FICHE TD : N^{0}2

Exercice 1 :

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1, & \text{si} \quad x^2+y^2 > 1 \\ x^2, & \text{si} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1− On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = f(2+2t, t^2)$.
Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

2− On définit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\psi(u,v) = f(uv, u^2 - v^2)$.
Démontrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

3− On veut trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient l'équation suivante :

$$v\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) + u\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) = 0 \qquad (E)$$

- $\star$ écrire l'équation (E) en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, u et v.
- $\star$ Déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 3

On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = a,$$

où a est un réel.

1. On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$

   En utilisant le théorème de composition, montrer que $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{a}{2}$.
2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f.
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Corrigé

Exercice 1

Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$ et $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2>1\}$. D et U sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels f a une expression polynomiale. f est donc continue sur D et sur U. Il reste donc à vérifier la continuité de f en un point (a,b) tel que $a^2+b^2=1$. Soit (a,b) un tel point et soit (x_n,y_n) une suite qui converge vers (a,b). Soit $n \geq 1$. Si (x_n,y_n) est élément de U, alors $f(x_n,y_n) = 2x_n^2+y_n^2-1$ tandis que si ce n'est pas le cas, $f(x_n,y_n)=x_n^2$. Mais,

$$2x_n^2+y_n^2-1 \longrightarrow 2a^2+b^2-1 = a^2 \quad \text{tandis que} \quad x_n^2 \longrightarrow a^2.$$

On a bien $f(x_n,y_n) \longrightarrow a^2 = f(a,b)$, et la fonction f est continue en (a,b).

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1− On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = f(2+2t, t^2)$.

Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Les fonctions $t \mapsto 2+2t$ et $t \mapsto t^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (fonctions polynomials), donc par composition φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{\partial x}{\partial t}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + \frac{\partial y}{\partial t}(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \\ &= 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + 2t\,\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\end{aligned}$$

2− On définit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\psi(u,v) = f(uv, u^2-v^2)$.

Démontrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) = v\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2u\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) = u\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2u\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

3− On veut trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient l'équation suivante :

$$v\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) + u\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) = 0 \qquad (E)$$

⋆ écrire l'équation (E) en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, u et v.

$$(v^2+u^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad (\star)$$

⋆ Déduire les solutions de l'équation (E).

Les solutions de $(\star)$ sont les fonctions $\phi(y)$, alors les solutions de (E) sont $\phi(u^2-v^2)$.

Exercice 3

1. Par composition, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \times \frac{-1}{2} = \frac{a}{2}.$$

2. On intègre cette équation. Pour tout v, il existe une constante $h(v)$ telle que

$$f(u,v) = \frac{au}{2} + h(v).$$

   Puisque la fonction $(u,v) \longmapsto f(u,v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, il en est de même de $v \longmapsto h(v)$.

3. Si g est solution de l'équation alors il existe une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout u, v, on a :

$$g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) = \frac{au}{2} + h(v).$$

   Pour revenir à x et y, il faut procéder au changement de variables inverse, en posant $x = \frac{u+v}{2} et y = \frac{v-u}{2}$: on a donc

$$g(x,y) = \frac{a(x-y)}{2} + h(x+y).$$

Réciproquement, une telle fonction est solution de l'équation aux dérivées partielles.