Université Ibn Khaldoun Tiaret. $2^{\text{ème}}$ anné Master L.M.D.(Maths AFED)
Département des Mathématiques Année universitaire : 2025-2026
Faculté des Mathématiques et Informatique Le 26-05-2026

Correction d'examen de degre topologique,

***Exercice 1* :** (6points)

Soit

$$\Omega = B(0,R); Y_0 = (1,0) \text{ et } f(x,y) = (x^3 - 3xy^2; -y^3 + 3x^2y)$$

(1) Déterminons $f^{-1}(Y_0) = \{(1,0), (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\}$. (1points)

(2) Montrons que $R = 1$ le dégre n'est pas défini. (1points)
On remarque qu'au moins le point$(1;0)$ est sur la frontière de la boule unité quelle que soit la norme usuelle que l'on considère sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, le degré n'est pas défini si $R = 1$.

(3) Montrons que pour $0 < R < 1$ $\Omega \cap f^{-1}(Y_0) = \emptyset$, donc $deg(f, B(0,R), y_0) = 0$. (1points)

(4) Pour $R > 1$, Calculons la matrice jacobienne $Df(x,y)$ (3points)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & -3y^2 + 3x^2 \end{pmatrix}$$

en déduire la valeur du $deg(f, \Omega, Y_0)$. et donc

$$Jf(x,y) = (3x2 - 3y2)^2 + 36x^2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x;y) = (0,0)$$

Les trois points sont alors réguliers et comme $sgn(Jf(x,y)) > \forall (x,y) \neq (0,0)$ alors $deg(f, \Omega, y) = 3$.

***Exercice 2* :** (8points)

• $n = 0 : f(x) = a \Rightarrow deg(f, \Omega, 0) = 0$ car $a \neq 0$
(1points) • $n = 1 : f(x) = ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $f'(x) = a \Rightarrow deg(f, \Omega, 0) = sgn(a)$
(1points) • $n \geq 2 : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \neq \partial\Omega$ car $\alpha \neq 0$ De plus
(1points) $f'(x) = nax^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$; donc 0 est une valeur singulière. Considérons alors deux sous-cas :

(a) n pair : $f(\partial\Omega) = a\alpha^n$; on introduit la fonction constante g définie par$g(x) = a\alpha^n$; alors $g(x) \neq 0; \forall x \in \Omega$ et donc $deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0) = 0$ car $g_{|\partial\Omega} = f_{|\partial\Omega}$ (2.5 points)

(b) n impair : On perturbe f par une fonction g de meme monotonie que f, sŠannulant en zéro et telle que $g'(0) \neq 0$; alors $deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0) = sgn(a)$ (2.5 points)

***Exercice 3* :** (6points)

Deteminons $\psi_\epsilon^{-1}(0,0)$

$$\begin{aligned}\psi_\epsilon^{-1}(0,0) = (x,y) &\Leftrightarrow \psi_\epsilon(x,y) = (0,0)\\ &\Leftrightarrow (e^x - 1; y^2 - \epsilon) = (0,0)\\ &\Leftrightarrow (x,y) = (0,\sqrt{\epsilon}) v (x,y) = (0,-\sqrt{\epsilon})\end{aligned}$$

Donc $\psi_\epsilon^{-1}(0,0) = \{(0,\sqrt{\epsilon}), (0,-\sqrt{\epsilon}\}$ (2points)

$$D\psi_\epsilon(x,y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}$$

et donc $Jac\psi_\epsilon(x,y) = -2ye^x$ donc $Jac\psi_\epsilon(0,\sqrt{\epsilon} = -2\sqrt{\epsilon} < 0$ et $Jac\psi_\epsilon(0,-\sqrt{\epsilon} = 2\sqrt{\epsilon} > 0$ (2points) donc

$$deg(\psi, B, 0) = 0.$$

(2points)