TD2

-Montrer l'Existence et l'unicité du polynôme d'interpolation d'une fonction f aux points $x_i, i = 0, ..., n$

Exercice 1: Soient les deux fonctions f et g définies par:
$f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$ et trois points $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 2$

1. Montrer sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation aux points x_0, x_1, x_2
2. Calculer ce polynôme sous forme de Lagrange

Exercice 2: Soit f une fonction à variable réelle x, continue en $x = 0$, soit (x_k) une suite définie par: $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{r}$, $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$ et soit p_k le polynôme de degré 1 qui interpole f en x_k et x_{k+1}

Montrer que: $\forall k \in \mathbb{N}, \qquad p_k(0) = \dfrac{rf(x_{k+1}) - f(x_k)}{r-1}$

Exercice 3: Démontrer que si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors le polynôme de Lagrange qui interpole f en $n+1$ points distincts est égal à f

En déduire que les polynômes de Lagrange sont tels que:
a) $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$, b) $\sum_{i=0}^{n}(x_i^k)L_i(x) = x^k$ si $k \leq n$
c) $\sum_{i=0}^{n}(x_i - x)^k L_i(x) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$

Exercice 4:

La fonction $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ étant définie par le tableau suivant:

x	1	1.001	1.002	1.003
f(x)	1	1.00033	1.00066	1.00099

Trouver $(1.0015)^{\frac{1}{3}}$ à l'aide de l'interpolation de Lagrange

Exercice 5:

Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide de la formule d'interpolation de Lagrange pour la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, si les points d'interpolation sont $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$?

Exercice 6:

1. Notons $L(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$, montrer que les polynômes de Lagrange L_j sont tels que: $L_j(x) = \dfrac{L(x)}{(x - x_j)L'(x_j)}$
2. Si les points d'interpolation sont équidistants et en posant $x = x_0 + th$ et $x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, \ldots, n$, montrer que $L_j(t) = \dfrac{(-1)^{n-j}}{n!} C_n^{n-j} \dfrac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-j}$

Exercice 7:

Soit f une fonction et P le polynôme d'interpolation de f sous forme de Newton, montrer que:
$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n]\prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j) +$
$f[x_0, \ldots, x_n, x]\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$
En déduire une estimation de l'erreur d'interpolation en fonction de $f[x_0, \ldots, x_n, x]$

Exercice 8:

Reprendre l'exercice 5 et utiliser la forme de Newton pour déterminer $\sqrt{112}$ avec les points $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 169$
Estimer l'erreur et donner le nombre de décimales exactes

TD : AN 1 :

TD1 : Interpolation Polynomiale :

Exo 1 : Existence du Polynôme d'interpolation

Si P_n existe, il doit vérifier :

$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$

$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$

Ce qui donne pour $i = 0, \ldots, n$ les équations suivantes :

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_n = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \cdots + a_n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \cdots + a_n = y_n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

la matrice V (Vandermonde) est inversible car :

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \overset{?}{\neq} 0$$

Mq : $\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$?

On fait les transformations sur les colonnes :

$C_j \longrightarrow C_j - x_0 C_{j-1}$ | $j = n, \longrightarrow 2$

$j = n$:

$$V \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & x_0 & & x_0^{n-1} & 0 \\ 1 & x_1 & & x_1^{n-1} & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & 0 \\ 1 & x_1 & & x_1^{n-1} & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{pmatrix}$$

On continue jusqu'à $j = 2$ pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{pmatrix}$$

obtient

$$\det(V) = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & \cdots & (x_1-x_0)\,x_1^{n-1} \\ x_2 - x_0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & & (x_n - x_0)\,x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$= (x_1-x_0)(x_2-x_0)\cdots(x_n-x_0)\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (x_j - x_0)\,\det(V_1)$$ avec

$$\det(V_1) = \begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

V_1 est de la même forme de V

donc:

$$\det(V_1) = \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \cdot \det(V_2)$$

avec $\det(V_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$

si on continue on obtient:

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

et pour $x_j \neq x_i$, $\forall i \neq j$ $\det(V) \neq 0$

la matrice V est inversible et le système admet une solution unique $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ donc un polynôme unique: $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$.

Exo 2

$f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$

$x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 2$

1) On a $f(1) = g(1) = 0$

$f(\frac{3}{2}) = g(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(2) = g(2) = 1$

donc f et g ont le même P.I

2) $P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\, \ell_i(x)$

$= f(x_0)\,\ell_0(x) + f(x_1)\,\ell_1(x) + f(x_2)\,\ell_2(x)$

$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-\frac{3}{2})(x-2)}{(1-\frac{3}{2})(1-2)}$$

$$= \boxed{2x^2 - 7x + 6}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}$$

$$= \boxed{-4x^2 + 12x - 8}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(2-1)(2-\frac{3}{2})}$$

$$= \boxed{2x^2-5x+3}$$

$$P_2(x) = \left(\frac{-4}{\sqrt{2}}+2\right)x^2 + \left(\frac{12}{\sqrt{2}}-5\right)x - \frac{8}{\sqrt{2}}+3$$

$$\boxed{P_2(x) = -0{,}8x^2 + 3{,}48x - 2{,}65}$$

Exo 3 : $b = P_k(0) = f(x_{k+1}) - a x_{k+1}$

$$= f(x_{k+1}) - a\frac{x_k}{r}$$

$$= \frac{r\, f(x_{k+1}) - a x_k}{r}$$

$$= \frac{r\, f(x_{k+1}) - f(x_k) + b}{r}$$

$$= \frac{r\, f(x_{k+1}) - f(x_k)}{r} + \frac{b}{r}$$

$$b\left(1-\frac{1}{r}\right) = \frac{r\, f(x_{k+1}) - f(x_k)}{r}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\frac{r f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\cancel{r}}}{\cdots} \times \frac{\cancel{r}}{r-1}$$

$$= \frac{r f(x_{k+1}) - f(x_k)}{r}$$

d'où ; $\boxed{P_k(x_0) = \frac{r f(x_{k+1}) - f(x_k)}{r}}$

Exo 4 :

1) Soit P_n est le Polynôme d'interpolation de f aux pts x_i, $i = \overline{0, \ldots n}$

alors: $|P_n - f| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

or $M_{n+1} = \sup_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)| = 0$.

car $\deg(f) \leq n$.

donc: $|P_n - f| \leq 0 \Rightarrow P_n \equiv f$

2) $P_n(x) = f(x) \Rightarrow \boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)}$

$(*)$

a) on pose $f(x) = 1$ ds (α)

donc $\boxed{1 = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)}$

b) on pose $f(x) = x^k \Rightarrow f(x_i) = x_i^k$.

donc $\boxed{x^k = \sum_{k=0} l_i(x)\, x_i^k}$

c) on applique $(x_i - x)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x_i^{k-j} (-x)^j$ (binôme de Newton)

donc $\sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^k l_i(x) =$

$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} C_k^j x_i^{k-j} (-x)^j l_i(x)$

$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-x)^j \sum_{i=0}^{n} x_i^{(k-j)} l_i(x)$

$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-x)^j x^{k-j}$ (d'après (b))

$= (x - x)^k = \boxed{0}$

Exo 8 trouver $(1,00015)^{\frac{1}{3}}$ par Lagrange

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\, l_i(x)$$

$$P_3(1,00015) = f(x_0)\, l_0(1,00015) + f(x_1)\, l_1(1,00015) + f(x_2)\, l_2(1,00015)$$

$$l_0(1,00015) = \frac{(1,00015 - 1,001)(1,00015 - 1,002)(1,0001 - 1,003)}{(1 - 1,001)(1 - 1,002)(1 - 1,003)}$$

$$\boxed{= 6,25 \times 10^{-2}}$$

$$l_1(1,00015) = \frac{(1,00015 - 1)(1,00015 - 1,002)(1,00015 - 1,003)}{(1,001 - 1)(1,001 - 1,002)(1,001 - 1,003)}$$

$$= \boxed{5,625 \times 10^{-1}}$$

$$l_2(1,00015) = \frac{(1,00015 - 1)(1,00015 - 1,001)(1,0001 - 1,003)}{(1,002 - 1)(1,002 - 1,001)(1,002 - 1,003)}$$

$$= \boxed{5,625 \times 10^{-1}}$$

$$l_3(1{,}0015) = \frac{(1{,}0015-1)(1{,}0015-1{,}001)(1{,}0015-1{,}002)}{(1{,}003-1)(1{,}003-1{,}001)(1{,}003-1{,}002)}$$

$$= -6{,}25 \times 10^{-2}$$

$$\boxed{P_3(1{,}0015) \simeq 1{,}000495}$$

Ex 06 $|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{M_3}{3!} \left|\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)\right|$

$$M_3 = \sup_{x\in[x_0,x_2]} |f^{(3)}(x)|$$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$

$f^{(3)}(x) = \frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}}$

$$M_3 = \sup_{x\in[100,144]} \left|\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}}\right| = \frac{3}{2} 10^{-5}$$

$|f(115) - P_2(115)| \leq 0{,}16 \times 10^{-2}$

$n = 2$ décimales exacts

Ex 07

1) Mq : $L_j(x) = \dfrac{L(x)}{(x-x_j)\,L'(x_j)}$

$$\frac{L(x)}{(x-x_j)\,L'(x_j)} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)}{(x-x_j)\lim_{x\to x_j}\frac{L(x)-L(x_j)}{x-x_j}} \Rightarrow 0$$

$$= \frac{\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x-x_k)}{\lim_{x\to x_j}\frac{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)}{x-x_j}} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\left(\frac{(x-x_k)}{\prod(x_j-x_k)}\right)$$

2) $L(x) = (x-x_0)\,\_\_\_\,(x-x_n)$

$= th\,(t-1)h\,\_\_\_\,(t-n)h.$

$= h^{n+1}\,t(t-1)\,\_\_\_\,(t-n).$

$L'(x_j) = (x_j-x_0)\,\_\_\_\,(x_j-x_n).\ j\neq k.$

$= jh\,(j-1)h\,\_\_\_\,(j-n)h$

$= h^{n}\,j(j-1)\,\_\_\_\,(j-n)$

$x-x_j = (t-j)\,h.$

$L_j(x) = \dfrac{L(x)}{(x-x_j)\,L'(x_j)}$ ⊕

$$\alpha = \frac{h^{n+1}\, t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-j)\, h \times h^{n}\, j(j-1)\ldots(j-n)}$$

$$= \frac{1}{j(j-1)\ldots(j-n)} \times \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-j}.$$

$$= \frac{1}{j!\,(-1)^{j-n}\,(n-j)!} \times \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-j}.$$

$$= \frac{(-1)^{n-j}}{j!\,(n-j)!}\,\frac{n!}{n!} \times \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-j}.$$

$$= \frac{(-1)^{n-j}}{n!} \times C_n^{n-j} \times \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-j}.$$

Ex 08 Par récurrence

$n=0$

$$f[x,x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f[x,x_0]}$$

$n=1$

$$f[x,x_0,x_1] = \frac{f[x,x_0] - f[x_0,x_1]}{x - x_1}$$

$$= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} - f[x_0,x_1]}{x - x_1}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0) - f[x_0,x_1](x-x_0)}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)}$$

Supposons la propriété vraie pour (n) et mq elle est vraie pour $(n+1)$

$$f[x,x_0,\ldots,x_n,x_{n+1}] = \frac{f[x,\ldots,x_n] - f[x_0,\ldots,x_{n+1}]}{x - x_{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)} - f[x_0, \ldots, x_{n+1}]}{x - x_{n+1}}$$

$$= \frac{f(x) - P_n(x) - f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0}^{n+1}(x-x_j)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f(x) = {} & P_n(x) + f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \prod_{j=0}^{n}(x-x_j) \\ & + f[x, x_0, \ldots, x_{n+1}] \prod_{j=0}^{n+1}(x-x_j) \end{aligned}}$$

2) l'erreur d'interpolation de Newton

$$|f(x) - P_n(x)| = \left| f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n}(x-x_j) \right|$$

$\boxed{\text{Exo } 9}$

1) $P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
100	10		
		$\frac{1}{21}$	
121	11		$\frac{-3}{34776}$
		$\frac{1}{24}$	
169	13		

$P_2(112) \simeq \sqrt{112}$

$\boxed{P_2(112) \simeq 10{,}58}$

2) $|P_2(112) - f(112)| \leq \frac{M_3}{3!} \left| \prod_{i=0}^{2} (112 - x_i) \right|$

$M_3 = \sup_{x \in [100, 169]} \left| \frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} \right| = \frac{3}{2} 10^{-5}$

d'où $|P_2(112) - f(112)| \leq 0{,}38 \times 10^{-2}$

$n = 2$ decimales exactes