Examen de Rattrapage

EXERCICE 01 (07 pts) :

1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer par contraposée que si $a+b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

2) Montrer par l'absurde que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par disjonction des cas que $n(n^2+5)$ est un multiple de 3.

EXERCICE 02 (08 pts):

I - Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1.1) Montrer que pour tous réels $x, x' \in \mathbb{R}$, si $f(x) = f(x')$ alors $|x| = |x'|$.

1.2) En déduire que f est injective.

2.1) Vérifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R} :\ -1 < f(x) < 1$.

2.2) f est-elle surjective ?

3) Montrer que l'application $h: \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ définie par $h(x) = f(x)$ est bijective.

II - On définit sur $\mathbb{R}$, la relation binaire $\mathbb{S}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R} :\ x\mathbb{S}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.

1) Montrer que $\mathbb{S}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

2) L'ordre est-il total ?

EXERCICE 03 (05 pts):

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R} \ :\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 2k\pi$.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer $\dot{a}$ la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}$.

Bon courage

Corrigé du Rattrapage

EXERCICE 01 (07pts):

1) Pour montrer par contraposée que : " $a+b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels " , il suffit de montrer que "a et b ne sont pas irrationnels alors $a+b$ n'est pas irrationnel ".

En effet : (a et b ne sont pas irrationnels) $\Longrightarrow \left(a=\frac{m}{n} \text{ et } b=\frac{p}{q}\right.$, avec $m,p \in \mathbb{Z}$ et $\left. n,q \in \mathbb{Z}^*\right)$

$$\Longrightarrow a+b=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq} \in \mathbb{Q}, \text{ avec } m,p \in \mathbb{Z} \text{ et } n,q \in \mathbb{Z}^*$$

$\Longrightarrow a+b$ n'est pas irrationnel.................................*(2pts)*

2) Supposons que $\exists x,y \in \mathbb{R}_+ : x+y<2\sqrt{xy}$. On a :

si $x+y<2\sqrt{xy}$ alors $x+y-2\sqrt{xy}<0$, donc $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2<0$, ce qui est absurde.

Par suite, on a : $\forall x,y \in \mathbb{R}_+ : x+y \geq 2\sqrt{xy}$ . ...*(2pts)*

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

1^er cas : Si $n=3k$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n(n^2+5)=3k((3k)^2+5)$ qui est multiple de 3.

2^ème cas : Si $n=3k+1$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n(n^2+5)=(3k+1)((3k+1)^2+5)=(3k+1)(9k^2+6k+1+5)$

$$=3(3k+1)(3k^2+2k+2) \text{ qui est multiple de 3.}$$

3^ème cas : Si $n=3k+2$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n(n^2+5)=(3k+2)((3k+2)^2+5)=(3k+2)(9k^2+12k+4+5)$

$$=3(3k+2)(3k^2+4k+3) \text{ qui est multiple de 3}$$

Par suite, dans tous les cas $n(n^2+5)$ est un multiple de 3...*(3pts)*

EXERCICE 02 (08pts):

I -

1.1) Soit $x,x' \in \mathbb{R}$, on a : $f(x)=f(x') \Longrightarrow \frac{x}{1+|x|}=\frac{x'}{1+|x'|} \Longrightarrow \left|\frac{x}{1+|x|}\right|=\left|\frac{x'}{1+|x'|}\right| \Longrightarrow \frac{|x|}{1+|x|}=\frac{|x'|}{1+|x'|}$

$$\Longrightarrow |x|+|x||x'|=|x'|+|x'||x| \Longrightarrow |x|=|x'|$$ ....*(1pt)*

1.2) Soit $x,x' \in \mathbb{R}$, on a : $f(x)=f(x') \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}=\frac{x'}{1+|x'|} \\ |x|=|x'| \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}=\frac{x'}{1+|x|} \\ |x|=|x'| \end{cases} \Longrightarrow x=x'$

Alors f est injective. ....*(1pt)*

2.1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \leq |x|<1+|x|$, c-à-d $\frac{x}{1+|x|}<1$, alors

$f(x)-1=\frac{x}{1+|x|}-1<0$ c-à-d $f(x)<1$

et $f(x)-(-1)=\frac{x}{1+|x|}+1>0$ c-à-d $f(x)>-1$.

D'où $-1<f(x)<1$ ....*(1.5pt)*

2.2) Il suffit de prendre $y=4 \in \mathbb{R}$, d'après *2.1)*, on a : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 4$.

C-à-d 4 n'a pas d'antécédent par f, alors f n'est pas surjective. ....*(1pt)*

3) Soit $y \in]-1,1[$, cherchons $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $y=h(x)$, on a :

$$y=h(x) \Leftrightarrow y=\frac{x}{1+|x|} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{x}{1+x} & , \ si \ \ x \geq 0 \\ y=\frac{x}{1-x} & , \ si \ \ x \leq 0 \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} y=\frac{x}{1+x} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y}{1-y} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y}{1-y} \\ \frac{y}{1-y} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y}{1-y} \\ y \in [0,1[\end{cases}$ ....*(0.5 pt)* et $\begin{cases} y = \frac{x}{1-x} \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{1+y} \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{1+y} \\ \frac{y}{1+y} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{1+y} \\ y \in]-1,0] \end{cases}$, alors : ……………………………………..(0.5 pt)

si $y \in [0,1[$, il suffit de prendre $x = \frac{y}{1-y} \in \mathbb{R}$, pour avoir $y = h(x)$.

si $y \in]-1,0]$, il suffit de prendre $x = \frac{y}{1+y} \in \mathbb{R}$, pour avoir $y = h(x)$.

Alors h est surjective. ……………………………………………………………………… ……..(0.5pt)

Par suite h est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

II -

1.1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on : $f(x) \le f(x)$, c-à-d $x\mathbb{S}x$.

Alors $\mathbb{S}$ est réflexive. ……………………………………………………………………………… (0.5pt)

1.2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (x\mathbb{S}y \text{ et } y\mathbb{S}x) &\Longrightarrow (f(x) \le f(y) \text{ et } f(y) \le f(x)) \\ &\Longrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Longrightarrow x = y \text{ , car } f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

Alors $\mathbb{S}$ est antisymétrique. ………………………………………………………………………(0.5pt)

1.3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (x\mathbb{S}y \text{ et } y\mathbb{S}z) &\Longrightarrow (f(x) \le f(y) \text{ et } f(y) \le f(z)) \\ &\Longrightarrow f(x) \le f(z) \\ &\Longrightarrow x\mathbb{S}z \end{aligned}$$

Alors $\mathbb{S}$ est transitive. . ……………………………………………………………………… …..(0.5pt)

Par suite $\mathbb{S}$ est une relation d'ordre.

2) On a , pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\frac{x}{1+|x|} \le \frac{y}{1+|y|}$ ou $\frac{y}{1+|y|} \le \frac{x}{1+|x|}$, car $\frac{x}{1+|x|}, \frac{y}{1+|y|} \in \mathbb{R}$.

c-à-d $x\mathbb{S}y$ *ou* $y\mathbb{S}x$

Alors L'ordre est total. ………………………………………………………………………………(0.5pt)

EXERCICE 03 (05pts):

1.1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x - x = 0 = 2(0)(\pi)$, c-à-d $\exists k = 0 \in \mathbb{Z}$, $x - x = 2k\pi$, d'où $x\mathcal{R}x$.

Alors $\mathcal{R}$ est réflexive. …………………………………………………………………………… …..(1pt)

1.2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 2k\pi \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -(x-y) = 2(-k)\pi \\ &\Longrightarrow \exists k' = (-k) \in \mathbb{Z},\ y - x = 2k'\pi \\ &\Longrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est symétrique. ………………………………………………………………………… …..(1pt)

1.3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) &\Longrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 2k\pi \text{ et } \exists k' \in \mathbb{Z},\ y - z = 2k'\pi) \\ &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z},\ (x-y) + (y-z) = 2(k+k')\pi \\ &\Longrightarrow \exists k'' = (k+k') \in \mathbb{Z},\ x - z = 2k''\pi \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est transitive. . ……………………………………………………………………… ....(1.5pt)

Par suite $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$, on a :

$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}a\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z},\ x - a = 2k\pi\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z},\ x = a + 2k\pi\}$

$= \{a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = a + 2\pi\mathbb{Z}$……………………………………………………………(1.5pt)