Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Master : GL 1 et RT 1 Mathématiques Appliquées

Examen Final Corrigé

Exercice 1. (5 pts).

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2) \exp^{-(x^2+y^2)}$.

1. Justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
4. Pour chaque point critique P, écrire la matrice hessienne de f en P et déterminer, en le justifiant, la nature du point P.

Corrigé Exo 1

1. f est composée de fonctions continues et dérivables donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
2. On commence par déterminer les points critiques, en calculant le gradient de f :
$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \exp^{-(x^2+y^2)}(4x - 2x(2x^2 + 3y^2)) = 0, \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \exp^{-(x^2+y^2)}(6y - 2y(2x^2 + 3y^2)) = 0, \end{cases}$$
Discussion :

- si $x = 0$ et $y = 0$, la solution est : $(0, 0)$
- si $x \neq 0$ et $y = 0$, $\Rightarrow 4x - 2x(2x^2) = 0 \quad \Rightarrow 4x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(1 - x^2) = 0 \;\; \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1 \Rightarrow$ les solutons sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.
- si $x = 0$ et $y \neq 0$, $\Rightarrow \quad (6y - 2y)(3y^2) = 0 \Rightarrow \quad 6y - 6y^3 = 0 \Rightarrow \quad 6y(1 - y^2) = 0 \Rightarrow \quad y = 1$ ou $y = -1 \Rightarrow$ les solutons sont $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

L'ensemble des solutions de $\nabla f(x, y) = 0$ (i.e. l'ensemble des points critiques) est alors :

$$\{(0,\ 0)\ ;\ (0,\ \text{-}1)\ ;\ (0,\ 1)\ ;\ (1,\ 0)\ ;\ (\text{-}1,\ 0)\ \}.$$

3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \exp^{-(x^2+y^2)}\, xy(-20 + 8x^2 + 12y^2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \exp^{-(x^2+y^2)}(4 - 20x^2 + 8x^4 + 12x^2y^2 - 6y^2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \exp^{-(x^2+y^2)}(6 - 4x^2 + 12y^4 + 8x^2y^2 - 30y^2),$$
4. La matrice hessienne de f nous permet de déterminer la nature de chaque point critique. On a :
$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad H_{(0,1)} = H_{(0,-1)} = \exp^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$

$H_{(1,0)} = H_{(-1,0)} = \exp^{-1} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Enfin,
$det(H(0, 0)) > 0$ et $tr(H(0, 0)) > 0$ donc $(0, 0)$ est un minimum local ;
$det(H(0, 1)) > 0$ et $tr(H(0, 1)) < 0$ donc $(0, 1)$ et $(0, -1)$ sont des maxima locaux.
$det(H(1, 0)) < 0$ donc $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ ne sont pas des extremums locaux.

Exercice 2. (5 pts).

Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1 - x_2 + 4$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\bar{x} = \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ et le calculer.
2. Calculer les trois premiers itérés donnés par l'algorithme du gradient à pas fixe (GPF), en partant de $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$, pour un pas de $\alpha = 0.5$.

Corrigé Exo 2

1. Calculons le gradient de f :

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3 \\ 2x_2 - x_1 - 1 \end{cases} \qquad\qquad H_f = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   $det(H_f) = 8 - 1 > 0$ et $tr(H_f) = 6 > 0$, la matrice hessienne est définie posifive, donc f est strictement convexe et elle admet donc un minimum local.

   Ce minimum est obtenu en :

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3 = 0 \\ 2x_2 - x_1 - 1 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

   La solution de ce système est $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$.

2. Rappelons l'algorithme du gradient à pas fixe :

$$\begin{cases} \textbf{Initialisation}: \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha > 0 \\ \textbf{Itération} \ : \quad x^{(k)}\ connu, (k \geq 0) \\ \qquad\qquad w^k = -\nabla f(x^{(k)}) \\ \qquad\qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha \cdot w^{(k)}. \\ \textbf{Critère d'arrêt}: \quad \| \nabla f(x^{(k)}) \| \leq \varepsilon. \end{cases} \tag{3}$$

   A la première itération, on a $\nabla f(0,0) = (-3,-1)$ et donc $w(0) = (3,1)$.
   On en déduit, pour $\alpha = 0.5$,
   $x^1 = x^0 + \alpha(3,1) = (0,0) + 0.5(3,1) = (3/2, 1/2)$ et $f(x^1) = 3$.

   A la deuxième itération, $\nabla f(3/2, 1/2) = (5/2, -3/2)$ et donc $w(1) = (5/2, -3/2)$.
   On en déduit, pour $\alpha = 0.5$,
   $x^2 = x^1 + \alpha(3,1) = (3/2, 1/2) + 0.5(5/2, -3/2) = (11/4, -1/4)$ et $f(x^1) = 3$.

   Le tableau suivant résume les 4 premières itérations :

Itération	w	x_1, x_2	$f(x_1,x_2)$
0		(0,0)	4
1	w=(3 , 1)	(1.5 , 0.5)	3.0
2	(-2.5 , 1.5)	(0.25 , 1.25)	3.375
3	(3.25 , -1.25)	(1.875 , 0.625)	4.0
4	(-3.875 , 1.625)	(-0.0625 , 1.4375)	4.914

   Remarque 1
   Le tableau ci-dessus est calculé avec $\alpha = 0.5$, on remarque la non convergence de l'algorithme.

   Si on prend une valeur de $\alpha = \mathbf{0.01}$, on obtient le tableau suivant :

Itération	*w*	x_1, x_2	$f(x_1,x_2)$
0		*(0,0)*	*4*
1	*w=(3 , 1)*	*(0.03 , 0.01)*	*3.902*
2	*(2.89 , 1.01)*	*(0.059 , 0.02)*	*3.809*
3	*(2.78 , 1.02)*	*(0.087 , 0.03)*	*3.723*
4	*(2.68 , 1.03)*	*(0.114 , 0.041)*	*3.642*
5	*(2.59 , 1.03)*	*(0.139 , 0.051)*	*3.565*
6	*=(2.49 , 1.04)*	*(0.164 , 0.061)*	*3.493*
7	*(2.4 , 1.04)*	*(0.188 , 0.072)*	*3.426*
8	*(2.32 , 1.05)*	*(0.212 , 0.082)*	*3.362*
9	*(2.24 , 1.05)*	*(0.234 , 0.093)*	*3.302*
10	*(2.16 , 1.05)*	*(0.256 , 0.103)*	*3.245*

   La convergence de l'algorithme dans ce cas est nette. Donc le choix de la valeur du paramètre α est important.

Exercice N° 3 (5 pts).

Soit le problème d'optimisation avec contrainte :

$$(P) = \begin{cases} \min f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 22x_1 - 14x_2 \\ s.c. \quad\quad - x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ \quad\quad -3x_1 + 7x_2 \leq 0 \\ \quad\quad x_1 - x_2 \leq 4 \\ \quad\quad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

1. Donnez le lagrangien de (P).
2. Donnez les conditions de KKT :
   - les conditions de signe sur les variables
   - Calculer les dérivées partielles par rapport aux variables et poser les conditions de signe correspondantes.
   - Poser les relations d'exclusion.
   - Discuter les relations d'exclusion pour trouver la solution optimale de (P).

Corrigé Exo 3

1. La fonction de Lagrange est :

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = f(x_1, x_2) + \sum \lambda_i g_i(x_1, x_2)$$

2. - les conditions de signe sur les variables

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0 \geq, \lambda_5 \geq 0 \geq$$

   - Calculer les dérivées partielles par rapport aux variables

$$\nabla L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 - 2x_2 - 22 - \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_1 + 6x_2 - 14 + 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_5 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = (-x_1 + 3x_2 - 1) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = (-3x_1 + 7x_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = (x_1 - x_2 - 4) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = x_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_5} = x_2 \\ . \end{cases} \tag{5}$$

   - Poser les relations d'exclusion.

$$\nabla L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = \begin{cases} x_1(\frac{\partial L}{\partial x_1}) = x_1(6x_1 - 2x_2 - 22 - \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4) = 0 \\ x_2(\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(-2x_1 + 6x_2 - 14 + 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_5) = 0 \\ \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(-x_1 + 3x_2 - 1) = 0 \\ \lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(-3x_1 + 7x_2) = 0 \\ \lambda_3 \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = \lambda_3(x_1 - x_2 - 4) = 0 \\ \lambda_4 \frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = \lambda_4 x_1 = 0 \\ \lambda_5 \frac{\partial L}{\partial \lambda_5} = \lambda_5 x_2 = 0 \\ . \end{cases} \tag{6}$$

   - Discuter les relations d'exclusion pour trouver la solution optimale de (P).

Si $\quad \lambda_1 \neq 0 \quad$ et $\quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 - 22 - \lambda_1 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 14 + 3\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x_1 - 6x_2 - 66 - 3\lambda_1 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 14 + 3\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 16x_1 = 80$$

$\Rightarrow \quad \bar{x} = (\mathbf{5}; \mathbf{2}) \quad \lambda_1 = \mathbf{4} \quad$ et $\quad$ **f(5,2)= -71**.

Exercice N° 4 (5 pts).

Soit le problème d'optimisation avec contrainte :

$$(P) = \begin{cases} \max f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 22x_1 + 14x_2 \\ s.c. \qquad -x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ \qquad -3x_1 + 7x_2 \leq 0 \\ \qquad x_1 - x_2 \leq 4 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

1. La fonction f est-elle concave ?
2. Donnez la solution optimale de (P) en utilisant la méthode de projection de Mr CHIKHAOUI.
3. comparer la solution optimale avec celle de l'exercice précédent.

Corrigé Exo 4

Les valeurs propres de Q sont $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2$ donc la fonction f est concave.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -6x_1 - 2x_2 - 22 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 + 6x_2 - 14 = 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ est $x^* = (5, 4)$

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + 3x_2 \leq 1 \textbf{ et} - 3x_1 + 7x_2 \leq 0 \textbf{et} x_1 - x_2 \leq 4\}.$$

$x^* \notin \Omega$ donc, il faut construire Ω' et puisque dans la fonction objective il y'a les doubles produit, il faut la rendre sous forme canonique.

Le nouveau polyèdre est : $A2 = \begin{pmatrix} -1.4142 & 1 \\ -3.5355 & 2 \\ 0.7071 & 0 \end{pmatrix}$.
$\Omega' = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2 : -1.4142y_1 + y_2 \leq 1 \textbf{ et} - 3.5355y_1 + 2y_2 \leq 0 \textbf{ et } 0.7071y_1 - 0y_2 \leq 4\}$.

$Q = P^{-1} \times D \times P \quad P = \begin{pmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix}$. La valeur de $y^* = (1.4142\ ;\ 9)$ sa projection sur Ω' est $y_0 = (4.2426\ ;\ 7)$
Enfin le minimum de f sur Ω est $\bar{x} = (5; 2)$ et $f(5; 2) = 71$.
On trouve le même résultat que le problème précédent ; sauf qu'on utilisant KKT, le système d'équations à résoudre est difficle à trouver ; la méthode de Mr Chikhaoui donne la solution optimale analytique à tous les couts.