# Série de TD 1 d'Algèbre 4 :Dualité

**Exercice 1 :** Soit
$$\mathfrak{B} = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,1)\}$$
une base de $\mathbb{R}^3$.
Trouver la base duale $\mathfrak{B}^*$

**Exercice 2 :** $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Si $f_1^\star, f_2^\star, f_3^\star \in (\mathbb{R}^3)^\star$ définis par :
   $\forall x \in \mathbb{R}^3$,
   $$\begin{cases} f_1^\star(x) = x_1 + x_2 + x_3 & , \\ f_2^\star(x) = x_2 + x_3 & , \\ f_3^\star(x) = x_1 + x_2 \end{cases}$$
   Montrer que ${\mathfrak{B}_1}^* = (f_1^\star, f_2^\star, f_3^\star)$est une base $(\mathbb{R}^3)^\star$.
2. Déterminer la base $\mathfrak{B}_1 = (f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dont ${\mathfrak{B}_1}^*$ est la base duale.

**Exercice 3 :** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les cinq formes linéaires $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ et $\psi$ définies par : $\phi_1(P) = P(0)$, $\phi_2(P) = P'(0)$,$\phi_3(P) = P(1)$,$\phi_4(P) = P'(1)$ et $\psi(P) = \int_0^1 P(t)dt$.

1. Prouver que $\mathfrak{B}^* = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est une base $(E)^\star$ et Déterminer sa base préduale $(H_1, H_2, H_3, H_4)$
2. Déterminer les coordonnées de $\psi$ dans la base duale $\mathfrak{B}^*$.

**Exercice 4 :** Montrer que toute forme linéaire non nulle est surjective.

**Exercice 5 :** Soit $E$ un $\mathfrak{K}$-espace vectoriel , $\dim E = n$ et $H \subset E$
Montrer que $H$ est hyperplan si, et seulementsi, $H$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.