Univ Ibn Khaldoun de Tairet
Faculté des Maths- Info
Département d'informatique

1^{ere} Année LMD 2023-2024.
Module : Analyse I
Durée : 1^h et 30^{min}

Examen final

Exercise 1 (6*pts*)

1. *Ennocer le théorème de Rôlle* 2
2. *On considère l'ensemble* $A = \left\{ \frac{1+n(-1)^n}{n}, n > 0 \right\}$
   - (a) *Montrer que* A *est borné* 1
   - (b) *Montrer que* $\sup A = \frac{3}{2}$ 1
3. *Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera les réponses*
   - (a) *Si* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ [redacted] *convergent, alors* $(u_n)_n$ *converge aussi.* 1
   - (b) *Si* $(u_n)_n$ *est non majorée, alors elle tend vers* $+\infty$. 1

Exercise 2 (7*pts*)

Soit $(u_n)_n$ *la suite définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2$

1. *Montrer par récurrence que* $0 \leq u_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. 2
2. *Montrer que la suite* $(u_n)_n$ *est croissante* [redacted] 1,5
3. *Déduire que* $(u_n)_n$ *est convegente.* 1,5
4. *Calculer la limite de* $(u_n)_n$. 1
5. *Trouver* $\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$. 1

Exercise 3 (7*pts*) *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = \begin{cases} x + \frac{x\ln x}{1-x} & x \in]0,1[\\ 0 & x = 0 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f. 1
2. Etudier la continuité de f sur $[0,1]$. 2
3. Etudier la dérivabilité de f sur $[0,1]$. 2
4. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$. 1
5. Calculer $f'(x)$ 1

Corrigée examen Analyse 01

Exo : 01 1) théorème de Rôlle.

Soient a et b 2 Réels tels que $a<b$, si f est Continue dans $[a,b]$ (0,5) et derivable dans $]a,b[$ (0,5) et $f(a)=f(b)$ (0,5) alors il existe $c\in]a,b[$ (0,25) tel que $f'(c)=0$ (0,25)

2) $A=\left\{\frac{1+n(-1)^n}{n}, n>0\right\}=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}, n>0\right\}$. (0,25)

(0,25) $\forall n>0$, $0<\frac{1}{n}\leq 1$ et $-1\leq(-1)^n\leq 1 \Rightarrow -1<(-1)^n+\frac{1}{n}\leq 2$ (0,5)

alors A est bornée.

b) Montrons que $\sup A=\frac{3}{2}$. On décompose A en 2 sous-ensemble. $B=\left\{1+\frac{1}{2k}, k>0\right\}$, $C=\left\{-1+\frac{1}{2k+1}, k>0\right\}$ (0,25)

On a $A=B\cup C$. (0,25) D'autre part. $\sup B=\frac{3}{2}$, (0,25) $\sup C=0$

Par les propriétés $\sup A=\max(\sup B, \sup C)=\frac{3}{2}$ (0,25)

" autre méthode si elle est juste elle est acceptable "

3) $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$ Convergent, alors $(U_n)_n$ Converge

Faux (0,5) Contre exemple. ~~$U_n=\cos(n\pi)$~~, $U_n=(-1)^n$, $U_{2n}=1$ C.V (0,5)

$U_{2n+1}=-1$ Converge mais $(U_n)_n$ ne Converge pas.

• $(U_n)_n$ est non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=+\infty$ Faux ~~Vraie~~ (0,5)

Contre exemple : $U_n=n(-1)^n$ (0,5)

Exo 02 : $U_0 = 1$, $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} U_n^2$.

1) Par récurrence : On a pour $n=0$, $0 < U_0 < 2$. Vraie 0,5

On suppose que $0 \leq U_n \leq 2$ et On montre que $0 \leq U_{n+1} \leq 2$. 0,5

On a $0 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow 0 \leq U_n^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{4} U_n^2 \leq 1$, alors

$1 \leq U_{n+1} \leq 2$. 1

2) $(U_n)_n$ Croissante 0,5 $\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \geq 0$. $U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{4} U_n^2 - U_n$ 0,5

$= \frac{1}{4}(U_n - 2)^2 \geq 0$, alors 0,5 $(U_n)_n$ est croissante.

3) D'après les questions (1) et (2) $(U_n)_m$ est croissante 0,5 et majorée 0,5 par 2, alors elle converge vers la borne 0,5 $\sup\limits_{n \geq 0} U_n$.

4) $(U_n)_n$ est converge, alors 0,25 $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$, $\Leftrightarrow l = \frac{1}{4} l^2 + 1$ 0,25 $\Rightarrow$

$\frac{1}{4}(l-2)^2 = 0 \Rightarrow$ 0,25 $(l-2)^2 = 0 \Rightarrow l = 2$. 0,25

5) $\inf\limits_{n \geq 0} U_n = ?$ Comme $(U_n)_n$ Croissante 0,5, alors $\inf\limits_{n \geq 0} (U_n) = U_0 = 1$ 0,5

Exo:03 $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{x\ln x}{1-x} & x \in]0,1[\\ 0 & x=0 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

1) $D_f = [0,1]$ (1)

2) f est Continue sur $]0,1[$ (0,5) il reste au pts 0 et 1.

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x + \frac{x\ln x}{1-x} = 0$ (0,5), $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} x + \frac{x\ln x}{1-x} = 0$ (0,5)

alors f est Continue au pts 0 et 1, alors Continue sur $[0,1]$. (0,5)

3) $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x + \frac{x\ln x}{1-x} - 0}{x}$ (0,75) $= \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x(1-x)+x\ln x}{x(1-x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{*}$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{(1-x)-x+\ln x+1}{(1-x)-x} = -\infty$..

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x(1-x)+x\ln x}{(x-1)(1-x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{**} \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{-2+\frac{1}{x}}{-2} = -\frac{1}{2}$ (0,75)

alors f n'est Pas derivable au pts 0 et 1. (0,5)

4) Par le théorème de Rôlle f est Continue sur $[0,1]$, (0,25) derivable sur $]0,1[$ (0,25) et $f(0) = f(1) = 0$, (0,25) alors $\exists c \in]0,1[\,/\, f'(c) = 0$ (0,25)

5) $\forall x \in]0,1[$ (0,25) $f'(x) = 1 + \frac{(1+\ln x)(1-x)+x\ln x}{(1-x)^2}$ (0,25)

$= 1 + \frac{1-x+\ln x}{(1-x)^2}$ (0,5)