solution de l'examen EDP 2

Exercice 01 : (2p)

les exemples de cours (les ondes ,la chaleur)

Exercice 02 :(6p) Soit l'équation (E) donnée par

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = sh(x), & 0 < x < 1 \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 0; \quad u(1,t) = \frac{e^2-1}{2e}, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (E)$$

1)Résoudre le problème (E) par la méthode de séparation de variables.

1)On pose

$$w(x,t) = u(x;t) + sh(x)$$

alors

$$w_{xx}(x,t) = u_{xx}(x;t) + sh(x)$$

$$w_{tt}(x,t) = u_{tt}(x;t)$$

$$w(0,t) = u(0;t) + sh(0) = 0$$

$$w(1,t) = u(x;t) + sh(1) = 2\frac{e^2-1}{2e}$$

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & 0 < x < 1 \quad t \geq 0 \\ w(0,t) = 0; \quad w(1,t) = 2\frac{e^2-1}{2e}, & t \geq 0, \\ w(x,0) = f(x) + sh(x), w_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (E')$$

2) On pose

$$z(x,t) = w(x;t) - 2xsh(1)$$

donc

$$z_{xx}(x,t) = w_{xx}(x;t)$$

$$z_{tt}(x,t) = w_{tt}(x;t)$$

$$z(0,t) = w(0;t) = 0$$

$$z(1,t) = w(1;t) - 2sh(1) = 2\frac{e^2-1}{2e} - 2sh(1) = 0$$

$$\begin{cases} z_{tt} - z_{xx} = 0, & 0 < x < 1 \quad t \geq 0 \\ z(0,t) = 0; \quad z(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ z(x,0) = f(x) + sh(x) - 2xsh(1), w_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (E'')$$

3)Le problème (E”) est homogène on utilisons la méthode de séparation de variables.

$$z(x,t) = h(t)g(x)$$

....

$$\begin{cases} g'' - \lambda g = 0 \\ h'' - \lambda h = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 03 :(6p)

Soient les systèmes d’équations S et S’ données par :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ u(x,y) = f, & x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \qquad (S)$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(r,\theta) = f(\theta), & r^2 = 1, \end{cases} \qquad (P)$$

où f est une fonction continue 2π-périodique. 1)Déterminer le type de S et P(justifier votre réponse).

2) Déterminer le changement de variables pour que S et P sont équivalentes .

3)Vérifier que u_n est une solution de (P) avec :

$$u_n = r^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta))$$

4)Résoudre le problème (P).

Solution

2)le changement des variables pour que S et P sont équivalentes

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

3)u_n est une solution de (P) :

$$u_r = nr^{n-1}(\cos(n\theta) + \sin(n\theta))$$

$$u_{rr} = n(n-1)r^{n-2}(\cos(n\theta) + \sin(n\theta))$$

$$u_\theta = nr^n(\cos(n\theta) - \sin(n\theta))$$

$$u_{\theta\theta} = -n^2 r^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)$$

donc

$$n(n-1)r^{n-2}(\cos(n\theta) + \sin(n\theta) + \frac{1}{r}nr^{n-1}(\cos(n\theta) + \sin(n\theta) - \frac{1}{rr}n^2r^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta) = 0$$

4)Posons $u(r.\theta) = R(r)T(\theta)$, et portons dans l'équation, nous obtenons après division par $R(r)T(\theta)$:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{T''}{T}.$$

donc

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = \lambda = -\frac{T''}{T}$$

avec λ constante réelle

On obtient les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{c} T'' + \lambda T = 0 \\ r^2R'' + rR' - \lambda R = 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

pour $\lambda > 0$ alors :

$$T(\theta) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\theta\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\theta\right).$$

nous obtenons par le principe de superposition que la solution est :

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n(c_n\cos(n\theta) + d_n\sin(n\theta))$$

Déterminons les coefficients c_n et d_n : on a $u(1,\theta) = f(\theta)$

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n(c_n\cos(n\theta) + d_n\sin(n\theta))$$

alors

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha, c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha, d_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha,$$

Exercice 04 :(6p) Soit f une fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -1 & \text{si} & -\pi < x \leq 0 \\ +1 & \text{si} & 0 < x < +\pi. \end{array} \right.$$

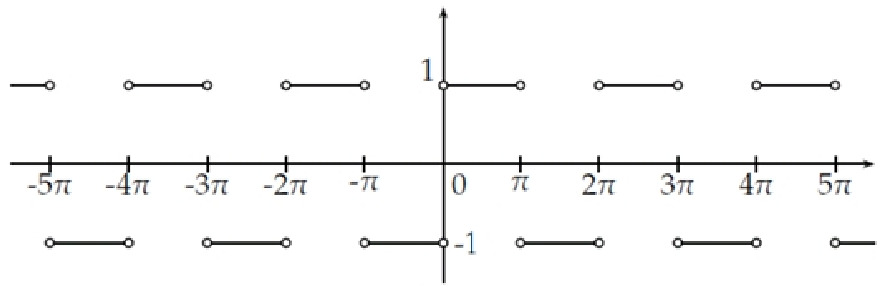

Figure 1 –

1) Tracer le graphe de f.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f.

3) Écrire le développement en série de Fourier de f.

4)Donner L'égalité de Parseval.

Solution Exercice 04

. 1) Le graphe de f :

2) Les coefficients de Fourier de f : La fonction f est impaire donc $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin(nx)dx + \int_{0}^{+\pi} 1\sin(nx)dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}\sin(nx)dx = \frac{2}{n\pi}\left[-\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}. \end{aligned} \tag{3}$$

Nous remarquons que les coefficients d'indices pairs sont nuls. Alors :

$$b_n = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2p \\ \dfrac{4}{\pi(2p+1)} & si \quad n = 2p+1 \end{cases} \tag{4}$$

3) Le développement de f en série de Fourier.

$$.S(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\begin{cases} f(x) & si \quad x\neq k\pi; \quad k\in\mathbb{Z}\\ 0 & si \quad x=k\pi; \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases} \tag{5}$$

4)L'égalité de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x)|^2dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right).$$

Si f est paire alors f^2 est paire, donc :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|^2.$$

danc

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)dx=2=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$