$$

L'évaluation de l'intégrale du membre droit donne

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 & \\ & + \left(2 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{5}a_3 + \frac{2}{7}a_5 + \frac{2}{9}a_7 \right) x \\ & + \left(1 + \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{2}{7}a_4 + \frac{2}{9}a_6 + \frac{2}{11}a_8 \right) x^2.\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients dans cette dernière relation, nous obtenons

$$a_0 = 1, a_1 = 6, a_2 = \frac{25}{9}, a_n = 0, n \geq 0$$

ainsi la solution exacte est donnée par

$$u(x) = 1 + 6x + \frac{25}{9}x^2.$$

4.3 Equation intégrale homogène de Fredholm

L'équation intégrale homogène de Fredholm du second type est donnée par

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt. \tag{43}$$

Dans cette section, nous concentrerons notre étude seulement sur l'équation intégrale homogène de Fredholm (43) a noyau séparable $K(x,t)$. Le but principal de l'étude de l'équation homogène de Fredholm est de trouver une solution non triviale, parce que la solution triviale $u(x) = 0$ est une solution de cette équation. De plus, la méthode de décomposition d'Adomian ne s'applique pas ici parce qu'elle dépend principalement de l'attribution d'une valeur non nulle pour la composante zéro $u_0(x)$, et dans ce type d'équations $f(x) = 0$. Sur cette base, la méthode de calcul direct sera utilisée ici pour traiter ce genre d'équations.

4.3.1 La méthode de calcul direct

La méthode de calcul direct a été déjá utilisée dans ce chapitre. Cette méthode remplace l'equation intégrale homogène de Fredholm par une seule equation algébrique ou par un système d'équations algériques simultanées selon le nombre de termes du noyau séparable $K(x,t)$. Sans perte de généralité, nous supposons que

$$K(x,t) = g(x)h(t). \tag{44}$$

L'équation (43) s'écrit

$$u(x) = \lambda g(x) \int_a^b h(t)u(t)dt. \tag{45}$$

Posons

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt, \tag{46}$$

alors l'équation (45) devient

$$u(x) = \lambda\alpha g(x). \tag{47}$$

Nous remarquons que $\alpha = 0$, donne la solution triviale $u(x) = 0$, ce qui n'est pas notre objectif dans cette étude. Cependant, pour déterminer la solution non triviale de l'équation (43) nous devons déterminer la valeur du paramètre λ en considérant $\alpha \neq 0$. On peut y parvenir en remplaçant l'équation (47) par l'équation (46) pour obtenir

$$\alpha = \lambda\alpha \int_a^b h(t)g(t)dt, \tag{48}$$

ce qui est équivalent á,

$$1 = \lambda \int_a^b h(t)g(t)dt, \tag{49}$$

qui donne une valeur numérique pour $\lambda \neq 0$ en évaluant l'intégrale définie dans l'equation (49). Cependant,en déterminant λ, la solution non triviale donnée par l'equation (47) est obtenue.

Remarque 4.2 *Les valeurs non nulles particulières de λ qui résultent de la résolution du système algébrique des equations sont appelées les valeurs propres du noyau. Et en fonction de chaque valeur propre, nous aurons des solutions appelées solutions propres ou fonctions propres. Ces solutions ne sont pas des solutions nulles dans un intervalle fini (a, b).*

Exemple 4.6 *Trouver la solution non triviale de l'équation intégrale homogène de Fredholm*

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\lambda \int_0^\pi \cos(x - t)u(t)dt. \tag{50}$$

Étant donné que

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2}{\pi}\lambda \int_0^\pi \cos(x-t)u(t)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\lambda \int_0^\pi [\cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t)]u(t)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\lambda\alpha\cos x + \frac{2}{\pi}\lambda\beta\sin x. \end{aligned}$$

oú

$$\alpha = \int_0^\pi \cos(t)u(t)dt$$

et

$$\beta = \int_0^\pi \sin(t)u(t)dt.$$

Par conséquent, en utilisant la valeur de $u(x)$ sous les signes intégrales de α et β, nous obtenons une équation algébrique simultanée donnée par

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\lambda}{\pi}\left[\int_0^\pi \cos(t)(\alpha\cos(t) + \beta\sin(t))dt\right] \\ \beta &= \frac{2\lambda}{\pi}\left[\int_0^\pi \sin(t)(\alpha\cos(t) + \beta\sin(t))dt\right] \end{aligned}$$

Après avoir effectué les intégrations et la réduction, les valeurs de α, et β, sont trouvés $\alpha = \lambda\alpha$ et $\beta = \lambda\beta$. Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors $\lambda = 1$. Par conséquent, la solution de l'équation est

$$u(x) = \frac{2}{\pi}(\alpha\cos x + \beta\sin x),$$

oú α et β sont des constantes arbitraires.

4.3.2 Exercices.

Trouver la solution non triviale de l'équation intégrale homogène de Fredholm

1. $u(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+t)u(t)dt., u(x) = +\frac{A}{\pi}(\sin x + \cos x), A = 2\alpha.$
2. $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (12x+2t)u(t)dt., u(x) = +\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}(6x+\sqrt{2}).$
3. $u(x) = \lambda \int_0^\pi \sin^2(x)u(t)dt.$
4. $u(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x)u(t)dt.$
5. $u(x) = \lambda \int_0^2 xtu(t)dt.$
6. $u(x) = \lambda \int_0^1 xe^t u(t)dt.$
7. $u(x) = \lambda \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\cos(x-t)u(t)dt.$
8. $u(x) = \lambda \int_0^1 (3-6x+9t)u(t)dt.$
9. $u(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2-3x-3t)u(t)dt.$
10. $u(x) = \lambda \int_0^1 (-12x^2+24t+18t^2)u(t)dt.$

4.4 Equations intégrales du premier type de Fredholm

Les équations intégrales du premier type de Fredholm sont données par

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, x \in D, \tag{51}$$

oú D est un ensemble fermé borné de nombres réels. L'ensemble image de x ne coincide pas nécessairement avec le domaine d'intégration [17]. La fonction inconnue $u(x)$, qui sera déterminée,figurant qu'á l'intérieur du signe intégral et cela cause des difficultés particulières.

Une remarque importante a été signalée dans [17] et d'autres références concernant la fonction de données $f(x)$. La fonction $f(x)$ doit se situer dans l'image du noyau $K(x,t)$ [17]. Par exemple si le noyau est donné par

$$K(x,t) = \sin x \sin t.$$

Ensuite, si nous substituons une fonction intégrable $u(x)$ dans (51) et que nous évaluons l'intégrale le $f(x)$ résultant doit clairement être un multiple de $\sin x$ [17]. Cela signifie que si $f(x)$ n'est pas un multiple de la composante de x du noyau, alors une solution pour (51) n'existe pas. Cette condition nécessaire sur $f(x)$ peut être généralisée. En d'autres termes, la fonction $f(x)$ doit contenir des composantes qui sont appariées par

les composantes correspondantes du noyau $K(x,t)$.
Hadamard a postulé les trois propriétés suivantes :

1. Existence d'une solution.
2. Unicité d'une solution.
3. Dépendance continue de la solution $u(x)$ sur les données $f(x)$. Cette propriété signifie que de petites erreurs dans les données $f(x)$ devraient causer de petites erreurs dans la solution $u(x)$.

Un problème est appelé problème bien posé s'il satisfait les trois propriétés mentionnées ci-dessous. Les problèmes qui ne sont pas bien posés sont appelés des problèmes mal posés comme les problèmes inverses. Les équations intégrales de Fredholm du premier type est un problème mal-posé,et la résolution de cette équation peut conduire á beaucoup de difficultés.Plusieurs méthodes ont été utilisées pour résourdre les équations intégrales de Fredholm du premier type á savoir la méthode qui transforme l'équation du premier type en une équation du second type.

Chapitre 5

Equations Intégro-différentielles

Il y a des liens forts entre la théorie des équations intégrales et la théorie des équations différentielles. Bien qu'il existe de nombreuses façons d'illustrer, d'analyser et d'interpréter ces liens, nous ne pouvons en aborder que quelques-uns dans ce chapitre.

Dans la section **5.1** nous démontrons comment les equations intégrales de Fredholm peuvent être converties en problèmes á valeurs au bord pour les équations différentielles ordinaires et vice versa.

Dans la section **5.2** nous démontrons quelques méthodes simples et pratiques par lesquelles les équations intégrales de Volterra peuvent être converties en problèmes á valeurs initiales, et vice versa et de noter les avantages de la conversion.

Dans la section **5.3** nous considérons les équations intégro-différentielles, qui sont considérées comme des hybrides d'equations différentielles et intégrales, puisqu'elles impliquent l'intégrale et la dérivée de la fonction inconnue de plusieurs façons possibles. Nous devons limiter notre considération ici á quelques exemples intéressants d'equations intégro-différentielles linéaires résolubles.

5.1 Problèmes au bord

Dans cette section, nous présenterons une méthode qui convertira un problème á valeurs au bord á une équation intégrale de Fredholm équivalente. Sans perte de généralité, nous présenterons deux problèmes au bord spécifiques (P.V.B) pour dériver deux formules distinctes qui peuvent être utilisées pour convertir un P.V.B en equation intégrale de Fredholm equivalente.

5.1.1 Conversion á une equation intégrale de Fredholm

1.) **Type I**
Nous nous penchons d'abord sur le problème au bord suivant :

$$y^{''}(x) + g(x)y(x) = h(x),\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = \alpha, y(1) = \beta. \tag{2}$$

Solution : Nous posons

$$y^{''}(x) = u(x). \tag{3}$$

Intégrons les deux membres de (3) de 0 á x, nous obtenons

$$\int_0^x y^{''}(t)dt = \int_0^x u(t)dt, \tag{4}$$

ce qui donne

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt, \tag{5}$$

La condition $y'(0)$ sera déterminée plus tard en utilisant la condition limite en $x = 1$. Intégrons les deux membres de (5) de 0 á x, cela donne

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x \int_0^x u(t)dt, \tag{6}$$

ou

$$y(x) = \alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{7}$$

Pour déterminer $y'(0)$, nous substituons $x = 1$ dans les membres de (7) et en utilisant la condition au bord $y(1) = \beta$, nous trouvons

$$y(1) = \alpha + y'(0) + \int_0^1 (1-t)u(t)dt, \tag{8}$$

ce qui donne

$$y'(0) = \beta - \alpha - \int_0^1 (1-t)u(t)dt. \tag{9}$$

la substitutions de (9) dans (7) donne

$$y(x) = \alpha + (\beta-\alpha)x - \int_0^1 x(1-t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{10}$$

De nouveau la substitution de (3) et (10) dans (1) conduit á

$$u(x)+\alpha g(x)+(\beta-\alpha)xg(x)-xg(x)\int_0^1(1-t)dt+g(x)\int_0^x(x-t)u(t)dt = h(x), \quad (11)$$

utilisons la formule

$$\int_0^1(.) = \int_0^x(.) + \int_x^1(.), \quad (12)$$

Portons ceci dans l'équation (11)

$$\begin{aligned} u(x) = h(x) - \alpha g(x) - (\beta-\alpha)xg(x) - g(x)\int_0^x(x-t)u(t)dt \\ +xg(x)\left[\int_0^x(1-t)u(t)dt + \int_x^1(1-t)u(t)dt\right], \end{aligned} \quad (13)$$

d'oú

$$u(x) = f(x) + \int_0^x t(1-x)g(x)u(t)dt + \int_x^1 xg(x)(1-t)u(t)dt, \quad (14)$$

et ceci conduit á l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt, \quad (15)$$

oú

$$f(x) = h(x) - \alpha g(x) - (\beta-\alpha)xg(x), \quad (16)$$

et le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} t(1-x)g(x), \text{si } 0 \le t \le x, \\ x(1-t)g(x), \text{si } x \le t \le 1. \end{cases} \quad (17)$$

Exemple 5.1 *Convertir le P.V.B suivant en équation intégrale de Fredholm équivalente :*

$$y^{"}(x) + 7y(x) = \cos(x),\ y(0) = 0 = y(1),\ 0 < x < 1. \quad (18)$$

Solution :
Nous observons que $\alpha = 0 = \beta$ et $h(x) = \cos x$. Cela donne l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = \cos x + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt, \quad (19)$$

oú

$$K(x,t) = \begin{cases} 7t(1-x), \textit{for } 0 \le t \le x, \\ 7x(1-t), \textit{for } x \le t \le 1. \end{cases} \quad (20)$$

2.) **Type II**

Nous examinons ensuite le problème au bord suivant :

$$y^{''}(x) + g(x)y(x) = h(x),\ 0 < x < 1, \tag{21}$$

$$y(0) = \alpha, y'(1) = \beta. \tag{22}$$

Solution :

Nous posons de nouveau

$$y^{''}(x) = u(x). \tag{23}$$

Intégrons les deux membres de (23) de 0 á $x,$ nous obtenons

$$\int_0^x y^{''}(t)dt = \int_0^x u(t)dt, \tag{24}$$

cela implique

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt, \tag{25}$$

la condition $y'(0)$ sera détérminée en utilisant la condition $y'(1) = \beta.$ Intégrons les deux membres de (25) de 0 á $x,$ cela donne

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \int_0^x \int_0^x u(t)dtdt, \tag{26}$$

ce qui est équivalant á

$$y(x) = \alpha + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{27}$$

pour déterminer $y'(0),$ nous différencions d'abord (27) par rapport á $x,$ nous obtenons

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt, \tag{28}$$

par substitution de $x = 1$ dans les deux membres de (28) et en utilisant la condition au bord $y'(1) = \beta,$ nous trouvons

$$y'(1) = y'(0) + \int_0^1 u(t)dt, \tag{29}$$

cela donne

$$y'(0) = \beta - \int_0^1 u(t)dt. \tag{30}$$

En substituant (30) dans (27) cela entraine

$$y(x) = \alpha + x\left[\beta - \int_0^1 u(t)dt\right] + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{31}$$

La substitution de (23) et (31) dans (21) donne

$$\begin{aligned} u(x) &= h(x) - (\alpha + \beta x) g(x) \\ &+ \; xg(x) \left[\int_0^x u(t)dt + \int_x^1 u(t)dt \right] \\ &- \; g(x) \int_0^x (x-t) u(t) dt. \end{aligned} \tag{32}$$

La dernière équation peut être écrite sous la forme

$$u(x) = f(x) + \int_0^x t g(x) u(t) dt + \int_x^1 x g(x) u(t) dt, \tag{33}$$

ce qui nous conduit á l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t) u(t) dt, \tag{34}$$

avec

$$f(x) = h(x) - (\alpha + \beta x) g(x), \tag{35}$$

et le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} t\, g(x), \text{si } \; 0 \leq t \leq x, \\ x\, g(x), \text{si } \; x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{36}$$

L'équation de Fredholm résultante dans (34) est homogène ou non homogène si le problème á valeur limite(au bord) dans (21) est homogène ou non homogène respectivement.

Exemple 5.2 *Convertir le P.V.B suivant en equation intégrale de Fredholm .*

$$\begin{cases} y''(x) + 2y(x) = 4, \\ y(0) = 0, y'(1) = 1, \; 0 < x < 1. \end{cases} \tag{37}$$

Solution :

Nous pouvons facilement observer $\alpha = 0, \beta = 1$ *and* $g(x) = 2, h(x) = 4x$. *La substitution de ceci dans (34) donne l'équation intégrale non homogène de Fredholm*

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t) u(t) dt, \tag{38}$$

oú

$$f(x) = 4 - 2x, \tag{39}$$

et le noyau $K(x,t)$ *est donné par*

$$K(x,t) = \begin{cases} 2t, \; si \; 0 \leq t \leq x, \\ 2x, \; si \; x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{40}$$

5.1.2 Conversion d'une equation intégrale de Fredholm á un P.V.B

Nous présenterons une autre technique qui convertira l'equation intégrale de Fredholm en un problème au bord (P.V.B). Dans ce qui suit, nous examinerons deux types de problème

1.) **Type I**
Nous considérons d'abord l'équation intégrale de Fredholm donnée par

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt, \tag{41}$$

oú $f(x)$ est une fonction donnée et le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} t(1-x)g(x), \text{ si } 0 \le t \le x, \\ x(1-t)g(x), \text{ si } x \le t \le 1. \end{cases} \tag{42}$$

Pour simplifier nous considérons $g(x) = \lambda$ oú λ est une constante. L'équation (41) peut être écrite sous la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda(1-x)\int_0^x tu(t)dt\lambda \int_x^1 x(1-t)u(t)dt, \tag{43}$$

ou de manière equivalente

$$u(x) = f(x) + \lambda(1-x)\int_0^x tu(t)dt\lambda x \int_x^1 (1-t)u(t)dt. \tag{44}$$

Différencions les deux membres de (44) en utilisant la règle de Leibnitz. Nous obtenons

$$\begin{aligned} u'(x) &= f'(x) + \lambda(1-x)u(x) - \lambda\int_0^x tu(t)dt \\ &- \lambda x(1-x)u(x) + \lambda\int_x^1 (1-t)u(t)dt \\ &= f'(x) - \lambda\int_0^x tu(t)dt + \lambda\int_x^1 (1-t)u(t)dt. \end{aligned} \tag{45}$$

De nouveau nous différencions les deux membres de (45) par rapport á x, nous trouvons que

$$u"(x) = f"(x) - \lambda x u(x) - \lambda x(1-x)u(x), \tag{46}$$

ce qui donne les équations différentielles ordinaires

$$u"(x) - \lambda u(x) = f''(x). \tag{47}$$

Les conditions au bord connexes, peuvent être obtenues par substitution de $x = 0$ et $x = 1$ et (44), nous trouvons que

$$u(0) = f(0), u(1) = f(1). \tag{48}$$

De plus, si $g(x)$ n'est pas une constante nous pouvons procéder d'une manière similaire á la discussion présentée plus haut pour obtenir le problème au bord. La technique ci-dessus pour le type **I** sera expliquée en étudiant les exemples suivants :

Exemple 5.3 *Convertir l'equation intégrale de Fredholm*

$$u(x) = e^x + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt, \tag{49}$$

á un problème au bord equivalent ,oú le noyau est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} 9t(1-x)\,g(x), & si\ \ 0 \leq t \leq x, \\ 9x(1-t)\,g(x), & si\ \ x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{50}$$

Solution : *L'équation intégrale de Fredholm s'écrie comme*

$$u(x) = e^x + 9(1-x)\int_0^x tu(t)dt + 9x\int_x^1 (1-t)u(t)dt. \tag{51}$$

Différencions (51) deux fois par rapport á x nous obtenons

$$u'(x) = e^x - 9\int_0^x tu(t)dt + 9\int_x^1 (1-t)u(t)dt, \tag{52}$$

et ceci donne l'équation différentielle ordinaire :

$$u"(x) + 9u(x) = e^x. \tag{53}$$

Les conditions au bord sont données par

$$u(0) = f(0) = 1, u(1) = f(1) = e. \tag{54}$$

L'équation intégrale (49) est équivalente au problème au bord suivant

$$\begin{cases} u"(x) + 9u(x) = e^x, \\ u(0) = f(0) = 1, \\ u(1) = f(1) = e. \end{cases} \tag{55}$$

4.) **Type II**
Nous considérons ensuite l'équation intégrale de Fredholm donnée par

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt, \tag{56}$$

oú $f(x)$ et le noyau $K(x,t)$ est donné par

$$K(x,t) = \begin{cases} t\,g(x), \text{ pour } 0 \leq t \leq x, \\ x\,g(x), \text{ pour } x \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{57}$$

Pour simplifier, nous pouvons envisager $g(x) = \lambda$ oú λ est constant. L'équation (56) peut sécrire comme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x tu(t)dt + \lambda x \int_x^1 u(t)dt, \tag{58}$$

En utilisant la règle de différenciation des produits et la règle de Leibnitz nous obtenons

$$u'(x) = f'(x) + \lambda \int_x^1 u(t)dt, \tag{59}$$

nous différencions de nouveau par rapport á x, nous trouvons que

$$u"(x) + \lambda u(x) = f''(x). \tag{60}$$

Les conditions au bord peuvent être obtenues en substituant $x = 0$ et $x = 1$ dans (58) et (59) respectivement,ainsi nous trouvons

$$u(0) = f(0), u'(1) = f'(1). \tag{61}$$

5.2 Problèmes á valeurs initiales

Dans cette section, nous présenterons la technique qui convertira un problème á valeurs initiales (P.V.I) en une équation intégrale équivalente de Volterra .

5.2.1 Conversion d'un P.V.I en equation intégrale de Volterra

Pour des raisons de simplicité, nous appliquerons ce processus á un problème á valeurs initiales du deuxième ordre donné par

$$y^{"}(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x), \tag{62}$$

sous les conditions initiales :

$$y(0) = \alpha, y'(0) = \beta, \tag{63}$$

oú α et β sont des constantes. Les fonctions $p(x)$ $q(x)$ sont analytiques et $g(x)$ est continue sur l'intervalle considéré. Pour atteindre notre objectif nous avons fixé

$$y^{''}(x) = u(x). \tag{64}$$

oú $u(x)$ est une fonction continue .
L'intégration des deux membres de (64) de 0 á x, nous donne

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(0) + \int_0^x u(t)dt \\ &= \beta + \int_0^x u(t)dt \end{aligned} \tag{65}$$

Intégrons de nouveau les deux membres de (65) de 0 á x, nous obtenons

$$y(x) = y(0) + \beta x + \int_0^x \int_0^{x_1} u(t)dtdx_1 \tag{66}$$

ce qui est équivalent á

$$y(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{67}$$

La substitution de (66), (65), et (67) dans le problème á valeurs initiales (62) conduit á l'équation intégrale de Volterra

$$\begin{gathered} u(x) + p(x)\left[\beta + \int_0^x u(t)dt\right] \\ q(x)\left[\alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)u(t)dt\right] = g(x). \end{gathered} \tag{68}$$

La dernière équation peut être écrite sous la forme d'équation intégrale de Volterra standard :

$$u(x) = f(x) - \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{69}$$

oú

$$K(x,t) = p(x) + q(x)(x-t), \tag{70}$$

et

$$f(x) = g(x) - [\beta p(x) + \alpha q(x) + \beta x q(x).] \tag{71}$$

Exemple 5.4 *Convertir le problèm á valeurs initiales á une équation intégrale de Volterra.*

$$y^{''}(x) - y(x) = \sin(x), \tag{72}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \tag{73}$$

Solution : *Nous fixons*

$$y^{''}(x) = u(x). \tag{74}$$

oú $u(x)$ *est une fonction continue.*
Intégrons les deux membres de (74) de 0 *á* x, *nous obtenons*

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(0) + \int_0^x u(t)dt \\ &= \int_0^x u(t)dt. \end{aligned} \tag{75}$$

En intégrant les deux membres de (75) de 0 *á* x, *nous obtenons*

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \int_0^x u(t)dtdt \\ &= \int_0^x (x-t)u(t)dt \end{aligned} \tag{76}$$

insérons (74) - (76) dans (72) nous aboutissons á l'équation intégrale de Volterra :

$$u(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{77}$$

<u>Généralisation</u>

La technique présentée ci-dessus pour convertir les problèmes á valeurs initiales en équations intégrales de Volterra équivalentes peut être généralisée en considérant le problème général á valeurs initiales :

$$y^n(x) + a_1(x)y^{n-1}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = g(x), \tag{78}$$

sous les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = c_0, y^i(0) = c_i,\ 1 \leq i \leq n. \tag{79}$$

Nous supposons que les fonctions $a_i(x), 1 \leq i \leq n$ sont analytiques á l'origine et la fonction $g(x)$ est continue sur l'intervalle de discussion. Soit $u(x)$ une fonction continue sur l'intervalle de discussion.
Nous fixons :

$$y^{(n)}(x) = u(x). \tag{80}$$

L'intégration des deux membres de (80) par rapport á x donne

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(x) &= y^{(n-1)}(0) + \int_0^x u(t)dt \\ &= c_{n-1} + \int_0^x u(t)dt. \end{aligned} \tag{81}$$

De nouveau intégrons les deux membres de (81) de 0 á x, nous obtenons

$$\begin{aligned} y^{(n-2)}(x) &= c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x \int_0^x u(t)dtdt \\ &= c_{n-2} + c_{n-1}x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \end{aligned} \tag{82}$$

Procédons comme avant, nous trouvons

$$\begin{aligned} y^{(n-3)}(x) &= c_{n-3+}c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dtdtdt \\ &= c_{n-3} + c_{n-2}x + \frac{1}{2}c_{n-1}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt. \end{aligned} \tag{83}$$

En continuant le processus d'intégration, nous obtenons

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{i!}x^i + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}u(t)dt. \tag{84}$$

La substitution de (80)-(84) dans (78) donne

$$u(x) = f(x) - \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{85}$$

oú

$$K(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!}x^{k-1}, \tag{86}$$

et

$$f(x) = g(x) - \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{c_{n-i}}{(j-i)!}x^{j-i} \right). \tag{87}$$

5.2.2 Conversion de l'équation intégrale de Volterra en un problème á valeurs initiales

La méthode est réalisée simplement en différenciant les deux membres des équations de Volterra [2] par rapport á x autant de fois que nous devons nous débarrasser du signe intégral et obtenir une équation différentielle. Les problèmes á valeurs initiales résultants peuvent être résolus facilement en utilisant des méthodes d'équations différentielles ordinaires qui ont été résumées au chapitre 1. Le processus de conversion sera illustré en discutant les exemples suivants.

Exemple 5.5 *Trouver le problème á valeurs initiales équivalent á l'équation intégrale de Volterra :*

$$u(x) = e^x + \int_0^x u(t)dt. \tag{88}$$

Différencions les deux membres de (88) et utilisons la règle de Leibnitz nous trouvons le P.V.I suivant

$$u'(x) - u(x) = e^x,\ u(0) = 1. \tag{89}$$

Exemple 5.6 *Trouver le problème á valeurs initiales équivalent á l'équation intégrale de Volterra :*

$$u(x) = \sin x - \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt. \tag{90}$$

Solution : *Différencions les deux membres de l'équation intégrale trois fois pour se débarrasser du signe intégral pour trouver*

$$\begin{aligned} u'(x) &= \cos x - \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ u''(x) &= -\sin x - \int_0^x u(t)dt \\ u'''(x) &= -\cos x - u(x). \end{aligned} \tag{91}$$

La substitution $x = 0$ dans (90) et dans les deux premières équations intégro-différentielles en (91) donne les conditions initiales :

$$u(0) = 0, u'(0) = 0, u''(0) = 0. \tag{92}$$

Compte tenu des derniers résultats, le problème á valeurs initiales équivalent á l'équation intégrale de Volterra (90) est une E.D.O non homogène de troisième ordre donné par

$$\begin{cases} u'''(x) - u(x) = -\cos x, \\ u(0) = 0, u'(0) = 0, u''(0) = 0. \end{cases} \tag{93}$$

5.3 Exercices

A) Convertir chacun des P.V.B suivants en équation intégrale de Fredholm équivalente .

1. $y''(x) + 4y(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 0, y(1) = 0.$
2. $y''(x) + 4xy(x) = 2, 0 \leq x \leq 1, y(0) = 0, y'(1) = 1.$

B) Convertir l'équation intégrale de Fredholm suivante en P.V.B équivalent

$$u(x) = e^{3x} + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt; K(x,t) = \begin{cases} t, \text{pour } 0 \leq t \leq x, \\ x, \text{pour } x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$u(x) = \cos x + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt; K(x,t) = \begin{cases} 6t(1-x), \text{pour } 0 \leq t \leq x, \\ 6x(1-t), \text{pour } x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

C) Convertir chacun des P.V.I suivants en une équation intégrale de Volterra équivalente.
5. $y'''(x) - 2y''(x) + y(x) = x, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1.$
6. $y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 1, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

D) Convertir chacune des équations intégrales de Volterra suivantes en P.V.I équivalents.
7. $u(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)u(t)dt$
8. $u(x) = 1 + e^x + \int_0^x (1 + x - t)^3 u(t)dt$

5.4 Equations intégro-diff de Volterra

Dans cette section, nous allons présenter quelques méthodes mathématiques pour obtenir la solution des équations Intégro-différentielles de Volterra. Nous concentrerons notre attention sur l'étude de l'équation intégrale qui implique le noyau séparable de la forme

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{k=n} g_k(t)h_k(t) \tag{94}$$

Premièrement, nous étudions le cas lorsque $K(x,t) = g(x)h(t)$. Nous illustrerons d'abord la méthode et ensuite nous appliquerons la technique á quelques exemples.

5.4.1 La méthode de série solution

Examinons une équation intégro-différentielle de Volterra comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_0^x h(t)u(t)dt, \\ u^{(n)}(0) = b_k, \ 0 \leq k \leq (n-1). \end{cases} \tag{95}$$

Nous supposons d'abord que la solution $u(x)$ de l'équation (95) est une fonction analytique et peut donc être représentée par un développement en série au point ordinaire $x = 0$ donné par

$$u(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k x^k, \tag{96}$$

oú les coefficients a_k sont les constantes inconnues qui doivent être déterminés. La méthode de la solution en série sera illustrée en considérant l'exemple suivant

Exemple 5.7 *Résoudre l'équation Intégro-différentielle de Volterra suivante en utilisant la méthode de la série .*

$$\begin{cases} u^{('')}(x) = x\cosh x - \int_0^x tu(t)dt, \\ u^{'}(0) = 1, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{97}$$

Solution : *En remplaçant $u(x)$ par la série*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{98}$$

dans les deux membres de l'équation (97) et en utilisant le développement de Taylor de la fonction $\cosh x$, nous obtenons

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) - \int_0^x t\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt. \tag{99}$$

Utilisons les conditions initiales,nous avons $a_0 = 0$, et $a_1 = 1$.

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots = x\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{a_2 x^4}{4} + \ldots\right). \tag{100}$$

En identifiant les coefficients des monômes de même puissance en x dans les deux membres, nous trouvons $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{3!}, a_4 = 0$, et en général $a_{2n} = 0$, pour $n \geq 0$ $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$, pour $n \geq 0$. Ainsi, en utilisant les valeurs de ces coefficients, la solution $u(x)$ de l'équation (98) peut être écrite sous forme de série comme suit

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \tag{101}$$

ou sous la forme

$$u(x) = \sinh x, \tag{102}$$

qui est la solution exacte de l'équation (97).

5.4.2 Conversion en équations intégrale de Volterra

Nous pouvons facilement convertir l'équation Intégro-différentielle de Volterra

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \tag{103}$$

équivalente á l'équation intégrale de Volterra,á condition que le noyau soit un noyau de différence défini par $K(x,t) = K(x-t)$. Ayant converti l'équation intégro-différentielle en une équation intégrale équivalente, cette dernière peut être résolue en utilisant l'une des méthodes présentées au chapitre 3, la méthode d'Adomian, la méthode de la solution en série ou la méthode de transformation de Laplace. Cela peut se faire facilement en intégrant les deux membres de l'équation et en utilisant les conditions initiales.

Nous rappelons quelques formules spécifiques :

$$\int_0^x \int_0^x u(t)dtdt = \int_0^x (x-t)u(t)dt,$$

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dtdt = \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \ldots \int_0^x u(t)dt \ldots dt\, dt}_{n: intgrations} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}u(t)dt.$$

Pour illustrer cette méthode, considérons l'exemple suivant.

Exemple 5.8 *Résoudre l'équation Intégro-différentielle de Volterra suivante en la convertissant á une équation intégrale de Volterra .*

$$u'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\int_0^x \int_0^x u(t)dt,\ u(0) = 0. \tag{104}$$

Solution

En intégrant les deux membres de 0 *á* x *et en utilisant la condition initiale et aussi en convertissant la double intégrale á une seule intégrale , nous obtenons*

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}\int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dt \\ &= 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}\int_0^x \int_0^x (x-t)u(t)dt \end{aligned} \tag{105}$$

Il est clair que l'équation ci-dessus est une équation intégrale standard de Volterra. Nous la résolvons par la méthode de décomposition en prenant.

$$u_0(x) = 2x - \frac{x^3}{12}, \tag{106}$$

ce qui donne

$$u_1(x) = \frac{1}{4}\int_0^x (x-t)\left(2t - \frac{t^3}{12}\right) dt, \tag{107}$$

$$= \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{240}. \tag{108}$$

Nous pouvons facilement observé que $\frac{x^3}{12}$ *apparaît avec des signes opposés dans les termes* $u_0(x)$ *et* $u_1(x)$, *et en annulant ce terme dit terme de bruit de* $u_0(x)$ *ce qui justifie la solution* $u(x) = 2x$. *Ce résultat peut être facilement vérifié aussi en prenant le transformé de Laplace de l'équation (104).*

5.4.3 Conversion á un problème á valeurs initiales

Dans cette section, nous allons étudier comment réduire l'équation de Volterra intégro-différentielle á un problème á valeurs initiales équivalent.
Ayant converti l'équation intégro-différentielle de Volterra á un problème á valeurs initiales , les différentes méthodes qui sont utilisées dans n'importe quelle équation différentielle ordinaire peuvent être utilisées pour déterminer la solution. Nous illustrons ceci sur l'exemple suivant.

Exemple 5.9 *Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante en la convertissant á un problème á valeurs initiales.*

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt,\ u(0) = 0, \tag{109}$$

Solution *En utilisant la règle de Leibnitz, nous obtenons*

$$u''(x) = u(x),\ u(0) = 0, u'(0) = 1, \tag{110}$$

La solution de l'équation (110) est simplement

$$u(x) = A\cosh x + B\sinh x,$$

oú A *et* B *sont des constantes arbitraires et en utilisant les conditions initiales, nous avons* $A = 0$ *et* $B = 1$ *et donc la solution devient* $u(x) = \sinh x$.

Exercise : Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra [1-4] en réduisant l'équation á un problème á valeurs initiales.

1.Soit le problème

$$\begin{cases} u'(x) = 6 - 3x^2 + \int_0^x u(t)dt, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{111}$$

2.Soit le problème

$$\begin{cases} u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, \\ u(0) = 1. \end{cases} \tag{112}$$

3.Soit le problème

$$\begin{cases} u'(x) = 2 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4}\int_0^x u(t)dt, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{113}$$

4. Soit le problème

$$\begin{cases} u''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \\ u(0) = 1, u'(0) = 1. \end{cases} \tag{114}$$

Réponses

1. Différencion les deux membres de (111)

$$u''(x) - u(x) = -6x, u(0) = 0, u'(0) = 6. \tag{115}$$

L'équation différentièlle ordinaire homogène associée á ,(111) est :

$$u''(x) - u(x) = 0.$$

L'équation caracteristique correspondante est

$$(r^2 - 1) = 0$$

dont les racines sont

$$r = 1, r = -1$$

afin que la solution complémentaire soit donnée par

$$u_c(x) = Ae^x + Be^x. \tag{116}$$

Trouvons une solution particulière $u_p(x)$. Pour cela nous substituons

$$u_p(x) = C + Dx, \tag{117}$$

dans (115) et aprés identification des coefficients, nous trouvons que $C = 0, D = 6$. Ceci donne la solution générale

$$u(x) = u_c(x) + u_p(x) = Ae^x + Be^x + 6x. \tag{118}$$

Les constantes A et B peuvent être déterminée en utilisant les conditions initiales,oú nous trouvons $A = 0, B = 0$. La solution exacte est donnée par

$$u(x) = 6x.$$

De manière similaire nous obtenons pour :
2. La solution exacte est

$$u(x) = e^x.$$

3. La solution est

$$u(x) = 2x.$$

4. La solution est

$$u(x) = e^x.$$

5.4.4 La méthode de décomposition

La méthode de décomposition d'Adomian [19],[4],[2] donne la solution sous forme d'une série infinie de termes qui peuvent être rédéterminés.
Sans perte de généralité, nous pouvons supposer une forme standard d'une équation intégro-différentielle de Volterra définie par la forme standard

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \\ u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n-1. \end{cases} \tag{119}$$

Il est naturel de chercher une expression pour $u(x)$ qui sera dérivée de l'équation (119). Cela peut être fait en intégrant les deux membres de l'équation (119) de 0 á x autant de fois que l'ordre de dérivée impliqué. Par conséquent, nous obtenons

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u(t)dt\right). \tag{120}$$

oú $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k!} b_k x^k$ est obtenue en utilisant les conditions initiales,et L^{-1} est un opérateur d'intégration. Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer la méthode de décomposition en définissant la solution $u(x)$ de l'équation (120) par une série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x). \tag{121}$$

Par substitution de l'équation (121) dans (120), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\, b_k\, x^k + L^{-1}(f(x)) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt\right)\end{aligned} \tag{122}$$

Cette équation peut être explicitement écrite comme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\, b_k\, x^k + L^{-1}(f(x)) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right) dt\right).\end{aligned} \tag{123}$$

Nous avons

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\, b_k\, x^k + L^{-1}(f(x))$$

$$u_1(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt\right),$$

$$u_2(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt\right),$$

$$u_3(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_2(t)dt\right),$$

$$u_4(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_3(t)dt\right),$$

et ainsi de suite. Les équations susmentionnées peuvent être écrites comme suit

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\, b_k\, x^k + L^{-1}(f(x)) \tag{124}$$

$$u_{n+1}(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_n(t)dt\right), n \geq 0. \tag{125}$$

L'exemple suivant explique comment nous pouvons utiliser la méthode de décomposition.

Exemple 5.10 *Résoudre l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante :*

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \\ u'(0) = 1, u(0) = 0. \end{cases} \tag{126}$$

Solution : *Appliquons l'opérateur d'intégration* L^{-1}

$$L^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^{x_1} (.)dx_2\, dx_1, \tag{127}$$

aux deux membres de l'équation (126), c.-á-d. en intégrant les deux membres de l'équation (126) deux fois de 0 *á* x*, et en utilisant les conditions données*

$$u(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u(t)dt\right) \tag{128}$$

En suivant le schéma de décomposition, c.-á-d. les équations (124) et (125), nous trouvons

$$u_0(x) = x + \frac{x^3}{3!}$$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_0(t)dt\right), \\ &= \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}. \end{aligned} \tag{129}$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_1(t)dt\right), \\ &= \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!}. \end{aligned} \tag{130}$$

La solution finale peut être écrite comme suit :

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!}... \tag{131}$$

La solution exacte est $u(x) = \sinh x$.

5.5 Equations intégro-diff de Fredholm

Dans cette section, nous discuterons les méthodes de résoudre des équations intégro-différential de Fredholm. Nous faisons remarquer ici que nous concentrerons notre attention sur les équations dont les noyaux sont séparables i.e le noyau $K(x,t)$ peut être exprimé comme la somme finie sous la forme

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{k=n} g_k(t)h_k(t). \tag{132}$$

Sans perte de généralité, nous ferons l'étude sur un noyau de la forme $K(x,t) = g(x)h(t)$ et ceci peut être généralisé pour d'autres cas.

5.5.1 La méthode de calcul direct

Sans perte de généralité,nous considérons l'équation intégro-différentielle de Fredholm donnée par

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \\ u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n-1. \end{cases} \tag{133}$$

Substituons $K(x,t) = g(x)h(t)$ dans l'équation (133), alors

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x) + g(x)\int_0^x h(t)u(t)dt, \\ u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n-1. \end{cases} \tag{134}$$

Nous posons

$$\alpha = \int_0^1 h(t)u(t)dt, \tag{135}$$

et l'équation (134) peut être écrite comme

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x), \\ u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq n-1. \end{cases} \tag{136}$$

Nous intégrons les deux membres de l'équation (136) n fois de 0 á x, et en utilisant les conditions initiales données $u^{(k)} = b_k, 0 \leq k \leq (n-1)$, nous obtenons une expression pour $u(x)$ sous la forme suivante

$$u(x) = p(x,\alpha), \tag{137}$$

Nous allons maintenant envisager cette méthode sur un exemple.

Exemple 5.11 *Résoudre le problème*

$$\begin{cases} u^{(3)}(x) = \sin x - x - x\int_0^{\frac{\pi}{2}} tu'(t)dt, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0, \\ u''(0) = -1. \end{cases} \tag{138}$$

Nous posons

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tu'(t)dt, \tag{139}$$

et l'équation (138) peut être écrite comme suit

$$\begin{cases} u^{(3)}(x) = \sin x - x - \alpha x, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0, \\ u''(0) = -1. \end{cases} \tag{140}$$

En intégrant l'équation (140) trois fois de 0 *á* x *et en utilisant les conditions initiales, nous trouvons*

$$u''(x) = -\cos x - \frac{1+\alpha}{2!}x^2$$

$$u'(x) = -\sin x - \frac{1+\alpha}{3!}x^3$$

$$u(x) = \cos x - \frac{1+\alpha}{4!}x^4$$

la substitution de l'expression pour $u'(x)$ *dans l'équation (139) nous donne*

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -t\sin t - \frac{1+\alpha}{3!}t^4 dt \\ &= -1. \end{aligned} \tag{141}$$

et par conséquent $u(x) = \cos x - \dfrac{1+(-1)}{4!}x^4 = \cos x.$ *Qui est la solution exacte du problème (138).*

5.5.2 La méthode de décomposition

Dans cette section, nous étudierons comment cette méhode puissante peut être mise en oeuvre pour déterminer une solution sous forme de série, des équations intégro-différentielles de Fredholm. Nous considérons une forme standard de l'équation intégro-différentielle de Fredholm donnée ci-dessous

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \\ u^{(k)}(0) = b_k, \ 0 \le k \le n-1. \end{cases} \tag{142}$$

Substituons $K(x,t) = g(x)h(t)$ dans l'équation (142)

$$L(u(x)) = f(x) + g(x)\int_0^x h(t)u(t)dt. \tag{143}$$

En intégrant les deux membres de l'équation (142) de 0 á x autant de fois que l'ordre de dérivée impliqué. Par conséquent, nous obtenons

$$u(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\,b_k\,x^k+L^{-1}(f(x))+\left(\int_0^1 h(t)u(t)dt\right)L^{-1}(g(x)). \tag{144}$$

oú $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\,b_k\,x^k$ est obtenue en utilisant les conditions initiales.
Dans la méthode de décomposition, nous définissons d'habitude la solution $u(x)$ de l'équation (142) sous forme de série donnée par

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x). \tag{145}$$

Substituant l'équation (145) dans les deux membres de d'équation (144), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\,b_k\,x^k+L^{-1}(f(x))\\ &+ \left(\int_0^x h(t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt\right)L^{-1}(g(x)),\end{aligned} \tag{146}$$

nous avons

$$u_0(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\,b_k\,x^k+L^{-1}(f(x)) \tag{147}$$

$$u_{n+1}(x)=\left(\int_0^1 h(t)u_n(t)dt\right)L^{-1}(g(x)),\ n\geq 0 \tag{148}$$

Compte tenu de l'équation (148) les termes de $u(x)$ sont immédiatement déterminés et par conséquent la solution $u(x)$ est déterminée.
Le calcul peut être minimisé, parfois, en observant les soi-disant phénomènes de bruit auto-annulant.

Remarque 5.1 *Les phénomènes des termes de bruit auto-annulant ont été introduits par Adomian et Rach [2] et il a été prouvé que la solution exacte de toute équation intégrale ou intégrodifférentielles, dans certains cas, peut être obtenue en considérant les deux premiers termess u_0 et u_1 seulement. Cependant, si la solution exacte n'est pas atteinte en utilisant ce phénomène, alors nous devrions continuer á déterminer d'autres composants de $u(x)$ pour obtenir une solution exacte ou une solution approximative.*

La méthode de décomposition modifiée

La méthode standard de décomposition d'Adomian introduit la relation de recurrence

$$\begin{cases}u_0(x)=f(x)\\ u_k(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_k(t)dt, k\geq 0.\end{cases} \tag{149}$$

La méthode de décomposition modifiée présente une légère variation de la relation de recurrence (149) pour déterminer les termes de $u(x)$ de manière plus facile et plus rapide. Dans de nombreux cas, la fonction $f(x)$ peut être définie comme la somme de deux fonctions partielles, á savoir $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{150}$$

Compte tenu de (150) nous introduisons un changement qualitatif dans la relation de recurrence (149). La méthode de décomposition modifiée identifie le terme $u_0(x)$ par une partie de $f(x)$ á savoir $f_1(x)$ ou $f_2(x)$. La méthode de décomposition modifiée utilise la relation de recurrence modifiée

$$\begin{cases} u_0(x) = f_1(x) \\ u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_0(t)dt, \\ u_k + 1(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u_k(t)dt, k \geq 1. \end{cases} \tag{151}$$

5.5.3 Conversion en équations intégrales de Fredholm

Cette section est consacrée á une technique qui réduira l'équation intégro-différentielle de Fredholm á une équation intégrale équivalente de Fredholm. Cela peut être facilement fait en intégrant de 0 á x les deux membres de l'équation intégro-différentielle autant de fois que l'ordre de dérivée impliqué dans l'équation ,et en utilisant les conditions initiales données.

Exemple 5.12 *Résoudre l'équation Intégro-différentielle de Fredholm suivante en la réduisant á une équation intégrale de Fredholm*

$$\begin{cases} u''(x) = e^x - x + x\int_0^x t\,u(t)dt, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 1. \end{cases} \tag{152}$$

Solution :
Intégrons les deux membres de l'équation (152) deux fois de 0 á x et en utilisant les conditions initiales, nous obtenons

$$u(x) = e^x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!}\int_0^1 tu(t)dt, \tag{153}$$

une équation intégrale typique de Fredholm. Par la méthode de calcul direct, cette équation peut être écrite comme

$$u(x) = e^x - \frac{x^3}{3!} + \alpha\frac{x^3}{3!}, \tag{154}$$

oú la constante α est détérminée par

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt. \tag{155}$$

Substituons l'équation (154) par l'équation (155), nous obtenons

$$\alpha = \int_0^1 t\left(e^t - \frac{t^3}{3!} + \alpha\frac{t^3}{3!}\right)dt, \tag{156}$$

ce qui donne $\alpha = 1$. Ainsi, la solution peut être écrite comme $u(x) = e^x$.

5.6 Exercices

A) Résoudre les équations suivantes en utilisant la méthode de décomposition

1. $u'(x) = -1 + 24x + \int_0^1 u(t)dt, u(0) = 0$
2. $u'(x) = \dfrac{-\pi}{2}x + \sin 2x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(t)dt, u(0) = 0$
3. $u'(x) = 1 - x + \cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)dt, u(0) = 0$
4. $u''(x) = \dfrac{-\pi}{4} - 2\cos 2x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)dt, u(0) = 1, u'(0) = 0$

B) Résoudre par la méthode de calcul direct

5. $u'(x) = \dfrac{x}{2} - \int_0^1 xtu(t)dt, u(0) = \dfrac{1}{6}.$
6. $u''(x) = -\sin x + x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt, u(0) = 0, u'(0) = 1.$

5.7 Table du transformé de Laplace

Transformé de Laplace : $\mathcal{L} : f \to F = \mathcal{L}f$

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Propriétés Générales du transformé de Laplace

	F(s)	f(x)
1	$aF_1(s) + bF_2(s)$	$af_1(t) + bf_2(t)$
2	$F(as)(a > 0)$	$\frac{1}{a}f(t/a)$
3	$[F(s/a)$	$af(at)$
4	$F(s-a)$	$e^{st}f(t)$
5	$F(s+a)$	$e^{-st}f(t$
6	$F(as-b)$	$\frac{1}{a}e^{bt/a}f(t/a)$
7	$\frac{1}{2i}(F(s-ia) - F(s+ia))$	$f(t)\sin at$
8	$\frac{1}{2}(F(s-ia) + F(s+ia))$	$f(t)\cos at$
9	$\frac{1}{2}(F(s-a) + F(s+a))$	$f(t)\cosh at$
10	$\frac{1}{2}(F(s-a) - F(s+a))$	$f(t)\sinh at$
11	$sF(s) - f(0)$	$f'(t)$
12	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	$f''(t)$
13	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \cdots f^{n-1}(0)$	$f^{(n)}(t)$
14	$F'(s)$	$-tf(t)$
15	$F^{('')}(s)$	$(-t)^2f(t)$
16	$F^{(n)}(s)$	$(-t)^nf(t)$
17	$\dfrac{F(s)}{s}$	$\int_0^t f(r)dr$
18	$\dfrac{F(s)}{s^n}$	$\int_0^t \dfrac{(t-r)^{n-1}}{(n-1)!} f(r)dr$
19	$F(s)G(s)$	$\int_0^t f(t-r)g(r)dr$
20	$\int_s^\infty F(z)dz$	$\dfrac{f(t)}{t}$
21	$\int_s^\infty \cdots \int_s^\infty F(z)dz^n$	$\dfrac{f(t)}{t^n}$

	F(s)	f(x)
1	$F(s) = 1$	$f(t) = \delta$
2	$F(s) = \frac{1}{s}$	$1, u(t)$
3	$\frac{1}{s^2}$	$f(t) = t$
4	$\frac{1}{s^n}, n = 1, 2, \ldots$	$f(t) = \frac{t^n - 1}{(n-1)!},$
5	$F(s) = \frac{1}{s^n}, n > 0$	$f(t) = \frac{t^n - 1}{\Gamma(n)}$
6	$\frac{1}{s-a}$	$f(t) = e^{at}$
7	$\frac{1}{1+as}$	$f(t) = \frac{1}{a}e^{-t/a}$
8	$\frac{1}{(s-a)^n}, n = 1, 2, \ldots$	$f(t) = \frac{t^n - 1}{(n-1)!}e^{at}$
9	$F(s) = \frac{1}{(s-a)^n}, n > 0$	$f(t) = \frac{t^n - 1}{\Gamma(n)}e^{at}$
10	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$f(t) = \sin at$
11	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$f(t) = \cos at$
12	$\frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \sin at$
13	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
14	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh at$
15	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
16	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cosh at$
17	$\frac{a}{(s-b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \sinh at$
18	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$
19	$\frac{1}{s(1+sa)}$	$1 - e^{-t/a}$
20	$\frac{1}{(s-b)(s-a)}, a \neq b$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{a-b}$
21	$\frac{s}{(s-b)(s-a)}, a \neq b$	$\frac{be^{bt} - ae^{at}}{b-a}$

5.8 Sujets d'examens

Exercice 1.

Soit (G) l'équation intégrale

$$g(x) = A + Bx + \int_0^x [C + D(x-t)]g(t)\,d\,t$$

oú $A, B, C; D$ sont des constantes arbitraires.

1. Classer l'équation (E).
2. Montrer que l'équation (E) a pour solution la fonction

$$u(x) = K_1 \exp(m_1 x) + K_2 \exp(m_2 x),$$

oú les constantes K_1, K_2, m_1, m_2 dépendent de A, B, C, D.

Exercice 2.

Soient l'équation intégrale (F), $0 \leq x \leq l$ et $y(0) = \alpha$, $y(l) = \beta$.

$$y(x) = A + Bx + \int_0^x (x-t)\, f(t, y(t))dt,$$

1. Classer l'équation (F).
2. Exprimer A et B en fonction de α et β
3. Montrer que l'équation intégrale (F) s'écrit sous la forme

$$y(x) = Z(x) - \int_0^l K(x,t)\, f(t, y(t))d\,t.$$

4. Trouver le problème au bord associé á l'équation intégrale (F).

Exercice 3.

Soit (G) l'équation intégrale

$$u(x) = x + \exp x - \frac{4}{3} + \int_0^1 t\,u(t)d\,t$$

1. classer l'équation intégrale (G) .
2. réduire l'equation á un probleme au bord .
3. résourdre (G) par la méthode de décomposition d'Adomian.

Exercice 1.

Soit l'équation intégrale $u(x) = x - \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{1}{3}\int_0^1 \dfrac{1}{1+u^2(t)}dt.$

1. Classer cette equation.
2. Montrer que $u(x) = x$ est solution de l'équation intégrale.

Soit l'équation intégrale
$u(x) = f(x) + \int_0^x (1-t)u(t)dt - \int_0^1 x(x-t)u(t)dtdt,$

1. Classer cette équation.
2. Si $u(x) = 6x$ est solution de l'équation intégrale,trouver $f(x)$.

Exercice 2.

Verifier que $y(x) = \frac{1}{k}\int_0^x f(\alpha)\sin k(x-\alpha)d\alpha$
est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{d^2x} + k^2y = f(x),$$

oú k est une constante.

Exercice 3.

Soit l'équation intégrale $u(x) = 3x^2 + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt.$

$$K(x,t) = \begin{cases} t(1-x) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq x\,, \\ x(1-t) & \text{si} \quad x \leq t \leq 1\,, \end{cases}$$

1. Classer l'équation intégrale .
2. Réduire l'équation á un probleme au bord .
3. Résoudre cette équation.

Exercice 1.

A) Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^x (x-t)^n u(t)dt.$$

Montrer que $F^{(n+1)}(x) = n!\, u(x) \quad n \geq 0.$
B) Soit l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \int_0^x (1-t)u(t)dt - \int_0^1 x(x-t)u(t)dt.$$

1. Classer cette équation.
2. Si $u(x) = 6x$ est solution de l'équation intégrale,trouver $f(x)$.

Exercice 2.

Verifier que la fonction

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x f(\alpha)\sin\pi(x-\alpha)d\alpha$$

est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \pi^2 y = f(x).$$

Exercice 3.

Soit l'équation intégrale

$$u''(x) = -1 - x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 1, u'(0) = 1.$$

1. Classer l'équation intégrale.
2. Calculer $l(\cos(x))$, $l(\sin(x))$ (l d'esigne le transformé de Laplace).
3. Résourdre l'équation par la méthode du transformé de Laplace.
4. Convertire l'équation intégrale donnée aúne équation différentielle.

Exercice 1.

Soit l'équation intégrale $\sinh(x) = \int_0^x \exp(x-t)u(t)dt$.

1. Classer cette équation.
2. Calculer $l(\exp(-x))$ (l : désigne l'opérateur de Laplace).
3. Convertir l'équation donnée á une équation de 2^{iem} espece.
4. Résourdre l'équation obtenue par la transformée de Laplace.

Exercice 2.

Soit l'équation intégrale $u"(x) = f(x) + \dfrac{4}{\pi} \int_0^x \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(t)dt\, dt$

1. Classer cette équation.
2. Si $u(x) = \sin(x)$ est solution de l'équation ,trouver $f(x)$.

Exercice 3.

Soit l'équation intégrale $u(x) = \exp(3x) + \int_0^1 K(x,t)u(t)dt$.

$$K(x,t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq x\,, \\ x & \text{si} \quad x \leq t \leq 1\,, \end{cases}$$

1. Classer l'équation intégrale .
2. Réduire l'équation á un probleme au bord .
3. Résoudre cette équation.

Exercice 4.

Soit l'équation intégrale $u(x) = \dfrac{7x}{8} + \dfrac{1}{2} \int_0^1 xtu^2(t)dt$.

1. Classer l'équation intégrale .
2. Résoudre cette équation par la méthode de calcul direct.

Exercice 1.

Soit la fonction $F(x) = \int_0^x (x-t)^3\, u(t)\, dt$.

Calculer les dérivées $F', F^{('')}, F^{(''')}, F^{(iv)}$.

Exercice 2.

Soit l'équation intégrale

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \sin(x) - \cos(x) = \int_0^x (x-t+1)u(t)\, dt,$$

$u(x)$ est la fonction inconnue.

1) Classer cette équation.
2) Calculer $\mathcal{L}(1+x), \mathcal{L}(\cos(x)), \mathcal{L}(\sin(x))$, $\mathcal{L}$ désigne l'opérateur de Laplace .
3) Résourdre l'équation intégrale .

Exercice 3.

Soit l'équation intégrale

$$u(x) = \exp(3x) + \int_0^x k(x,t)\, u(t)\, dt.$$

$$k(x,t) = \begin{cases} t & si \;\; 0 \le t \le x, \\ x & si \;\; x \le t \le 1. \end{cases}$$

1) Classer l'équation intégrale .
2) Convertire l'équation donnée á un pb au bord.

Exercice 4.

Soit l'équation intégrale

$$u(x) = 1 - x\sin(x) + x\cos(x) + \int_0^x t\, u(t)dt.$$

1) Classer l'équation intégrale .
2) Résourdre l'équation par la méthode des approximations succéssives en prenant $u_0(x) = x$.

Exercice 1.

Soit la fonction $F(x) = \int_0^x (x-t)^4 \, u(t) \, dt$.

Calculer $F', F^{('')}, F^{(''')}, F^{(iv)}$.

Exercice 2.

Soit l'équation intégrale

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \sin(x) - \cos(x) = \int_0^x (x - t + 1)u(t) \, dt,$$

$u(x)$ est la fonction inconnue.

1) Classer cette équation.
2) Calculer $\mathcal{L}(1+x), \mathcal{L}(\cos(x)), \mathcal{L}(\sin(x))$, $\mathcal{L}$ désigne l'opérateur de Laplace .
3) Résourdre l'équation intégrale .

Exercice 3.

Soit l'équation intégrale

$$u(x) = \exp(3x) + \int_0^x k(x,t) \, u(t) \, dt,$$

$$k(x,t) = \begin{cases} t & si \;\; 0 \le t \le x, \\ x & si \;\; x \le t \le 1. \end{cases}$$

1) Classer l'équation intégrale .
2) Convertire l'équation donnée á un pb au bord.

Exercice 4.

Soit l'équation intégrale

$$u(x) = 1 - x\sin(x) + x\cos(x) + \int_0^x t \, u(t) dt.$$

1) Classer l'équation intégrale .
2) Résourdre l'équation par la méthode des approximations succéssives en prenant $u_0(x) = x$.

Exercice 1.

Soientt les équations intégrales

$$(E1):\ xe^x = \int_0^x e^{(x-t)} u(t)dt.$$

1) Classer l'équations intégrale
2) Resoudre par la méthodede de la transformation de Laplace.

Exercice 2.

Soit l'équation intégrale

$$(E2):\quad \int_0^1 |x-t|\, u(t)\, dt = f(x),$$

$u(x)$ est la fonction inconnue. On suppose que $f''(x)$ existe pour $x \in [0,1]$.

1) Ecrire l'équation $(E2)$ sans symbole de valeurs absolue .
2) Exprimer $f(0), f(1)$ en fonction de $u(.)$.
3) Résoudre l'équation intégrale $(E2)$.

Exercice 3.

Soit l'équation intégrale

$$u(x) = \exp(3x) + \int_0^1 k(x,t)\, u(t)\, dt.$$

$$k(x,t) = \begin{cases} t & si\ \ 0 \leq t \leq x, \\ x & si\ \ x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

1) Classer l'équation intégrale .
2) Convertire l'équation donnée á un pb au bord.

Bibliographie

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I.E., Handbook of Mathematical Functions, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series-55, 1970.

[2] A.M. Wazwaz, A First Course in Integral Equations, World Scientific, Singapore,(1997).

[3] A.M. Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, HEP and Springer, Beijing and Berlin, (2009).

[4] A.M. Wazwaz, A reliable treatment for mixed Volterra-Fredholm integral equations, Appl. Math. Comput., 127 (2002) 405-414.

[5] A.M. Wazwaz, Necessary conditions for the appearance of noise terms in decomposition solution series, Appl. Math. Comput., 81 (1997) 199-204.

[6] A.J. Jerri, Introduction to Integral Equations with Applications, Wiley, New 1999.

[7] Adomian, G. Solving Frontier Problem : The Decomposition Method, Kluwer : Dordrecht, 1994.

[8] Adomian, G. Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press : San Diego, CA, 1986.

[9] Adomian, G. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation, Math. Comput. Modelling, 13(7), pp. 17-43, 1992.

[10] Adomian, G. Rach, R. Noise terms in decomposition series solution, Computers Math. Appl., 24(11), pp. 61-64, 1992.

[11] Bocher,M.IntegralEquations,CambridgeUniversityPress,London,(1974)

[12] C. Baker, The Numerical Treatment of Integral Equations, Oxford University Press, London, (1977).

[13] C.D. Green, Integral Equations Methods, Barnes and Noble, New York, (1969).

[14] D.L. Phillips, A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, J. Assoc. Comput. Mach, 9 (1962) 84-96.

[15] H. Hochstadt, Integral Equations,Wiley, New York, (1973).

[16] L.G. Chambers, Integral Equations, A Short Course, International Textbook Company, London, (1976).

[17] L.M. Delves, and J. Walsh, Numerical Solution of Integral Equations, Oxford University Press, London, (1974).

[18] Lovitt,W.V.Linear Integral Equations, Dover Publications Inc. : New York,1950.

[19] R. Kress, Linear Integral Equations,Springer, Berlin, (1999).

[20] R. Kanwal, Linear Integral Equations, Birkhauser, Boston, (1997).

[21] Rahman, M., Mathematical Methods with Applications, WIT Press : Southampton, UK 2000.

[22] R.F. Churchhouse, Handbook of Applicable Mathematics, Wiley, New York, (1981).

[23] TikhonovA,.N., On the solution of incorrectly posed problem and the method of regularization, Soviet Math, 4 (1963) 1035-1038.

[24] Y. Cherruault and V. Seng, The resolution of non-linear integral equations of the first kind using the decomposition method of Adomian, Kybernetes, 26 (1997) 109-206.