



Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté de Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

Polycopié d'Analyse 3

A l'usage des étudiants de
2^{ème} année Licence de Mathématiques

OUARDANI ABDERRAHMANE

Tiaret, 2021-2022

Table des matières

Introduction	2
1 Séries Numériques	3
1.1 Introduction	3
1.2 Séries à termes dans \mathbb{K} .	3
1.3 Série convergente (ou divergente)	4
1.3.1 Condition nécessaire de convergence	6
1.3.2 Critère de Cauchy	7
1.3.3 Reste de rang n d'une série convergente	8
1.4 Séries à termes réels positifs	8
1.4.1 Règle de comparaison (Convergence par domination)	9
1.4.2 Règle d'équivalence	10
1.5 Comparaison d'une série avec une intégrale	11
1.6 Série de Riemann	12
1.7 Règle de Riemann	13
1.8 Règle de logarithme	14
1.9 Série de Bertrand	15
1.10 Critère de d'Alembert	16
1.11 Règle de Raab-Duhamel	17
1.12 Séries alternées	17
1.13 Critère d'Abel-Dirchilt	18
1.13.1 Théorème de Leibniz	18
1.13.2 Convergence absolue et semi convergence	19
1.14 Séries à termes réels de signe quelconque	19
1.14.1 Critère de Cauchy	19
1.15 Méthode de développement limité	19
1.15.1 Règles de Raab-Duhamel et de Gauss	20
1.16 Règles générales	21
1.17 Produit de Cauchy	22
1.18 Séries commutativement convergente	23
2 Suites et séries de fonctions	31
2.1 Suites de fonctions	31
2.1.1 Convergence simple	31

2.1.2	Convergence uniforme	32
2.1.3	Exercices	36
2.2	Séries de fonctions	39
2.2.1	Convergence simple	39
2.2.2	Convergence absolue	39
2.2.3	Convergence uniforme	40
2.2.4	Convergence normale	41
2.3	Sommaire pour l'étude d'une série de fonctions	43
2.3.1	Exercices	43
3	Séries entières	49
3.1	Introduction	49
3.2	Lemme D'Abel	50
3.3	Rayon de convergence d'une série entière	50
3.4	Méthodes de calcul du rayon de convergence	52
3.4.1	La règle de d'Alembert	52
3.4.2	La règle d'Hadamard	52
3.5	Opérations sur les séries entières	52
3.5.1	Somme de séries entières	52
3.5.2	Produit de séries entières	54
3.6	Propriétés fonctionnelles d'une série entière	54
3.6.1	Continuité	54
3.6.2	Intégration	54
3.6.3	Dérivation	54
3.7	Fonctions développables en séries entières	55
3.8	Développements usuels	57
3.9	Équations différentielles	58
3.10	Exercices	61
4	Séries de Fourier	63
4.1	Coefficients de Fourier	64
4.2	Théorème de Dirichlet	66
4.3	Égalité de Parseval	66
4.4	Applications	67
5	Intégrales généralisées	73
5.1	Intégrales généralisées (impropres)	73
5.2	Calcul pratique des intégrales généralisées	75
5.2.1	Intégration par parties	75
5.2.2	Changement de variable	77
5.3	Intégrale généralisée d'une fonction positive	81
5.4	Intégrale généralisée d'une fonction de signe quelconque	86
5.4.1	Convergence absolue	86
5.4.2	Semi convergente	86
5.5	Fonctions définies par une intégrale	89
5.5.1	Propriétés d'une fonction définie par une intégrale généralisée	89
5.6	Applications	90
5.6.1	Fonction Gamma d'Euler	90
5.6.2	Fonction Bêta d'Euler	91

5.7 Exercices	92
-------------------------	----

INTRODUCTION

Ce polycopié est issu du cours détaillé sur le programme officiel du module de l'Analyse 3 de la 2^{ème} année Licence de Mathématiques système L.M.D, que j'ai eu l'honneur d'assumer à l'université de Tiaret durant les années 2016 à 2021. Ce cours peut éventuellement être utile pour les étudiants qui sont en deuxième année aux écoles préparatoires. Dans le premier chapitre, on introduit le concept de série numérique. Cette notion permet l'étude du phénomène de sommation infinie discrète. L'objectif de ce chapitre est de savoir étudier la nature d'une série numérique et effectuer un calcul de somme.

Dans le chapitre deux, on présente les notions de convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions, et on donne les propriétés des suites et séries de fonctions uniformément convergentes.

Dans le chapitre 3 on aborde des séries de fonctions de forme particulière, est consacré à l'étude des séries entières, comme objectif, calculer un rayon de convergence, établir un développement en série entière des fonctions usuelles et chercher la somme de séries numériques et les solutions de quelques équations différentielles ordinaires.

Dans le chapitre 5 on aborde les séries de Fourier, on commence par donner la notion de séries trigonométriques, puis les séries de Fourier des fonctions paires ou impaires dans diverses formes d'intervalles ainsi que les règles de convergences, et on termine par la formule de Parseval et quelques applications.

Le dernier chapitre est consacré aux intégrales généralisées et les fonctions définies par une intégrale. On va étudier le cas d'une fonction continue sur un intervalle (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) sans être continue sur $[a, b]$.

Séries Numériques

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de somme finie de termes en étudiant comment cette dernière se comporte lorsque l'on considère une succession infinie de termes. La clé sera de considérer ces sommes infinies, aussi appelées séries, comme la limite de suites. Autrement dit, quand on se souvient du cours sur les suites, il sera plus facile d'assimiler le cours sur les séries.

La théorie des séries a pour but de donner si possible un sens à la somme d'une infinité de nombres.

Objectifs du chapitre

- Savoir étudier la nature d'une série numérique.
- Effectuer un calcul de somme.

1.2 Séries à termes dans \mathbb{K} .

Le corps \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 1.2.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique ($u_n \in \mathbb{K}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$).

On définit une nouvelle suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k,$$

c-à-d $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2, \dots$.

- On appelle série le couple $((u_n), (S_n))$.
- u_n est le terme général de la série.
- S_n est la somme partielle de la série d'ordre n .

On notra la série $((u_n), (S_n))$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n \geq 0} u_n \quad \text{ou} \quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

ou tout simplement $\sum u_n$.

Exemple 1.2.1. Pour $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ s'appelle série harmonique.

1.3 Série convergente (ou divergente)

Définition 1.3.1

On dit que la série de terme général u_n est convergente, si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite se note ; alors

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

S est appelée **somme de la série** $\sum_n u_n$.

En d'autre terme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \implies |S_n - S| < \varepsilon).$$

Si la série n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Exemple 1.3.1. Soit la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$, et soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles. On a S_n est la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right),$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ est convergente de somme

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Exemple 1.3.2. Soit la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2n + 1$, et soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles. On a S_n est la somme d'une suite arithmétique de raison 2.

$$S_n = \sum_{k=0}^n 2k + 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = \frac{n+1}{2} (1 + 2n + 1) = (n+1)^2,$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2n + 1$ est divergente.

Remarque 1.3.1. Étudier la nature d'une série revient à déterminer sa nature si elle converge ou diverge ensuite calculer sa somme en cas de convergence.

Exemple 1.3.3. Soit la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right).$$

Posons $u_n = \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$ pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_n = \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) = \ln(n+2) - \ln(n+1),$$

donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{k+2}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=0}^n \ln(k+2) - \sum_{k=0}^n \ln(k+1) \\ &= \ln(n+2), \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+2) = +\infty,$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente, d'où la divergence de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right).$$

Exemple 1.3.4. Soit la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Posons $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 1. Par conséquent la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

est convergente, et sa somme $S = 1$.

Remarque 1.3.2. Si $u_n = a_{n+1} - a_n$ (la série $\sum_n u_n$ est **télescopique**) on trouve que $S_n = a_{n+1} - a_0$, alors la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On vient de voir qu'une fois la suite des sommes partielles associée est explicitée alors on peut déduire la nature de la série qui est de même nature que la suite des sommes partielles, mais trouver l'expression analytique exacte de celle-ci, n'est pas toujours facile, par exemple la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. Pour remédier à ce problème, il a fallu concevoir d'autres critères qui nous permettent de déterminer la nature d'une série numérique sans trouver l'expression analytique de la suite des sommes partielles qui lui est associée.

1.3.1 Condition nécessaire de convergence

Proposition 1.3.1

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. La réciproque est fautive.

Démonstration. Supposons que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sa suite des sommes partielles associée est convergente. De plus, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n - S_{n-1} = u_n,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = 0.$$

L'implication inverse est fautive. En effet, reprenons l'exemple 1.3.3, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$ est divergente, bien que son terme général tend vers 0. \square

Remarque 1.3.3. Par contraposition, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

Exemple 1.3.5. Soit la série $\sum_{n \geq 1} e^{\frac{2}{n}}$.

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{n}} = 1 \neq 0.$$

La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée alors la série est divergente.

1.3.2 Critère de Cauchy

Proposition 1.3.2

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall p, q \in \mathbb{N}, q > p \geq N; |S_q - S_p| < \varepsilon;$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall p, q \in \mathbb{N}, q > p \geq N; \left| \sum_{k=p+1}^q u_k \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série convergente, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée est convergente par conséquent c'est une suite de Cauchy. \square

Exemple 1.3.6. La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

En effet, soit $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k}$, pour $q = 2n$ et $p = n$, on trouve que

$$\begin{aligned} |S_q - S_p| &= |S_{2n} - S_n| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right| \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{n}{2n} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient que la suite des sommes partielles qui lui est associée $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy.

Remarque 1.3.4. Les premiers termes d'une série n'interviennent pas pour la convergence.

1.3.3 Reste de rang n d'une série convergente

Définition 1.3.2

Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, on appelle reste de rang n :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Proposition 1.3.3

Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0.$$

Démonstration. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente, on a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Soit $S_n + R_n = S$, alors $R_n = S - S_n$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = S - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S - S = 0.$$

□

1.4 Séries à termes réels positifs

Définition 1.4.1

Une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ réelle est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq 0$.

Remarque 1.4.1. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles associées est croissante.

Proposition 1.4.1

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est une série à termes positifs. Pour que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ soit convergente, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles associées $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée. C-à-d.

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}; S_n \leq M \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Démonstration.

- Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (par définition).
- Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite majorée, comme la série est à termes positifs alors elle est croissante et donc convergente.

□

Exemple 1.4.1. Soit $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k^2}$.

On a $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} S_n &< 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} \\ &< 2, \end{aligned}$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, ce qui implique que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

1.4.1 Règle de comparaison (Convergence par domination)

Théorème 1.4.1

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs telles que; $\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$. Alors

- Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge.

Démonstration. Posons $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} u_k$ et $T_n = \sum_{0 \leq k \leq n} v_k$. On a $S_n \leq T_n$ pour tout $n \geq n_0$.

- Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge alors $(T_n)_n$ converge donc T_n est majorée, puis S_n est majorée, d'où $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

— Par contraposée ($p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$).

□

Exemple 1.4.2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{\sin^2 n}{e^n + \ln(n)}$, $n \geq 1$.

On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et

$$u_n \leq \frac{1}{e^n + \ln(n)} \leq \frac{1}{e^n} \quad \text{car} \quad \sin^2 n \leq 1,$$

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{e^n}$ est une série géométrique convergente, d'après la règle de comparaison $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{e^n + \ln(n)}$ est convergente.

1.4.2 Règle d'équivalence

Théorème 1.4.2

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Soit $v_n > 0$.

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| < \varepsilon.$$

i.e. $(1 - \varepsilon)v_n < u_n < (1 + \varepsilon)v_n$. Grâce à la règle de comparaison et les inégalités précédentes on trouve que

$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ ont la même nature. □

Exemple 1.4.3. Soient la série de terme général $u_n = \frac{\alpha^n}{5^n + 2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. On a $\frac{\alpha^n}{5^n + 2^n} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\alpha}{5}\right)^n$ et comme $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\alpha}{5}\right)^n$ est une série géométrique, on distingue deux cas

a. si $0 < \alpha < 5$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\alpha}{5}\right)^n$ converge, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha^n}{5^n + 2^n}$ converge.

b. si $\alpha \geq 5$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\alpha}{5}\right)^n$ diverge, et donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha^n}{5^n + 2^n}$ diverge.

Proposition 1.4.2

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série à termes non négatifs et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe $\lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R}_+^*$, alors les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.
- Si $\lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

- Si $\lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ converge.}$$

Corollaire 1.4.1

Si $\lim_{+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{+\infty} n u_n = l \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

1.5 Comparaison d'une série avec une intégrale**Théorème 1.5.1**

Une série dont le terme général est de la forme $u_n = f(n)$, où f est une fonction continue, positive et décroissante vers 0, est de même nature que la suite $\left(\int_{n_0}^n f(x) dx\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $n_0 \in \mathbb{N}^*$ i.e.

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n_0}^n f(x) dx \text{ existe.}$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n_0$, f est décroissante sur $[n_0; +\infty[$, et pour tout $x \in [k; k+1]$,

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k);$$

en intégrant par rapport à x de k à $k+1$, on obtient

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx;$$

d'où

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k);$$

en sommant de n_0 à n , et en utilisant le fait que $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$, on obtient

$$\sum_{k=n_0}^n u_{k+1} \leq \sum_{k=n_0}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=n_0}^n u_k;$$

d'où

$$\sum_{k=n_0+1}^{n+1} u_k \leq \int_{n_0}^n f(x) dx \leq \sum_{k=n_0}^n u_k;$$

en déduit que

$$S_{n+1} - S_{n_0} \leq \int_{n_0}^n f(x) dx \leq S_n - S_{n_0-1}.$$

— Si $\int_{n_0}^{\infty} f(t) dt$ converge,

$$S_{n+1} \leq \int_{n_0}^n f(x) dx + S_{n_0} \leq \int_{n_0}^{\infty} f(t) dt + S_{n_0} = M;$$

où M est une constante positive.

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée et comme $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est une série à termes positifs alors d'après la proposition 1.4, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

— Supposons maintenant que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente de somme S ,

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx \leq S;$$

ainsi $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ converge.

□

Théorème 1.5.2

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue et décroissante, alors on a

$$\sum_{n \geq 0} f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

1.6 Série de Riemann

Définition 1.6.1

On appelle série de Riemann la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.6.1

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$

- ★ converge si $\alpha > 1$;
- ★ diverge si $\alpha \leq 1$.

Démonstration.

1. Si $\alpha < 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\alpha} = +\infty.$$

Alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

2. Si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée et donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

3. Si $\alpha > 0$, la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est positive et décroissante sur $[1; +\infty[$. D'après le théorème précédent, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge. Or

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \right]_1^n = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(n) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge si $0 < \alpha \leq 1$ et converge si $\alpha > 1$.

□

1.7 Règle de Riemann

Proposition 1.7.1

Soit $\sum_n u_n$ une série réelle à termes positifs.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum_n u_n$ converge.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = +\infty$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge.

Démonstration.

1. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0; \quad -\frac{\varepsilon}{n^\alpha} \leq u_n \leq \frac{\varepsilon}{n^\alpha}.$$

Donc grâce à la règle de comparaison $\sum_n u_n$ est convergente.

2. En utilisant la définition de la limite et la règle de comparaison.

□

Exemples 1.7.1. 1. La nature de la série de terme général $u_n = e^{-\sqrt{1+n}}$.

Pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$, il faut montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^2 u_n) = -\infty.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^2 u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^2 e^{-\sqrt{1+n}}) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\sqrt{1+n} \left(1 - 2 \frac{\ln(n)}{\sqrt{1+n}} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\sqrt{1+n} \left(1 - 4 \frac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}} \right) \right] \\
&= -\infty,
\end{aligned}$$

alors la série $\sum_n e^{-\sqrt{1+n}}$ converge.

2. Soit la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{1}{(\ln n)^2} = +\infty.$$

D'après la règle de Riemann la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$ est divergente.

1.8 Règle de logarithme

Théorème 1.8.1

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série réelle à termes positifs, supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\ln(n)} = l,$$

alors

1. si $l > 1$ ou $l = +\infty$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge,
2. si $l < 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

Démonstration. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\ln(n)} = l,$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; (l - \varepsilon) \ln n \leq \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) \leq (l + \varepsilon) \ln n,$$

on trouve que

$$\frac{1}{n^{l+\varepsilon}} \leq u_n \leq \frac{1}{n^{l-\varepsilon}},$$

en appliquant la règle de comparaison à une série de Riemann.

1. Pour $l > 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > 1$ et on a $u_n \leq \frac{1}{n^{l-\varepsilon}}$, et comme $\sum_n \frac{1}{n^{l-\varepsilon}}$ est une série de Riemann convergente, alors $\sum_n u_n$ est convergente aussi.

2. Pour $l < 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$ et on a $u_n \geq \frac{1}{n^{l+\varepsilon}}$, et comme $\sum_n \frac{1}{n^{l+\varepsilon}}$ est une série de Riemann divergente, alors $\sum_n u_n$ est divergente.

□

1.9 Série de Bertrand

Définition 1.9.1

On appelle série de Bertrand la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}, \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Proposition 1.9.1

- Si $\alpha > 1$, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.
- Si $\alpha < 1$, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ diverge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.
- Si $\alpha = 1$, $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Démonstration. On applique la règle de logarithme. □

Théorème 1.9.1: Règle de Cauchy

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs, supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

alors

1. si $l < 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge,
2. si $l > 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge,
3. si $l = 1$, cas de doute.

Démonstration. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; l - \varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq l + \varepsilon,$$

on trouve que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; (l - \varepsilon)^n \leq u_n \leq (l + \varepsilon)^n,$$

en appliquant la règle de comparaison à une série géométrique.

1. Pour $l < 1$, prenons $\varepsilon \in]0; 1 - l[$, $l + \varepsilon < 1$ et on a $u_n \leq (l + \varepsilon)^n$, et comme $\sum_n (l + \varepsilon)^n$ est une série géométrique convergente, alors $\sum_n u_n$ est convergente aussi.
2. Pour $l > 1$, prenons $\varepsilon = l - 1$ on a donc $u_n \geq 1$, d'où $\sum_n u_n$ diverge.
3. Pour $l = 1$, on sait que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ une série divergente et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergente, mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}.$$

□

1.10 Critère de d'Alembert

Théorème 1.10.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs,

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q < 1$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge,
2. si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge,
3. si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, cas de doute.

Tout reste vrais pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Démonstration. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; (l - \varepsilon)^n u_0 \leq u_n \leq (l + \varepsilon)^n u_0,$$

en appliquant la règle de comparaison à une série géométrique.

1. Pour $l < 1$, prenons $\varepsilon \in]0; 1 - l[$, $l + \varepsilon < 1$, comme $\sum_n (l + \varepsilon)^n$ est une série géométrique convergente et on a $u_n \leq (l + \varepsilon)^n$ pour tout $n \geq n_0$, par conséquent la série $\sum_n u_n$ converge.
2. Pour $l > 1$, prenons $\varepsilon = l - 1$ on a donc $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq n_0$, d'où $\sum_n u_n$ diverge.

□

Remarque 1.10.1. On ne peut pas remplacer la condition $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q < 1$ par la condition $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, par exemple pour $u_n = \frac{1}{n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Proposition 1.10.1

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Remarque 1.10.2. Si on est sur le cas de doute, en appliquant la règle de d'Alembert, il ne faut pas appliquer la règle de Cauchy, car on ne pourra rien conclure aussi.

1.11 Règle de Raab-Duhamel

Théorème 1.11.1

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série réelle à termes strictement positifs, supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = l, \quad \text{où } l \in \mathbb{R}.$$

1. Si $l > 1$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Si $l < 1$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

Exemple 1.11.1. Pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \cos(nx)$. On a $(u_n)_n$ une suite positive, décroissante et tend vers 0, et de plus

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^{k=n} \cos(kx) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|} = M.$$

Alors $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ converge.

1.12 Séries alternées

Définition 1.12.1

On dit qu'une série à termes réels $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est alternée si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n a_n, \quad \text{ou } u_n = (-1)^{n+1} a_n, \quad \text{avec } a_n > 0.$$

Exemple 1.12.1. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée.

1.13 Critère d'Abel-Dirchilt

Théorème 1.13.1

Soit la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$. Si $(u_n)_n$ une suite de termes positifs décroissante et tend vers 0 et $(v_n)_n$ une suite numérique telle que

$$\exists M > 0, \quad \left| \sum_{k=0}^{k=n} v_k \right| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$ est convergente.

Démonstration. L'idée de la démonstration est d'effectuer un changement dans la sommation. Pour tout $n \geq 0$, posons $B_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$. Par hypothèse, la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Nous écrivons les sommes partielles de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \\ &= u_0 B_0 + u_1 (B_1 - B_0) + \dots + u_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= B_0 (u_0 - u_1) + B_1 (u_1 - u_2) + \dots + B_{n-1} (u_{n-1} - u_n) + B_n u_n. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} B_n (u_n - u_{n+1})$ est absolument convergente,

$$\begin{aligned} |B_n (u_n - u_{n+1})| &= |B_n| (u_n - u_{n+1}) \\ &\leq M (u_n - u_{n+1}), \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, décroissante et $|B_n|$ est borné par M . Or

$$M(u_0 - u_1) + M(u_1 - u_2) + \dots + M(u_n - u_{n+1}) = M(u_0 - u_{n+1}),$$

qui tend vers Mu_0 puisque u_n tend vers 0. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} B_n (u_n - u_{n+1})$ converge, et d'après le critère de comparaison la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |B_n (u_n - u_{n+1})|$ est convergente. On déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, d'où la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$. \square

1.13.1 Théorème de Leibniz

Théorème 1.13.2

Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et elle tend vers 0, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ converge.

Démonstration. Supposons que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante vers 0. Soit $b_n = (-1)^n$, on a

$$\left| \sum_{0 \leq k \leq n} b_k \right| \leq 1, \text{ et d'après le théorème d'Abel-Dirchilt } \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n a_n \text{ converge. } \square$$

1.13.2 Convergence absolue et semi convergence

Définition 1.13.1

1. On dit qu'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ est convergente.
2. On dit qu'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est semi convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

Théorème 1.13.3

Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq |u_n|$. □

Remarque 1.13.1. La réciproque du théorème [1.13.2](#) est fausse, on peut prendre comme contre exemple la

série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

1.14 Séries à termes réels de signe quelconque

1.14.1 Critère de Cauchy

Théorème 1.14.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels ou complexe, supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l.$$

- Si $l < 1$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente.
- Si $l > 1$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.
- Si $l = 1$, cas de doute.

Exemple 1.14.1. Considérons la série de terme général $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right|} = e,$$

comme $e > 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ diverge.

1.15 Méthode de développement limité

C'est une technique qu'on applique sur quelques séries à terme quelconques pour lesquelles les critères précédents ne s'appliquent pas. Il suffit d'utiliser un développement asymptotique du terme général.

Rappel 1. Si la fonction f est de classe \mathcal{C}^n sur un voisinage de 0, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + o(x^k).$$

Le développement limité de quelques fonctions usuel

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

1.15.1 Règles de Raab-Duhamel et de Gauss

Théorème 1.15.1

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admette un développement asymptotique du type

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R}.$$

a. Si $\beta > 1$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

b. Si $\beta < 1$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

c. Si $\beta = 1$, on peut pas conclure.

2. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admette un développement asymptotique du type

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R} \text{ et } k > 1.$$

Il existe alors $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^\beta}$ et donc, en particulier, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Démonstration.

1. Supposons $\beta > 1$ et choisissons un réel α vérifiant $1 < \alpha < \beta$. La série de Riemann de terme général

$v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ converge et le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ a le développement asymptotique

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puisque $\alpha < \beta$, les parties principales des développements asymptotiques de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ vérifient

$$1 - \frac{\beta}{n} < 1 - \frac{\alpha}{n},$$

et, par conséquent, pour n assez grand, on a aussi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

ce qui nous donne par comparaison logarithmique la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$. Maintenant si $\beta < 1$, on procède mutatis, en prenant un réel α vérifiant $\beta < \alpha < 1$, et on obtient la divergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$. Enfin si $\beta = 1$, on peut remarquer que tout peut arriver puisqu'un calcul facile montre que, par exemple, les deux séries de Bertrand de termes respectifs $\frac{1}{n \ln n}$ et $\frac{1}{n(\ln n)^2}$ donnent toutes deux, pour le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, le développement asymptotique $1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)$, alors que, d'après ce qui a été vu sur ces séries de Bertrand, la première diverge et la seconde converge.

2. Supposons que l'on ait le développement asymptotique

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R} \quad \text{et } k > 1.$$

On a alors

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)\right) = \frac{-\beta}{n} + r_n,$$

avec $\sum_n r_n$ convergente puisque $r_n = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ ou $r_n = O\left(\frac{1}{r^k}\right)$ et $k > 1$. Ainsi, compte tenu du développement asymptotique déjà obtenu des sommes partielles de la série harmonique, à savoir

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

on a

$$\ln u_n - \ln u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \ln u_{k+1} - \ln u_k = -\beta \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} r_k = -\beta \ln n + c + o(1),$$

où c est une constante réelle, précisément $c = -\beta\gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} r_k$. Il en découle, en prenant l'exponentielle des deux membres, que $u_n \sim \frac{C}{n^\beta}$, où $C = e^c$, et on arrive donc au résultat annoncé.

□

1.16 Règles générales

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques.

1. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ convergent alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ converge.
2. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda u_n$ converge.
3. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ diverge.
4. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ divergent alors on peut rien dire sur la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$.

1.17 Produit de Cauchy

Multiplication des séries

Définition 1.17.1

On appelle série-produit ou produit de Cauchy des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$, dont le terme générale est donné par

$$\omega_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k},$$

c-à-d qu'on a

$$\begin{aligned} \omega_0 &= u_0 v_0 \\ \omega_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0 \\ &\vdots \\ \omega_n &= u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0. \end{aligned}$$

Théorème 1.17.1

Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries absolument convergentes, alors la série produit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$ converge absolument, de plus sa somme est donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Proposition 1.17.1

- Si l'une des séries est absolument convergente et l'autre convergente, alors la série produit est convergente.
- Si les deux séries sont semi-convergente alors la série produit n'est pas nécessairement convergente.

Remarque 1.17.1. *Il existe des exemples où les deux séries sont convergentes, mais non absolument convergentes, et telles que leur produit de Cauchy ne converge pas. Par exemple :*

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

On a

$$\omega_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}},$$

or $\sqrt{k}\sqrt{n-k+1} \leq n$, pour tout $k = 1, \dots, n$, alors

$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

donc $|\omega_n| \geq \frac{1}{n} \cdot n = 1$, ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\omega_n| \neq 0$, et donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$ diverge.

1.18 Séries commutativement convergente

Définition 1.18.1

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est dite commutativement convergente si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$ est convergente pour tout bijection φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Théorème 1.18.1

Une série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente, et dans ce cas $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$ pour tout permutation $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Remarque 1.18.1. Si la série n'est pas commutativement convergente (i.e. n'est pas absolument convergente), alors un réarrangement des termes peut modifier la valeur de la somme.

Exemple 1.18.1. On a pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

pour $x = 1$, on a

$$\ln(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

on sait que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est semi-convergente, alors elle n'est pas commutativement convergente.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln(2),$$

on va réordonner les termes de la façon suivante.

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

Exercice 1. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1/ \sum_{n \geq 1} \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} & 2/ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} & 3/ \sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{7^{n-2}} & \\ 4/ \sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) & 5/ \sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n!} & 6/ \sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{n!} & 7/ \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ 8/ \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) & 9/ \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)(n+2)} & 10/ \sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n} & \end{array}$$

Corrigé. 1/Posons $S_N = \sum_{1 \leq n \leq N} \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. On a

$$S_N = \sum_{n=1}^N \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^N \left(\ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n+2} \right) = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{N+1}{N+2}.$$

Alors

$$\sum_{n \geq 1} \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \ln \frac{1}{2}.$$

2/Posons $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= -\frac{7}{4} + \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\frac{7}{4}.$$

3/ Soit $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{3^k}{7^{k-2}} = 7^2 \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{3}{7}\right)^k$. S_n est la somme d'une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{7}$. Alors on a

$$S_n = \frac{3}{7} \frac{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n}{1 - \frac{3}{7}},$$

donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{7^{n-2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 3 \cdot \frac{7^2}{4}.$$

4/ $\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan\left(\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}\right)$. Posons $\tan \alpha = n+1$ et $\tan \beta = n$, on a

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{n+1-n}{1+(n+1)n} = \frac{1}{n^2+n+1},$$

alors

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \alpha - \beta = \arctan(n+1) - \arctan n.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=1}^n (\arctan(k+1) - \arctan k) = \arctan(n+1) - \arctan 1.$$

D'où

$$\sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan(n+1) - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

5/ On a $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x = 1$, $e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k!} &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1) + 1}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} = 2e.$$

6/ On sait que $e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{k!} &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{(k^2-1) + 1}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2-1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{k+1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{3}{(k-2)!} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-3)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n \geq 2} \frac{3}{(n-2)!} + \sum_{n \geq 3} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} = 5e.$$

7/ On a $\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln n$, alors

$$\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1),$$

donc

$$\sum_{n \geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

8/ On a $\ln(1 - \frac{1}{n^2}) = \ln(\frac{n-1}{n}) - \ln(\frac{n}{n+1})$, alors

$$\sum_{k=2}^n \ln(1 + \frac{1}{k^2}) = \sum_{k=2}^n \left(\ln(\frac{k-1}{k}) - \ln(\frac{k}{k+1}) \right) = -\ln(2) + \ln(\frac{n}{n+1}),$$

donc

$$\sum_{n \geq 2} \ln(1 + \frac{1}{n^2}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\ln(2) + \ln(\frac{n}{n+1}) \right) = -\ln 2.$$

9/ On a $\frac{1}{(n-1)(n+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right)$, et

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)(k+2)} = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+2} \right) = \frac{11}{18} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right),$$

donc

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{11}{18} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right) = \frac{11}{18}.$$

10/ On a $\frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{1}{4n} + \frac{3}{8(n-2)} - \frac{5}{8(n+2)}$, et

$$\sum_{k=3}^n \frac{2k-1}{k^3-4k} = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{3}{8} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k},$$

on obtient que

$$\sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{89}{96}.$$

Exercice 2. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1/ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n & 2/ \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^3+1} & 3/ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} & 4/ \sum_{n \geq 0} 5^n \sin\left(\frac{2}{9}\right)^n \\ 5/ \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} & 6/ \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{n^2} & 7/ \sum_{n \geq 0} \frac{2n}{2^n} & 8/ \sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n\sqrt{n-1}} \\ 9/ \sum_{n \geq 0} \arctan\left(\frac{2n}{3n^2+1}\right) & 10/ \sum_{n \geq 0} \frac{5^n+1}{2^n-1} & 11/ \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^{n+2}} & 12/ \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^n}{n!} \end{array}$$

Indication. 1/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e^{-1}$, elle est divergente.

2/ $\frac{n}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}$, série de Riemann convergente.

3/ $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$, série divergente.

4/ $5^n \sin\left(\frac{2}{9}\right)^n \sim \left(\frac{45}{2}\right)^n$, série géométrique divergente.

5/ On applique la règle de d'Alembert.

Exercice 3. Préciser la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1/ \sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right) & 2/ \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n, x > 0 & 3/ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1} \right)^{n^2} & 4/ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ 5/ \sum_{n \geq 1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{n^n} & 6/ \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2^n}{n!} & 7/ \sum_{n \geq 0} \exp\left(-\frac{n^2+1}{n+1}\right) & 8/ \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n} \\ 9/ \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n} & 10/ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} & & \end{array}$$

Indication. 1/ $\ln \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right) = \ln \left(1 + \frac{2}{n^2+n-1} \right) \sim \frac{2}{n^2+n-1} \sim \frac{2}{n^2}$.

2/ $\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n, x > 0 \rightarrow e^x \neq 0$.

3/ $\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1} \right)^{n^2}} \rightarrow e^{-1}$.

4/ $\frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n^2}$.

5/ $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{n^n} = \frac{2^n n!}{n^n}$. (d'Alembert).

6/ $(-1)^n \frac{2^n}{n!}$. (Leibniz).

7/ $\exp\left(-\frac{n^2+1}{n+1}\right) \sim e^{-n}$.

8/ $\frac{(-1)^n}{\ln n}$. (Leibniz).

9/ En appliquant le développement limité, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n^2} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^2} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que le terme général de la série est la somme des trois termes $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $b_n = \frac{-1}{n^4}$ et $c_n = o\left(\frac{1}{n^4}\right)$. La série $\sum_n a_n$ est convergente par le critère des séries alternées, la série $\sum_n b_n$ est convergente par le critère de Riemann et la série $\sum_n c_n$ est convergente a fortiori. Par conséquent, la série initiale est convergente.

10/ $U_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. Critère de Logarithme.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{U_n}\right)}{\ln n}.$$

Exercice 4. Établir une comparaison avec des intégrales

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n \quad (b) \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n \sqrt{n} \quad (c) \ln(n!) \sim n \ln n \quad (d) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n).$$

Corrigé. (a) Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in]0, +\infty[$.

f est décroissante sur $]0, +\infty[$. Alors pour $n \leq x \leq n+1$ on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ pour $n \geq 1$, on intégrant de n à $n+1$ on obtient que

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n},$$

par récurrence on trouve

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n \frac{\ln x}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k),$$

alors

$$\sum_{k=1}^n f(k) - f(1) \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) - f(n),$$

on déduit

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx + f(n) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx + f(1),$$

de plus on a

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n,$$

alors, on obtient

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln n,$$

d'où

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n} \leq 1.$$

(b) Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty[$.

f est croissante sur $[0, +\infty[$. Alors pour $n \leq x \leq n+1$ on a $f(n) \leq f(x) \leq f(n+1)$ pour $n \geq 0$, on intégrant de n à $n+1$ on obtient que

$$\sqrt{n} \leq \int_n^{n+1} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{n+1},$$

par récurrence on trouve

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n \sqrt{x} dx \leq \sum_{k=1}^n f(k),$$

alors

$$\sum_{k=0}^n f(k) - f(n) \leq \int_0^n \sqrt{x} dx \leq \sum_{k=0}^n f(k) - f(0),$$

on déduit

$$\int_0^n \sqrt{x} dx + f(0) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_0^n \sqrt{x} dx + f(n),$$

de plus on a

$$\int_1^n \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}n\sqrt{n},$$

alors, on obtient

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \sqrt{n},$$

d'où

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \sqrt{k}}{\frac{2}{3}n\sqrt{n}} \leq 1.$$

(c) On a

$$\ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots (n-1) \times n) = \sum_1^n \ln k.$$

(d) Soit la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in]0, +\infty[$.

f est croissante sur $]0, e[$ et décroissante sur $]e, +\infty[$. Alors pour $n \leq x \leq n+1$ on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

pour $n \geq 3$, on intégrant de n à $n+1$ on obtient que

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{\ln n}{n},$$

par récurrence on trouve

$$\sum_{k=4}^n f(k) \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx \leq \sum_{k=3}^{n-1} f(k),$$

alors

$$\sum_{k=3}^n f(k) - f(3) \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx \leq \sum_{k=3}^n f(k) - f(n),$$

on déduit

$$\int_3^n \frac{\ln x}{x} dx + f(n) \leq \sum_{k=3}^n f(k) \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx + f(3),$$

de plus on a

$$\int_3^n \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2},$$

alors, on obtient

$$\frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \frac{\ln n}{n} \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} \leq \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \frac{\ln 3}{3},$$

d'où

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k}}{\frac{(\ln n)^2}{2}} \leq 1.$$

Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, la lettre \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} des nombres réels ou le corps \mathbb{C} des nombres complexes. $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies sur $E \neq \emptyset$ à valeurs dans \mathbb{K} .

Le but de ce chapitre est de donner un sens précis à la phrase “la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur $I \subset \mathbb{K}$ vers une fonction f ”, et de voir, selon le type de convergence, les propriétés des f_n qui sont préservées par passage à la limite.

2.1 Suites de fonctions

Définition 2.1.1

Soit $E \subset \mathbb{K}$. Une application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ s'appelle suite de fonctions sur E , on le note $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $f_n = f(n)$, on dit encore que $(f_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$.

Exemple 2.1.1.

$$f_n(x) = 1 + nx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = 1 + x, \quad f_2(x) = 1 + 2x, \quad \dots$$

2.1.1 Convergence simple

Définition 2.1.2

Soit D une partie non vide de \mathbb{K} . Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D à valeurs dans \mathbb{K} . La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f sur D si et seulement si pour chaque x de D , la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le nombre $f(x)$. On dit dans ce cas que f est la **limite simple** sur D de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Autrement dit

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ou $\forall x \in D : f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ ou $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$.

Exemple 2.1.2. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n$.

Si $x \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ et si $x = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 1$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par :

$$\forall x \in [0, 1] : \begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ f(x) = 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On peut noter que la fonction limite f n'est pas continue en 1.

Exemple 2.1.3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$.

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$ et si $x = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x > 0, \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

les f_n sont toutes continues dérivables sur \mathbb{R}_+ , mais f ne l'est pas.

Exemple 2.1.4. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle c-à-d $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

les f_n et f sont toutes intégrable sur $[0, 1]$, mais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Remarque 2.1.1. La convergence simple ne conserve pas certaines propriétés des fonctions (continuité, aspect borné, dérivabilité, ...).

2.1.2 Convergence uniforme

Définition 2.1.3

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $D \subset \mathbb{K}$ à valeurs dans \mathbb{K} .
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si :

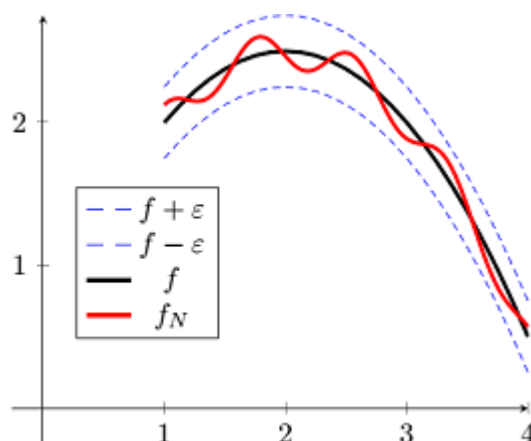
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \forall x \in D; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ou

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0,$$

avec $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in D} |f_n(x)|$.

Cela signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang N , les graphes de toutes les fonctions f_n sont "coincés" dans la "bande" de hauteur 2ε comprise entre les graphes de $f - \varepsilon$ et de $f + \varepsilon$.



Exercice 5. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

- $f_n(x) = x^n$, sur $[0, 1[$;
- $g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$, sur $[0, +\infty[$;
- $\varphi_n(x) = x/(x^2 + n)$, sur \mathbb{R} ;
- $\psi_n(x) = x e^{x/n}$, sur $[0, +\infty[$.

Corrigé. • Pour tout $x \in [0, 1[$, $x^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1[$. Or,

$$\sup_{x \in [0, 1[} |x^n - 0| = \sup_{x \in [0, 1[} x^n = 1,$$

ce qui montre que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1[$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n^2 x e^{-nx} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc la suite (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ . Or,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |n^2 x e^{-nx} - 0| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (n^2 x e^{-nx}) = \frac{n}{e}.$$

En effet, la dérivée de la fonction $x \mapsto n^2 x e^{-nx}$ est la fonction $x \mapsto n^2 e^{-nx} (1 - nx)$; on en déduit les variations de $g_n(x)$, et en particulier le fait que $g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ atteint son maximum en $x = \frac{1}{n}$, d'où le résultat annoncé. Il s'ensuit que la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R}_+ .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x/(x^2 + n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc la suite (φ_n) converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R} . La fonction (φ_n) étant impaire, on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{x^2 + n} - 0 \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{x}{x^2 + n} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \varphi_n(x).$$

Or,

$$\varphi'_n(x) = \frac{n - x^2}{(x^2 + n)^2},$$

qui s'annule pour $x = \pm\sqrt{n}$. On en déduit qu'aisément que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \varphi_n(x) = \varphi_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{2n} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty,$$

de sorte que la convergence est uniforme sur \mathbb{R} .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $xe^{x/n} \longrightarrow x$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Donc la suite (ψ_n) converge simplement vers la fonction $\psi_n(x) = x$ sur \mathbb{R}_+ . Or,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |\psi_n(x) - \psi(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |xe^{x/n} - x| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} x(e^{x/n} - 1).$$

La dérivée de la fonction $x \mapsto x(e^{x/n} - 1)$ est la fonction $x \mapsto e^{x/n}(1 + x/n) - 1$, qui est strictement positive sur \mathbb{R} . Ainsi, $x \mapsto x(e^{x/n} - 1)$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , ce qui montre que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} x(e^{x/n} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{x/n} - 1) = \infty.$$

On en déduit que la convergence n'est pas uniforme.

Proposition 2.1.1

La convergence uniforme est plus forte que la convergence simple.
C-à-d,

$$\text{Convergence uniforme} \implies \text{Convergence simple.}$$

En effet

$$\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Proposition 2.1.2

Si les fonctions f_n sont bornées sur D et convergent uniformément vers f , alors f est bornée.

En effet, dans la définition de la convergence uniforme, prenons $\varepsilon = 1$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < 1,$$

or, f_{n_0} est bornée par hypothèse, disons par M .

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq M + \varepsilon.$$

Proposition 2.1.3

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D , avec f_n continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est continue sur D .

En effet, la convergence uniforme donne

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

et la continuité de f_n en $x_0 \in D$, donne

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon,$$

l'inégalité triangulaire donne : $\forall x \in D$, pour $|x - x_0| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

Remarque 2.1.2. ✓ Si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction non continue, la convergence n'est pas uniforme.

✓ Si f_n est uniformément continue pour tout $n \in \mathbb{N}$ et converge uniformément vers f , alors f est uniformément continue.

Proposition 2.1.4

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur l'intervalle borné I , avec f_n intégrable pour tout n , alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx.$$

Démonstration. Les f_n sont continues sur I , puisqu'il y a convergence uniforme, f est elle aussi continue, donc intégrable.

Soit $I = [a, b]$, puisque f_n converge uniformément vers f , alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in I = [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

on intègre membre à membre pour en déduire que pour tout $n \geq n_0$

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon(b - a),$$

et puisque

$$\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx,$$

on en déduit que

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon(b - a),$$

ε est arbitraire, donc on a bien

$$\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx.$$

□

Proposition 2.1.5

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur l'intervalle I , avec f_n de classe \mathcal{C}^1 pour tout n , et si $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , f est de classe \mathcal{C}^1 et $f' = g$.

Démonstration. Soit $[a, b] \subseteq I$.

La suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g , alors g est continue, donc admet des primitives. En particulier, celle qui coïncide avec f en a s'écrit :

$$G(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

De la même façon, on peut écrire pour tout n :

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt,$$

mais alors ;

$$|G(x) - f_n(x)| = \left| f(a) - f_n(a) + \int_a^x (g(t) - f'_n(t)) dt \right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |f(a) - f_n(a)| < \varepsilon,$$

puisque $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g ,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \forall t \in [a, b] \quad |g(t) - f'_n(t)| < \varepsilon,$$

mais alors pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a :

$$|G(x) - f_n(x)| \leq (1 + x - a)\varepsilon \leq (b - a + 1)\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, ceci montre que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers G , qui est donc égale à f , et par suite f est de classe \mathcal{C}^1 , avec $f' = g$. □

2.1.3 Exercices

Exercice 6. Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout réel x on pose

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1 + nx^2}.$$

1. Trouver la limite simple f de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$.
2. Calculer $\|f - f_n\|_\infty$. La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge-t-elle uniformément vers f sur \mathbb{R} ?
3. Trouver la limite de la suite

$$\left(\int_0^2 f_n(x) dx \right)_{n \geq 0}.$$

Corrigé. 1. Si n est non nul, en divisant par n , on a

$$f_n(x) = \frac{x^3}{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Lorsque x n'est pas nul, la limite de $(f_n(x))$ vaut donc $f(x) = x^3/x^2 = x$.

Lorsque $x = 0$, la suite $(f_n(0))$ est nulle et converge vers 0.

Donc, pour tout x réel $f(x) = x$.

2. On a

$$f(x) - f_n(x) = x - \frac{nx^3}{1 + nx^2} = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

Comme la fonction $g_n = f - f_n$ est impaire, on étudie ses variations sur $[0, +\infty[$. Sur cet intervalle elle est positive. On a

$$g'_n(x) = \frac{1 + nx^2 - 2nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}.$$

La fonction g'_n atteint son maximum pour $x = 1/\sqrt{n}$. Alors

$$\|f - f_n\|_\infty = g_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Comme la suite $(\|f - f_n\|_\infty)$ converge vers 0, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

3. La suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 2]$, et les fonctions f_n sont continues sur $[0, 2]$. Alors on peut passer à la limite sous le signe d'intégration et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 f_n(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2.$$

Exercice 7. 1. L'inégalité suivante est-elle vérifiée ?

$$\ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t) dt \leq \ln^2(k+1) \quad 1 \leq k \in \mathbb{N}; \quad t \in [1, +\infty[.$$

2. Par une intégration par parties calculer

$$\int_1^x \ln^2(t) dt.$$

3. Donner un équivalent de

$$V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \ln^2(k), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

4. La série de terme général $\frac{1}{V_n}$ est-elle convergente ?

Corrigé. 1. Pour $k \geq 1$, puisque la fonction $x \mapsto \ln^2(x)$ est croissante sur $[1, \infty[$, on a,

$$\begin{aligned} k \leq t \leq k+1 &\implies \ln^2(k) \leq \ln^2(t) \leq \ln^2(k+1) \\ &\implies \ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t) dt \leq \ln^2(k+1). \end{aligned}$$

2. En utilisant une intégration par partie, pour $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2(t)$ on trouve

$$\int_1^x \ln^2(t) dt = x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x - 2.$$

3. On a

$$\ln^2(k) \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t) dt \leq \ln^2(k+1),$$

en sommant ces inégalités de $k = 1$ jusque $k = n$, on trouve

$$V_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2(t) dt \leq V_{n+1} - \ln^2(1),$$

ce qui écrit encore

$$\int_1^n \ln^2(t) dt \leq V_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2(t) dt,$$

ainsi, on trouve

$$n \ln^2(n) - 2n \ln(n) + 2n - 2 \leq V_n \leq (n+1) \ln^2(n+1) - 2(n+1) \ln(n+1) + 2(n+1) - 2,$$

ceci prouve que

$$V_n \underset{\infty}{\sim} n \ln^2(n).$$

Ainsi

$$\frac{1}{V_n} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln^2(n)},$$

mais la série de terme général $\frac{1}{n \ln^2(n)}$ est convergente.

4. Donc la série de terme général $\frac{1}{V_n}$ est convergente.

2.2 Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur l'intervalle I et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, c-à-d

$$\forall x \in I; \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

2.2.1 Convergence simple

Définition 2.2.1

On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement vers S sur I si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge simplement vers S sur I , on note alors

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad x \in I.$$

S est appelée somme de la série de fonctions $\sum_n f_n$.

Exemple 2.2.1. Soit $I =]-1, 1[$, $f_n(x) = x^n$, alors la suite des sommes partielles est

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

La série $\sum_n f_n$ est convergente sur $I =]-1, 1[$ de somme

$$S : \begin{array}{l}]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto S(x) = \frac{1}{1-x}. \end{array}$$

2.2.2 Convergence absolue

Définition 2.2.2

On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge absolument sur I si la série de fonctions $\sum_n |f_n|$ converge simplement.

Exemple 2.2.2. La règle de d'Alembert permet de montrer que la série de fonctions $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ converge absolument sur \mathbb{R} vers la fonction $x \mapsto e^x$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Proposition 2.2.1: S

la série de fonctions $\sum_n f_n$ est absolument convergente sur I , alors elle est simplement convergente sur I .

Exercice 8. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ est simplement convergente sur $[-1, 1[$, mais n'est absolument convergente que sur $] -1, 1[$.

Corrigé. Pour $x = -1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ elle convergente d'après le théorème de Leibniz, et pour $x \in]-1, 1[$ la règle de d'Alembert nous permet de conclure la convergence absolue.

2.2.3 Convergence uniforme

Définition 2.2.3

On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément vers S sur I si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément vers S sur I .

$$\sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in I} |R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exemple 2.2.3. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

La série $\sum_n x^n$ converge uniformément vers $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$. En effet :

$$\sup_{x \in [-\alpha, \alpha]} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in [-\alpha, \alpha]} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exemple 2.2.4. (Convergence uniforme non absolue)

On considère les fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ constantes sur \mathbb{R} , avec

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}.$$

(f_n) converge uniformément vers $f \equiv 0$, par contre, elle n'est pas absolument convergente.

Propriétés 2.2.1

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément vers S sur I , alors :

1. $\sum_n f_n$ converge simplement vers S sur I .
2. Si les f_n sont bornées sur I , S est bornée sur I .
3. Si les f_n sont continues sur I , S est continue sur I .
4. Si les f_n sont intégrables sur l'intervalle borné I , S est intégrable sur I , avec

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

5. Si les f_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle I , s'il existe $x_0 \in I$ tel que $\sum_n f_n(x_0)$ converge simplement vers S et si $\sum_n f'_n$ converge uniformément vers P , alors $\sum_n f_n$ converge uniformément vers S , de plus S est dérivable et $S' = P$,

$$\forall x \in I; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)'.$$

Exemple 2.2.5. (Convergence absolue non uniforme)

On considère la fonction f_n définie par :

$$f_n : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto x^n - x^{n+1} \end{cases}$$

la suite des sommes partielles est

$$S_n(x) = 1 - x^{n+1},$$

qui converge simplement vers la fonction

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Les f_n sont continues et S ne l'est pas, donc il n'y a pas convergence uniforme. Par contre, puisque les f_n sont positives, on a

$$\forall x \in [0, 1]; \quad \sum_{k=0}^n |f_k(x)| = \sum_{k=0}^n f_k(x) = S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(x),$$

c-à-d. converge absolue.

Théorème 2.2.1: théorème de Dini

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continue et simplement convergente vers f sur D . Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la convergence est uniforme.

2.2.4 Convergence normale

Définition 2.2.4

On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur I , s'il existe une suite de réels positifs $(\alpha_n)_n$ telle que :

- (i) $\forall x \in I; \quad |f_n(x)| \leq \alpha_n,$
- (ii) $\sum_n \alpha_n$ est une série numérique convergente.

Exemple 2.2.6. La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+x^2}$ est normalement convergente sur \mathbb{R} . En effet, on a

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}; \quad \left| \frac{1}{n^2+x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$
- (ii) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série numérique convergente (série de Riemann).

Proposition 2.2.2

Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ est normalement convergente sur I , alors elle est simplement, absolument et uniformément convergente sur I .

Démonstration. Supposons que la série de fonctions $\sum_n f_n$ est normalement convergente sur I , avec $(\alpha_n)_n$ comme ci-dessus, alors il est clair que pour tout $x \in I$, la série $\sum_n |f_n(x)|$ converge, donc la série $\sum_n f_n$ est absolument convergente, donc simplement convergente. Notons $S = \sum_n f_n$

$$\forall x \in I; \quad |S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k = \rho_n,$$

où $(\rho_n)_n$ est la suite des restes d'une série convergente, donc $(\rho_n)_n$ tend vers zéro indépendamment de x , cela permet de dire que $\sum_n f_n$ est une série de fonctions uniformément convergente. \square

Exemple 2.2.7. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} ne^{-x\sqrt{n}}$, $x \in [1, +\infty[$.

On a $f_n(x) = ne^{-x\sqrt{n}}$, f_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et

$$f'_n(x) = -n\sqrt{n}e^{-x\sqrt{n}} \leq 0, \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

donc

$$\sup_{x \in [1, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(1) = ne^{-\sqrt{n}},$$

et la série $\sum_{n \geq 0} ne^{-\sqrt{n}}$ converge d'après le critère de Riemann, car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 ne^{-\sqrt{n}} = 0.$$

D'où la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} ne^{-x\sqrt{n}}$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

Théorème 2.2.2: Critère d'Abel uniforme

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ des séries de fonctions sur I . On suppose

1. $\exists A \in \mathbb{R}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q, \forall x \in I :$

$$\left| \sum_{k=p}^q v_k(x) \right| \leq A,$$

2. la suite $(u_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I ,

3. la série $\sum_n |u_n(x) - u_{n+1}|$ est uniformément convergente sur I .

Alors ; la série de fonctions $\sum_n u_n v_n$ est uniformément convergente sur I .

Corollaire 2.2.1: S

it pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega_n = (-1)^n u_n$ où u_n est une fonction définie sur I . On suppose

1. $\forall x \in I$, $u_n(x)$ est décroissante,

2. la série $\sum_n u_n$ tend uniformément vers 0 sur I .

Alors, la série de fonctions $\sum_n \omega_n$ converge uniformément dans I .

Exemple 2.2.8. On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}, \quad x \in [1, +\infty[.$$

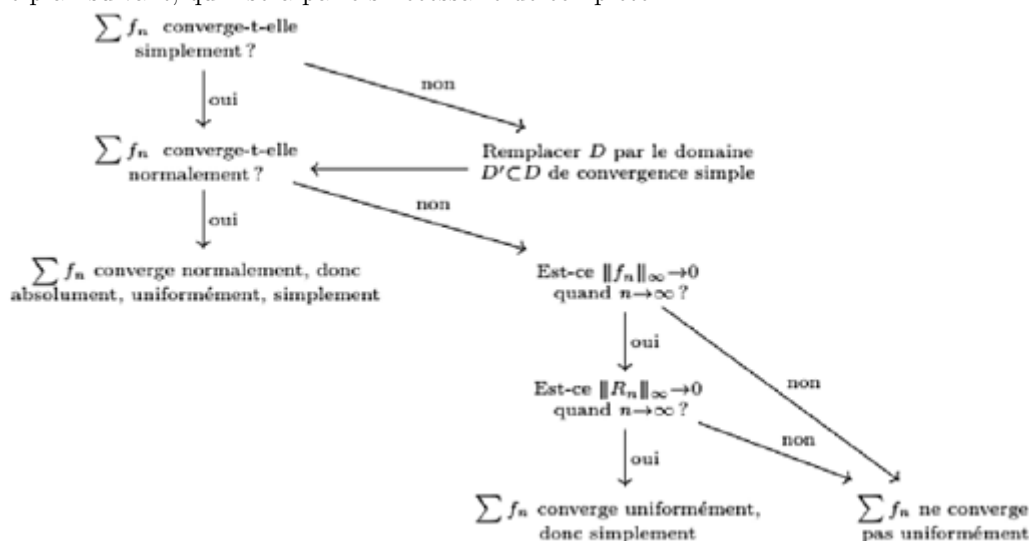
on a, pour tout $x \in [1, +\infty[$; $n \mapsto \frac{1}{n^x}$ décroissante et

$$\frac{1}{n^x} \leq \sup_{x \geq 1} \left| \frac{1}{n^x} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2.3 Sommaire pour l'étude d'une série de fonctions

Pour étudier, sur un exemple donné, les types de convergence d'une série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$, on peut proposer

le plan suivant, qu'il sera parfois nécessaire de compléter :



2.3.1 Exercices

Exercice 9. Pour $n \geq 0$: on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} u_k$.

1. Calculer $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$.
2. Montrer que $\int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
3. Calculer $S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.
4. Dédurre $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Corrigé. $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} u_k$.

1. Calculons $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2}.$$

2. Montrons que $\int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}. \end{aligned}$$

3. Calculons $S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

$$\begin{aligned} S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 10. Soit la série de fonctions suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Quelle est sa fonction somme sur tout \mathbb{R} .
- Est-elle uniformément convergente sur tout \mathbb{R} ?
- Est-elle uniformément convergente sur le domaine $[0, 1]$?
- Montrer qu'elle est normalement convergente sur $[\alpha, +\infty[$, où $\alpha > 0$.

Corrigé. Soit la série de fonctions suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a. Soit S_n la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$, on a alors :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n U_k(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x}{(1+x^2)^k} = x \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+x^2)^k},$$

qui est une progression géométrique de raison $q = \frac{1}{1+x^2} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc

$$S_n(x) = x \left(\frac{1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} \right).$$

Soit $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$, pour $x = 0 : u_n(0) = 0$, il vient que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(0) = 0.$$

Finalement : la somme est une fonction définie sur tout \mathbb{R} comme suit :

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b. Il est clair que la convergence n'est pas uniforme sur tout \mathbb{R} du moment que la fonction somme n'est pas continue sur \mathbb{R} .

c. La convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, 1]$ du fait que le problème est au niveau de 0.

d. La convergence normale sur $[\alpha, +\infty[$, o $\alpha > 0$. On a

$$\forall x \in [0, +\infty[; \forall n \in \mathbb{N}^* : u'_n(x) = \frac{1 - (2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$	$+\infty$
$u'_n(x)$	+	0	-
$u_n(x)$			

Alors $\forall \alpha > \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [\alpha, +\infty[} |u_n(x)| = \sum_{n \geq 1} u_n(\alpha) = \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^n}.$$

$\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^n}$ est une série numérique convergente d'après la règle de d'Alembert. Ce qui répent à notre question.

Exercice 11. Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ la série de fonctions de terme général $u_n(x) = x^2(1+x^2)^{-n}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la somme $S(x)$ de la série $\sum u_n$.

2. La série est-elle uniformément convergente ?

Corrigé. 1. Pour $x \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n - 1 \right) = x^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} - 1 \right) = 1.$$

De plus, la somme de la série est nulle si $x = 0$, de manière évidente. Donc,

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. Chaque u_n est continue sur \mathbb{R} , mais la somme S n'est pas continue (en $x = 0$). La convergence ne peut donc pas être uniforme.

Exercice 12. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur \mathbb{R}_+ .
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R}_+ ?

Corrigé. 1. Soit $x \geq 0$ fixé. Alors $n^2 u_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n} + 3 \ln n}$ tend vers 0. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_n u_n(x)$ est convergente.

2. On va calculer $\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)|$. On remarque d'abord que u_n est une fonction positive. De plus, elle est dérivable et sa dérivée vaut

$$u'_n(x) = n(2xx^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nx(2x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

On en déduit que u_n est croissante sur l'intervalle $[0, \frac{2}{\sqrt{n}}]$ et décroissante sur l'intervalle $[\frac{2}{\sqrt{n}}, +\infty[$. On a donc

$$\|u_n\|_{+\infty} = u_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4e^2.$$

C'est le terme général d'une série (grossièrement) divergente, et donc la convergence n'est pas normale sur \mathbb{R}_+ .

3. Pour $n \geq \frac{4}{a^2}$, on a $a \geq \frac{2}{\sqrt{n}}$ et donc la fonction u_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. On en déduit que, pour tout $x \geq a$, on a

$$|u_n(x)| \leq u_n(a).$$

Le membre de droite est le terme général d'une série numérique (il ne dépend plus de x) convergente : ceci prouve la convergence normale de la série $\sum_n u_n$ sur $[a, +\infty[$. Remarquons que le fait que l'inégalité ne soit

vraie qu'à partir d'un certain rang (qui est indépendant de $x \in [a, +\infty[.$) ne change rien à la convergence normale.

4. Notons \mathbf{R}_n le reste d'ordre n de la série. Puisque $u_k \geq 0$ pour tout k , on a

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geq u_{n+1}(x).$$

D'après le résultat de la question 2.,

$$\|\mathbf{R}_n\|_{+\infty} \geq \|u_{n+1}\|_{+\infty} = 4e^2.$$

Ceci ne tend pas vers 0 et donc la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 13. On considère la série de fonctions

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[.$
2. Prouver que S est continue sur I .
3. Prouver que S est dérivable sur I , calculer sa dérivée et en déduire que S est croissante sur I .
4. Quelle est la limite de S en -1 ? en $+\infty$?

Corrigé. 1. Il est clair que la suite $(\frac{1}{x+n})_n$, pour $x > -1$ fixé, est positive, décroissante et tend vers 0. Par application du critère des séries alternées, la série est convergente pour tout $x > -1$.

2. Posons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$. Nous avons vérifié à la question précédente que, pour $x > -1$ fixé, la série $\sum_n u_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées. Par conséquent, on sait que son reste $R_n(x)$ vérifie

$$\|R_n(x)\| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{x+n+1}.$$

Puisque $x > -1$, on a en particulier

$$\|R_n(x)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Ceci tend vers 0 (indépendamment de x), de sorte qu'on a prouvé la convergence uniforme de la série $\sum_n u_n(x)$ sur I . Puisque chaque fonction u_n est continue, la fonction S est continue sur I .

3. Chaque fonction u_n est dérivable sur I avec $u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De même qu'à la question précédente, pour $x > -1$ fixé, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est convergente car elle vérifie les conditions du critère des séries alternées. De plus, si on note $T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ son reste, on a $|T_n(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, inégalité valable pour tout $x > -1$. On peut donc majorer le reste par une quantité qui tend vers 0 : la série dérivée est uniformément convergente. On en déduit que la fonction S est dérivable, et que sa dérivée est donnée par $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. De plus, on sait qu'on peut encadrer la somme d'une série alternée par deux sommes partielles consécutives, par exemple ici

$$0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \leq u'(x) \leq \frac{1}{(x+1)^2}.$$

En particulier, la dérivée est positive et la fonction est croissante.

4. De même qu'à la question précédente, par le critère des séries alternées, on peut encadrer S par deux sommes partielles consécutives :

$$-\frac{1}{x+1} \leq S(x) \leq -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème d'encadrement des limites pour prouver que

$$\lim_{x \rightarrow -1} S(x) = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0.$$

Séries entières

3.1 Introduction

Les séries entières sont des séries de fonctions de forme particulière. On s'intéresse dans un premier temps aux propriétés de la somme d'une série entière (domaine de convergence, continuité, ...), on verra ensuite comment exprimer des fonctions usuelles comme somme des séries entières. elles sont bien adaptées à l'opération de dérivation, et donc à la résolution d'équations différentielles.

Définition 3.1.1

On appelle série entière une série de fonctions du type

$$\sum_n a_n z^n,$$

où $(a_n)_n$ est une suite numérique et z désigne une variable complexe ou réelle.

· Comme pour les séries de fonctions, on cherche l'ensemble :

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_n a_n z^n \text{ converge} \right\},$$

ou

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_n a_n x^n \text{ converge} \right\},$$

qu'on appelle domaine de convergence de la série entière.

Exemple 3.1.1. *Les séries suivantes sont des séries entières*

$$1/ \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad 2/ \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2} \quad 3/ \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \quad 4/ \sum_{n \geq 0} n! x^n.$$

3.2 Lemme D'Abel

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{K}$ (\mathbb{K} désigne \mathbb{C} ou \mathbb{R}) tel que la suite $(a_n x_0^n)_n$ soit bornée. Alors

1. La série $\sum_n a_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < |x_0|$.
2. La série $\sum_n a_n x^n$ est normalement convergente pour $|x| < r$ pour tout $0 < r < |x_0|$.

Démonstration. On suppose bien sûr $x_0 \neq 0$, sinon il n'y a rien à dire. Puisque $\sum_n a_n x_0^n$ converge, elle n'est pas trivialement divergente, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$. En particulier, cette suite est bornée (rappelons que toute suite admettant une limite est bornée), disons par M . Soit x tel que $|x| < |x_0|$, alors :

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n,$$

or $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, donc $\sum_n \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ est une série géométrique convergente, par suite $\sum_n |a_n x^n|$ converge, i.e. $\sum_n a_n x^n$ est absolument convergente. \square

3.3 Rayon de convergence d'une série entière

Théorème 3.3.1

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière, alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que :

1. La série $\sum_n a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < R$.
2. La série $\sum_n a_n x^n$ diverge si $|x| > R$.

Démonstration. Soit $I = \left\{ r \in \mathbb{R}_+; \sum_n a_n r^n \text{ converge} \right\}$. $I \neq \emptyset$ car $0 \in I$.

On distinguera trois cas : $I = \{0\}$, $I = \mathbb{R}_+$ et $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}_+$.

1. $I = \{0\}$. On pose $R = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ alors $|x| > 0$ et par suite $x \notin I$ et la série $\sum_n |a_n x^n|$ diverge.

2. $I = \mathbb{R}_+$. On pose $R = +\infty$. Prouvons que $\sum_n a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La série $\sum_n |a_n| r^n$ converge pour tout $r > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, il existe $r > 0$ tel que $|x| < r$. Ceci implique

$|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ et d'après le critère de comparaison la série $\sum_n a_n x^n$ converge absolument.

3. $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}_+$, $\mathfrak{S} \neq \{0\}$ et $I \neq \mathbb{R}_+$.

4. I est majoré. En effet, soit $r \in \mathbb{R}^* \setminus I$ et supposons que r n'est pas un majorant de I . Il existe alors $r_1 \in I$ tel que $r < r_1$. D'après la définition de I , la série $\sum_n a_n r_1^n$ est convergente ainsi que $\sum_n a_n r^n$ (car $|a_n| r^n < |a_n| r_1^n$) et donc $r \in I$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $r \in \mathbb{R}^* \setminus I$. I est alors un ensemble non vide et majoré donc admet une borne supérieure $R = \sup_{r \in I} r$.
- Pour conclure, on doit prouver que $\sum_n a_n x^n$ converge absolument pour tout x , $|x| < R$ et diverge pour tout x , $|x| > R$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$. Il existe $\rho \in I$ tel que $|x| < \rho < R$. Comme la série $\sum_n |a_n| \rho^n$ converge, $\sum_n |a_n x^n|$ converge en vertu du théorème de comparaison. $\sum_n a_n x^n$ est alors absolument convergente.
6. Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| > R$. Ceci implique que $|x| \notin I$ et donc la série $\sum_n |a_n x^n|$ diverge. Montrons que $\sum_n a_n x^n$ diverge. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si $\sum_n a_n x^n$ converge, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum_n a_n x_1^n$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, vérifiant $R < |x_1| < |x|$ et donc $|x_1| \in I$. On a alors nécessairement $|x_1| \leq R = \sup_{r \in I} r$ et ceci est en contradiction avec l'hypothèse $R < |x_1| < |x|$.

□

Définition 3.3.1

Le nombre $R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}_+ : \sum_n |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$, est appelé rayon de convergence de la série $\sum_n a_n z^n$.

Remarque 3.3.1. $\left\{ r \in \mathbb{R}_+ : \sum_n |a_n| r^n \right\} \neq \emptyset$, car il contient 0. Si cet ensemble est majoré il admet une borne sup. Sinon, on convient de poser $R = +\infty$.

Définition 3.3.2

Soient $\sum_n a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

- Dans \mathbb{R} l'intervalle $] -R, R[$ s'appelle l'intervalle de convergence.
- Dans \mathbb{C} le disque $\overset{\circ}{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ est appelé disque de convergence.

Remarques 3.3.1. On remarque que

1. Si R est fini, pour $|x| = R$ on ne peut rien dire sur la nature de la série $\sum_n a_n x^n$ (le cas douteux).
2. Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R$, la série $\sum_n a_n x^n$ est normalement (donc absolument et uniformément) convergente sur $[-r, r]$.

Exemple 3.3.1. La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ est de rayon de convergence $R = 1$, elle est divergente pour $x = 1$.

3.4 Méthodes de calcul du rayon de convergence

3.4.1 La règle de d'Alembert

Théorème 3.4.1

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière.

Si il existe $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0; a_n \neq 0$, alors le rayon de convergence R est donné par

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

3.4.2 La règle d'Hadamard

Théorème 3.4.2

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\inf_{n_0 \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq n_0} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Où, si (a_n) est une suite bornée de réels positifs, on pose

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_k; k \geq n\}.$$

C-à-d que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de (a_n) .

Si a_n est positive non majorée, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Démonstration. On remarque que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$.

On obtient le résultat demandé en utilisant le critère de Cauchy pour la convergence des séries numériques. \square

Définition 3.4.1

Un réel l est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ s'il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers l .

3.5 Opérations sur les séries entières

Soient $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b .

3.5.1 Somme de séries entières

La série entière somme $\sum_n (a_n + b_n) x^n$ est de rayon de convergence R_s , avec $R_s \geq \inf(R_a, R_b)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

tel que $|x| < \inf(R_a, R_b)$,

$$\sum_n (a_n + b_n) x^n = \sum_n a_n x^n + \sum_n b_n x^n.$$

Théorème 3.5.1

Soient $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b .

1. Si $R_a \neq R_b$, alors le rayon de convergence de la série $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ est $R_s = \inf(R_a, R_b)$.
2. Si $R_a = R_b$, alors le rayon de convergence de la série $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ est $R_s \geq R_a$.

Démonstration.

1. Supposons que $R_a < R_b$.

a) Si $R_a > |x|$ alors $R_b > |x|$ donc $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$ sont absolument convergentes. Comme

$$|(a_n + b_n)x^n| \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|,$$

donc la série $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ converge absolument pour tout $|x| < \min(R_a, R_b)$.

b) Pour $R_a < |x|$ on distingue deux cas

i) Si $R_a < |x| < R_b$, la série $\sum_n a_n x^n$ converge absolument et la série $\sum_n b_n x^n$ diverge, donc $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ diverge.

ii) Si $R_a < R_b < |x|$, les séries $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$ divergent, alors la série $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ diverge.

Raisonnons par l'absurde, $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ converge, d'après le lemme d'Abel la série $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ converge pour tout x_0 de \mathbb{R} , tel que $|x_0| < |x|$ et en particulier pour x_0 vérifiant $R_a < |x_0| < R_b < |x|$. D'où la contradiction.

2. Si $R_a = R_b$, c'est clair que la série $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ converge absolument si $|x| < R_a = R_b$. De plus

$$R_a = R_b \leq R_s.$$

□

Exemple 3.5.1. Soit $a_n = -b_n = 1$, alors que $R_s = +\infty$.

Exemple 3.5.2. Soient $S(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$ et $T(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$. Les deux séries ont pour rayon de convergence $R = 1$, mais la série somme $(S + T)(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} x^n$, a pour rayon de convergence $R_s = 2$.

3.5.2 Produit de séries entières

La série entière produit $\sum_n c_n x^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ est de rayon de convergence R_p , avec $R_p \geq \inf(R_a, R_b)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \inf(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

3.6 Propriétés fonctionnelles d'une série entière

3.6.1 Continuité

Théorème 3.6.1

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors pour tout $|x| < R$, $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est une fonction continue.

Démonstration. Soit $0 < r < R$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $f_n(x) = a_n x^n$ sont continues sur $[-r, r]$ et puisque la convergence est normale donc uniforme sur $[-r, r]$, S est continue dans $[-r, r]$ pour tout r , $0 < r < R$ donc continue sur $] -R, R[$. \square

3.6.2 Intégration

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors pour tout a, b tels que $a < b$ et $[a, b] \subset] -R, R[$,

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k x^k dx.$$

Proposition 3.6.1: L

Les séries entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

3.6.3 Dérivation

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors pour tout $|x| < R$ la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est indéfiniment dérivable et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

3.7 Fonctions développables en séries entières

Définition 3.7.1

Soient $R > 0$ et $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est développable en série entière sur $] -R, R[$ s'il existe une suite de réels $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$\forall x \in]-R, R[; \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Exemple 3.7.1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ puisque, on a :

$$\forall x \in]-1, 1[; \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Théorème 3.7.1

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, pour tout $x \in]-R, R[$, où R est le rayon de convergence, strictement positif, alors f est de classe \mathcal{C}^∞ ($] -R, R[$) et on a

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

où $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction f , (c-à-d que la série entière est la série de Taylor).

$$\forall x \in]-R, R[; \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Exemple 3.7.2.

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 14. Montrer l'identité suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : e^a e^b = e^{a+b}.$$

Corrigé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n, \quad \text{et} \quad e^{bx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} x^n.$$

Le produit de Cauchy du développement en série entière de e^{ax} et e^{bx} donne pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{ax} e^{bx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \mathcal{C}_n^k a^k b^{n-k} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} (a+b)^n \right) x^n \\ &= e^{(a+b)x}. \end{aligned}$$

Cas particulier, pour $x = 1$, on obtient l'égalité demandé.

Proposition 3.7.1: S

f est C^∞ sur $] -R, R[$ et s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\forall x \in] -R, R[, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x)| \leq M,$$

alors f est développable en série entière en 0.

Exemple 3.7.3. On a $\forall x \in \mathbb{R} : |\cos^n(x)| \leq 1$. alors

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Exercice 15. Soit la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence.

2. Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$: \star Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$

Corrigé. Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

1. Déterminons son rayon de convergence.

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1.$$

2. Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

\star Calculer $f'(x)$ et $\int_0^x \frac{dt}{1-t}$ pour $x \in] -1, 1[$.

$$\star f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$$\star \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

\star Dédurre $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

★ Pour $x \in [-1, 1]$; $\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$, alors $f(x) = -\ln(1-x)$.
 Il s'ensuit que pour $x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$.

Exercice 16. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R = 1$.

2. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \sum_{n \geq 1} S_n x^n$. Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $(1-x)F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$.

3. En déduire la valeur de $F(x)$ sur $] -1, 1[$.

Corrigé. 1. 1. Il est d'abord clair que, pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq S_n \leq n$. Donc, pour $\rho > 0$, on a

$$\rho^n \leq S_n \rho^n \leq n \rho^n.$$

Ainsi, si $\rho \in]0, 1[$, la suite $(S_n \rho^n)$ est bornée (on peut même dire qu'elle tend vers 0), et si $\rho > 1$, la suite $(S_n \rho^n)$ tend vers $+\infty$. On en déduit que le rayon de convergence de S vaut 1.

2. On développe et on fait un changement d'indices dans une des deux sommes :

$$\begin{aligned} (1-x)F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^{n+1} \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x). \end{aligned}$$

3. Ayant reconnu le développement en série entière de $-\ln(1-x)$, on en déduit que

$$F(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

3.8 Développements usuels

Les développements en série entière des fonctions usuelles sont tout simplement les développements limités (illimités) vus en première année. En voici quelques-uns :

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad R=1, \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R=+\infty, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R=+\infty, \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R=+\infty, \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R=+\infty, \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R=+\infty, \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1, \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad R=1, \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad R=1, \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad R=1.
\end{aligned}$$

3.9 Équations différentielles

On cherche la solution d'une équation différentielle ordinaire sous forme de série entière.

Exercice 17. On considère l'équation différentielle $y' = y^2$, dont on cherche une solution développable en série entière, c-à-d sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

avec un rayon de convergence R strictement positif.

1. Exprimer en fonction des a_n les coefficients b_n du développement en série entière de y^2 ,

$$y^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

2. Donner les équations que doivent vérifier a_0, a_1, \dots pour que l'équation différentielle soit satisfaite.
3. On impose de plus la condition initiale $y(0) = 1$. En déduire a_0, a_1, \dots et exprimer y comme une fonction usuelle.

4. Retrouver directement le résultat en intégrant l'équation par la méthode des variables séparables.

Corrigé. 1. Le produit de Cauchy du développement en série entière de y par elle-même donne, pour tout

$x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} y^2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n, \end{aligned}$$

ce qui donne pour tout $n \geq 0$

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

2. D'autre part, le développement de la série dérivée est pour tout $|x| < R$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

pour que y satisfasse l'équation différentielle $y' = y^2$, il faut donc que les a_n vérifient

$$\begin{cases} a_1 = b_0 = a_0^2, \\ 2a_2 = b_1 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 2a_0 a_1, \\ \cdot \\ \cdot \\ (n+1)a_{n+1} = b_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \end{cases}$$

3. La condition initiale $y(0) = 1$ donne $a_0 = 1$, et le système d'équations ci-dessus donne $a_1 = 1$ pour tout n . Donc le développement en série entière de y est tout simplement la solution est

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

de rayon de convergence $R = 1$.

4. Noter que la fonction nulle est une solution (maximale) de l'équation $y' = y^2$.

Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} y' = y^2 &\iff \frac{y'}{y^2} = 1 \\ &\iff -\frac{1}{y} = x + \lambda \iff y = \frac{-1}{x + \lambda}, \end{aligned}$$

la prise en compte de la condition initiale $y(0) = 1$ donne :

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Exercice 18. On considère l'équation différentielle :

$$f'(x) - f(x) = 0,$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} f(0) = 2, \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad |x| < R \quad \text{où} \quad R > 0,$$

1. Que dire de a_0 et a_1 ?
2. Etablir une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n . En déduire a_n pour tout $n \geq 0$.
3. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
4. Rappeler le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique. En déduire une expression plus simple de f .

Corrigé. f est développable en série entière en 0 et $f \in C^{+\infty}$, alors

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

1. $a_0 = f(0) = 2$ et $a_1 = f'(0) = 0$.
2. $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$, en identifiant $f''(x)$ et $f(x)$ on obtient

$$\forall n \geq 0: \quad a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)},$$

puisque $a_0 = 2$ et $a_1 = 0$ ceci donne

$$\forall n \geq 0: \quad a_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n} = \frac{2}{(2n)!},$$

donc

$$f(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

3. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est absolument convergente par le critère de d'Alembert, on en déduit que $R = +\infty$.
4. $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = 2 \cosh x = e^x + e^{-x}.$$

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{(2n)!} \right) x^{2n} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}. \end{aligned}$$

3.10 Exercices

Exercice 19. 1. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence π .

2. Est-il possible de trouver des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence ?

3. Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n (-1)^n a_n z^n$?

Corrigé. 1. La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\pi^n}$ convient.

2. Si $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $b_n = 1$, les deux séries ont même rayon de convergence (égal à 1), et pourtant $a_n = o(b_n)$.

3. C'est le même ! on a $|a_n \rho^n| = |(-1)^n a_n \rho^n|$ pour tout $\rho \geq 0$, et donc, par définition du rayon de convergence, les deux séries ont même rayon de convergence.

Exercice 20. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1/ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n & 2/ \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(2n)!} x^n & 3/ \sum_{n \geq 1} (\ln(n)) x^n & 4/ \sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} x^{2n} \\ 5/ \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} x^n & 6/ \sum_{n \geq 1} x^{n!} & 7/ \sum_{n \geq 1} n^{\ln n} x^n. & \end{array}$$

Corrigé. 1/ Posons $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \rightarrow 1,$$

et donc le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

2/ Posons $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4n+2} \rightarrow 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $+\infty$.

3/ On sait que $(\ln n R^n)$ est borné si et seulement si $|R| < 1$. Ainsi, le rayon de convergence vaut 1. Ceci peut se retrouver par la règle de d'Alembert, puisque

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} \rightarrow 1,$$

4/ Pour $R > 0$, on a

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n + 1} R^{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} \left(\frac{R^2}{2} \right)^n.$$

Ceci est borné si et seulement si $R^2 < 1$. Le rayon de convergence est donc $\sqrt{2}$. On peut là encore donner une preuve en utilisant la règle de d'Alembert.

5/ Notant $u_n = \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} x^n$, on applique la règle de d'Alembert pour étudier la convergence absolue de cette série. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{2n+1} \longrightarrow 0.$$

La série entière est donc convergente pour toute valeur de x . Son rayon de convergence est donc $+\infty$.

6/ Pour $|x| < 1$, on remarque que $|x|^{n!} \leq |x|^n$ et donc la série est convergente. Pour $|x| \geq 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série est donc grossièrement divergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière est 1.

7/ Pour $u_n = n^{\ln n} |x|^n$, on étudie la convergence en appliquant la règle de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = n^{\frac{\ln n}{n}} |x| = e^{\frac{\ln n \times \ln n}{n}} |x| \longrightarrow |x|.$$

La série est donc convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $|x| > 1$. Son rayon de convergence vaut 1.

Exercice 21. Soit S la somme de la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Corrigé. Supposons d'abord que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors S est paire comme somme d'une série de fonctions paires. Réciproquement, supposons que S est paire, et posons $R(x) = S(-x)$. Alors, on sait que, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$T(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n x^n.$$

De plus, puisque S est paire, T et S coïncident sur $] -R, R[$. C'est donc que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = (-1)^n a_n$. Ceci impose que $a_n = 0$ dès que n est impair.

Séries de Fourier

Introduite en 1822 par Joseph Fourier.

But de ce chapitre :

- ✓ Calcul des coefficients de fourier.
- ✓ Donner la série de fourier.
- ✓ Théorème de Dirichlet.
- ✓ Egalité de Parseval.

Définition 4.0.1

On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est périodique de période $T > 0$ si

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On dit encore f est T -périodique.

Exemple 4.0.1.

- La fonction $x \mapsto e^{ix}$ où $i^2 = -1$, est 2π -périodique.
- La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [2k, 2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{si } x \in [2k + 1, 2k + 2], \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

est périodique de période 2.

Lemme 4.0.1

Soit f une fonction T -périodique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx.$$

Remarque 4.0.1. *Cas particuliers : Soit f une fonction T -périodique.*

1. Si f est paire, alors pour tout x , on a

$$\int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx.$$

2. Si f est impaire, alors pour tout x , on a

$$\int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 0.$$

4.1 Coefficients de Fourier

On définit sur l'ensemble $F^T = \{\text{Fonctions } T\text{-périodiques de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{C}\}$, un produit scalaire par

$$\forall f, g \in F^T : f \cdot g = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx.$$

1. $\forall f, g \in F^T : f \cdot g = \overline{g \cdot f}$;

2. $\forall f, g, h \in F^T, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} :$

a. $(\alpha f + \beta g) \cdot h = \alpha f \cdot h + \beta g \cdot h$;

b. $h \cdot (\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha} h \cdot f + \overline{\beta} h \cdot g$;

3. $\forall f \in F^T : f \cdot f \geq 0$.

Soit $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction e_n définie sur \mathbb{R} par $e_n(x) = e^{in\omega x}$ où $i^2 = -1$ appartient à F^T .

$\{e_n; n \in \mathbb{Z}\}$ est une partie orthonormée de F^T (c-à-d, constituer une base orthonormée de F^T). En effet, pour

tout $n \in \mathbb{Z}$

$$e_n \cdot e_n = \frac{1}{T} \int_0^T e_n(x) \overline{e_n(x)} dx = \frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega x} e^{-in\omega x} dx = \frac{1}{T} \int_0^T dx = 1.$$

Et pour $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq m$

$$\begin{aligned} e_n \cdot e_m &= \frac{1}{T} \int_0^T e_n(x) \overline{e_m(x)} dx = \frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega x} e^{-im\omega x} dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(n-m)\omega x} dx \\ &= \frac{1}{i(n-m)\omega T} \left[e^{i(n-m)\omega T} - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

car, on a, pour $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{aligned} e^{i(n-m)\omega T} &= \cos((n-m)\omega T) + i \sin((n-m)\omega T) \\ &= \cos((n-m)2\pi) + i \sin((n-m)2\pi) = 1. \end{aligned}$$

Remarque 4.1.1. F^T est un espace de Hilbert.

On décompose les fonctions T -périodiques sur l'espace F^T , $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$, c_n sont les **coefficients de fourier**.

On a

$$f \cdot e_n = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n \right) \cdot e_n = c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx,$$

ou grâce à la périodicité

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\omega x} dx.$$

Remarque 4.1.2. Cas particuliers :

✓ Si la fonction f est paire alors

$$c_n = c_{-n},$$

dans ce cas

$$f(x) = c_0 + 2 \sum_{n \geq 1} c_n \cos(n\omega x).$$

✓ Si la fonction f est impaire alors

$$c_n = -c_{-n},$$

dans ce cas

$$f(x) = 2i \sum_{n \geq 1} c_n \sin(n\omega x).$$

En effet, dans le cas d'une fonction impaire par exemple, on décompose f comme suit

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n \\ &= \sum_{n \geq 1} c_n e_n + c_0 e_0 + \sum_{n \leq -1} c_n e_n \\ &= \sum_{n \geq 1} c_n e_n + \sum_{n \geq 1} c_{-n} e_{-n} \\ &= \sum_{n \geq 1} c_n (e_n - e_{-n}) \end{aligned}$$

d'autres part

$$e_n(x) - e_{-n}(x) = e^{in\omega x} - e^{-in\omega x} = 2i \sin(n\omega x)$$

donc

$$f(x) = 2i \sum_{n \geq 1} c_n \sin(n\omega x).$$

Si la fonction f est T -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , la série de fourier associée à f est

$$S_f(x) = m + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)],$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$, m la moyenne de la fonction f sur T et a_n, b_n sont les coefficients de fourier, avec

$$a_0 = 2m \quad \text{et} \quad b_0 = 0;$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le théorème dessous est un résultat de convergence ponctuelle (simple) pour les séries de Fourier.

4.2 Théorème de Dirichlet

Soient f une fonction T -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable par morceau sur $[a, b]$ et pour tout $x_0 \in [a, b]$, f admet des limites à droite et à gauche en x_0 , notées $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$. Alors, la série de fourier de f au point x_0 converge vers

- $f(x_0)$ si f est continue en x_0 .
- $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$ si f est discontinue en x_0 .

L'égalité de Parseval dite parfois théorème de Parseval est une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier.

4.3 Égalité de Parseval

Pour toute fonction f de F^T , on a la formule de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n)^2 = (a_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n)^2 + (b_n)^2}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T (f(x))^2 dx.$$

4.4 Applications

Exercice 22. Soit f une fonction 2π -périodique, définie par

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier associée à f .
3. Étudier la convergence de cette série.
4. Calculer $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
5. Dédurre $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

Corrigé. 1. Le graphe de f .

2. La série de Fourier associée à f .

f est une fonction paire, donc $b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Calcul de a_0 :

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi.$$

Calcul de a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx.$$

La calcul de a_n se fait par une intégration par parties, et on trouve :

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1).$$

· pour $n = 2p$, c-à-d n est pair, $a_{2p} = 0$

· pour $n = 2p + 1$, c-à-d n est impair, $a_{2p+1} = \frac{-4}{\pi(2p+1)^2}$.

finalement : La série de Fourier associée à f est

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)x). \end{aligned}$$

3. La convergence : On a

- f est continue sur $[-\pi, \pi]$;
- f est dérivable sur $[-\pi, \pi]$.

Donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier associée à f converge vers f

$$\forall x \in \mathbb{R} : S_f(x) = f(x).$$

4. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$S_f(x) = f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)x)$$

en particulier, pour $x = 0$

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Par l'égalité de Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx,$$

et comme $b_n = 0$ pour tout n , alors

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} (a_{2p+1})^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Exercice 23. Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = x^2$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$. En déduire la somme des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Corrigé. La fonction f est paire, ses coefficients en sinus sont nuls, et on a :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx.$$

La calcul de a_n se fait par une double intégration par parties, et on trouve :

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Maintenant, f est continue et \mathcal{C}^1 par morceaux : cette fonction est somme de sa série de Fourier pour tout réel, et on a donc, pour tout x dans $[-\pi, \pi]$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Si l'on fait $x = \pi$, on obtient :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

On obtient exactement :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on obtient cette fois :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Pour calculer la dernière somme demandée, il faut pouvoir mettre les coefficients au carré, et c'est ce que l'on obtient dans l'égalité de Parseval, que l'on peut appliquer ici puisque f est continue :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{16}{n^4}.$$

Ceci donne :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 24. Soit f la fonction périodique de période 2 vérifiant $f(x) = x - x^3$ pour tout $x \in]-1, 1]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f .
2. En déduire la somme de la série $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

Corrigé. 1. La fonction f est impaire. Les coefficients de Fourier en cosinus sont donc nuls. Pour calculer les

coefficients de Fourier en sinus, on utilise la formule et on réalise des intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \\
 &= 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \\
 &= \frac{-2}{\pi n} \int_0^1 (3x^2 - 1) \cos(n\pi x) dx \\
 &= \frac{12}{\pi^2 n^2} \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \\
 &= \frac{(-1)^{n+1} 12}{\pi^3 n^3}.
 \end{aligned}$$

2. Remarquons que la fonction f est continue et \mathcal{C}^1 -par morceaux. La continuité n'est pas complètement triviale. Elle vient de l'imparité de la fonction f qui fait qu'on a un recollement continu en 1. Ainsi, en tout réel, f est somme de sa série de Fourier. En particulier, en $\frac{1}{2}$, on a

$$\frac{3}{8} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Or, $\sin(n\frac{\pi}{2})$ est nul si n est pair. Si $n = 2p + 1$, alors $\sin(n\frac{\pi}{2}) = \sin(p\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^p$. On en déduit que

$$\frac{3}{8} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{12(-1)^p}{\pi^3 (2p+1)^3} \implies \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Exercice 25. Soit f la fonction impaire et 2π -périodique définie par $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ si $x \in]0, \pi[$, et soit g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

1. Déterminer les séries de Fourier de f et de g .

2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Corrigé. 1. On commence par remarquer que la fonction est \mathcal{C}^1 par morceaux (elle n'est pas continue en les points de $\pi\mathbb{Z}$) et est impaire, et donc les coefficients de Fourier en cosinus sont nuls. Pour calculer ceux en sinus, il suffit d'une simple intégration par parties, et on trouve que la série de Fourier de f est

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}.$$

Pour trouver la série de Fourier de g , on peut chercher la valeur de g sur un intervalle de longueur 2π puis intégrer... On peut aussi ruser de la façon suivante : on commence par remarquer que g est paire

(vérification facile). De plus, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} g(x) \cos(nx) dx &= \int_0^{2\pi} f(x+1) \cos(nx) dx - \int_0^{2\pi} f(x-1) \cos(nx) dx \\
 &= \int_{-1}^{2\pi-1} f(x+1) \cos(nx) dx - \int_{-1}^{2\pi+1} f(x-1) \cos(nx) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} f(u) \cos(nu-n) du - \int_0^{2\pi} f(u) \cos(nu+n) du \\
 &= \int_0^{2\pi} 2f(u) \sin(n) \sin(nu) du \\
 &= 2 \frac{\sin n}{n}.
 \end{aligned}$$

La série de Fourier de g est donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2 \sin n}{n} \cos(nx).$$

2. Puisque f est \mathcal{C}^1 par morceaux et qu'elle est continue en 1, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n} = f(1) = \frac{\pi-1}{2}.$$

D'autre part, g est continue par morceaux, 2π -périodique, on peut donc lui appliquer le théorème de Parseval, et on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(x))^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{4 \sin^2 n}{n^2}.$$

Reste à calculer l'intégrale. On commence par remarquer que g est paire et on se contente de calculer g sur $]0, \pi[$. Remarquons aussi que si $y \in]-\pi, 0[$, alors $f(y) = \frac{-\pi-y}{2}$. On a donc : si $x \in]0, 1[$, alors $x+1 \in]0, \pi[$ et $f(x+1) = \frac{\pi-x-1}{2}$. D'autre part, $x-1 \in]-\pi, 0[$ et $f(x-1) = \frac{-\pi-(x-1)}{2} = \frac{-\pi-x+1}{2}$. On a alors

$$g(x) = f(x+1) - f(x-1) = \frac{\pi-x-1 + \pi+x-1}{2} = \pi-1.$$

★ si $x \in]1, \pi-1[$, alors

$$g(x) = \frac{\pi-x-1}{2} - \frac{\pi-x+1}{2} = -1.$$

★ si $x \in]\pi-1, \pi[$ alors $f(x+1) = f(x+1-2\pi) = -f(2\pi-x-1) = \frac{\pi-x-1}{2}$ et on obtient

$$g(x) = -1.$$

On en déduit

$$\int_0^\pi (g(x))^2 dx = (-1+\pi)^2 + (\pi-1)(-1)^2 = \pi(\pi-1).$$

Revenant à l'identité de Parseval, on trouve

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2},$$

ce qui est bien l'égalité demandée.

Intégrales généralisées

En première année, on a étudié l'intégrale d'une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné de \mathbb{R} . Dans ce chapitre, on va étudier le cas d'une fonction continue sur un intervalle (a, b) ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) sans être continue sur $[a, b]$, par exemple

$$\int_0^1 \ln x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx, \dots$$

Ces intégrales sont appelées intégrale généralisée ou bien intégrale impropre.

Objectifs

- ★ Étudier la convergence d'intégrales dont une borne est infinie ou encore avec au moins une borne où la fonction n'est pas définie et a une limite infinie.
- ★ Calculer une intégrale généralisée.

5.1 Intégrales généralisées (impropres)

Définition 5.1.1

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite localement intégrable sur I , si elle est intégrable sur tout intervalle compact de I .

Exemple 5.1.1. La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 1, & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

est un exemple d'une fonction n'étant pas localement intégrable.

Définition 5.1.2

On dit que c est un point singulier pour la fonction f si elle n'est pas bornée en ce point i.e. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$.

Définition 5.1.3

Soit f une fonction définie sur $[a; b[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ($-\infty < a < b \leq +\infty$), localement intégrable sur $[a; b[$, on lui associe la fonction F définie sur $[a; b[$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} par

$$\forall x \in [a; b[; F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On dit que l'intégrale de f sur $[a; b[$ a un sens ou est convergente si et seulement si $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ existe.

Dans le cas contraire (la limite n'existe pas) on dit que l'intégrale de f sur $[a; b[$ n'a pas de sens ou est divergente.

On appelle cette limite l'intégrale généralisée de f sur $[a; b[$, noté $\int_a^b f(t) dt$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \int_a^b f(t) dt.$$

Exemples 5.1.1. 1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{2-t}$ n'est pas définie en 2. L'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{2-t} dt$ est généralisée. Soit

$$x \in [0; 2[$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{2-t} dt &= [-\ln(2-t)]_0^x \\ &= -\ln 2 + \ln(2-x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} -\infty. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{2-t} dt$ est divergente.

2. Soit l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, pour tout $x \in [1; +\infty[$ on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Définition 5.1.4

Soit f une fonction définie sur $]a; b[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ($-\infty \leq a < b < +\infty$), localement intégrable sur $]a; b[$, on lui associe la fonction F définie sur $]a; b[$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} par

$$\forall x \in]a; b[; F(x) = \int_x^b f(t) dt.$$

On dit que l'intégrale de f sur $]a; b[$ a un sens ou est convergente si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ existe.

Dans le cas contraire (la limite n'existe pas) on dit que l'intégrale de f sur $]a; b[$ n'a pas de sens ou est divergente.

On appelle cette limite l'intégrale généralisée de f sur $]a; b[$, noté $\int_a^b f(t) dt$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \int_a^b f(t) dt.$$

Exemples 5.1.2. 1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t+1}$ n'est pas définie en -1 . L'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{t+1} dt$ est généralisée. Soit

$x \in]-1; 0]$

$$\int_x^0 \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t+1)]_x^0 \\ = -\ln(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow -1} +\infty.$$

L'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{t+1} dt$ est divergente.

2. Soit l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^0 e^x dt$, pour tout $x \in]-\infty; 0]$ on a

$$\int_x^0 e^x dt = 1 - e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1.$$

donc $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^2}$ converge.

Définition 5.1.5

Soit f une fonction définie sur $]a; b[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$), localement intégrable sur $]a; b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a; b[$ est convergente, s'il existe $c \in]a; b[$, tel que les intégrales de f sur $]a; c]$ et $[c; b[$ convergent, on appelle $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ l'intégrale généralisée de f sur $]a; b[$, noté

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Exemple 5.1.2. $\int_0^1 \frac{1}{t-t^2} dt$ est une intégrale généralisée en 0 et 1.

Soit $c \in]0; 1[$, on a pour tout $x \in]0; c]$

$$\int_x^c \frac{1}{t-t^2} dt = \int_x^c \frac{1}{t(1-t)} dt \\ = \int_x^c \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ = [\ln t - \ln(1-t)]_x^c \\ = \ln c - \ln(1-c) - \ln x + \ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty,$$

alors $\int_0^c \frac{1}{t-t^2} dt$, est divergente, donc $\int_0^1 \frac{1}{t-t^2} dt$ est divergente.

5.2 Calcul pratique des intégrales généralisées

5.2.1 Intégration par parties

Proposition 5.2.1

Soient u et v deux fonctions définies sur $]a; b[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ($-\infty < a < b \leq +\infty$), de classe \mathcal{C}^1 sur $]a; b[$, tels que la limite de uv en b existe. Les intégrales

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt, \quad \int_a^b u(t)v'(t)dt,$$

sont de même nature, et on a

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \lim_{t \rightarrow b} (u(t)v(t)) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Démonstration. On a

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt,$$

comme l'intégrale est généralisée en b , alors pour tout $x \in [a; b[$

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x u'(t)v(t)dt,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(t)v(t)dt &= \lim_{x \rightarrow b} \left([u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t)dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \left(u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x u(t)v'(t)dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow b} (u(x)v(x)) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt, \end{aligned}$$

comme la limite de uv en b existe, les intégrales

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt, \text{ et } \int_a^b u(t)v'(t)dt,$$

sont de même nature. □

Exemple 5.2.1. La fonction $t \mapsto te^{-t}$ est continue sur $[0; +\infty[$. En utilisant une intégration par partie, en calculant la somme de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}dt,$$

on pose $u(t) = t$ et $v = e^{-t}$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} te^{-t}dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x te^{-t}dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où, l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 1.$$

5.2.2 Changement de variable

Proposition 5.2.2

Soit $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b[$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), et $\varphi : [\alpha; \beta[\rightarrow [a; b[$, une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et monotone sur $[\alpha; \beta[$ ($-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$), tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\lim_{x \rightarrow \beta} \varphi(x) = b$.

Alors les intégrales

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt,$$

sont de même nature, et en cas de convergence,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. Soient $x \in [a; b[$ et $y \in [\alpha; \beta[$, posons

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(y) = \int_{\alpha}^y f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx,$$

et montrons que

$$F(\varphi(y)) = G(y).$$

On a

$$\begin{aligned} F(\varphi(y)) &= \int_a^{\varphi(y)} f(t) dt \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(y)} f(t) dt \\ &= F(\varphi(y)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= \int_{\alpha}^y (F \circ \varphi)'(u) du \\ &= \int_{\alpha}^y F'(\varphi(u)) \varphi'(u) du \\ &= \int_{\alpha}^y f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \\ &= G(y), \end{aligned}$$

supposons que $\int_a^b f(t) dt$ converge, donc $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = l$,

$$\int_{\alpha}^y f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = F(\varphi(y)) = \int_a^{\varphi(y)} f(t) dt,$$

Comme $\lim_{y \rightarrow \beta} \varphi(y) = b$, en déduit que

$$\lim_{y \rightarrow \beta} \int_{\alpha}^{\varphi(y)} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = l,$$

l'intégrale $\int_{\alpha}^y f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$ converge.

Inversement, supposons que $\int_{\alpha}^y f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ converge, alors

$$\lim_{y \rightarrow \beta} \int_{\alpha}^y f(\varphi(u))\varphi'(u)du = l,$$

φ est continue et monotone sur $[\alpha; \beta[$, donc bijective et on a

$$\int_a^x f(t)dt = G(\varphi^{-1}(x)) = \int_{\alpha}^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du,$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)du = l,$$

donc $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Finalement en passant à la limite lorsque y tend vers β dans $F(\varphi(y)) = G(y)$, on obtient l'égalité

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

□

Exemple 5.2.2. *La nature de l'intégrale*

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}.$$

En utilisant le changement de variable $t = e^u$, $dt = ue^u du$ (φ est de classe \mathcal{C}^1 et strictement monotone sur

$[\ln 2; +\infty[$), on trouve que les intégrales

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t} \quad \text{et} \quad \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u},$$

ont la même nature, et comme

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u},$$

est divergente, alors

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t},$$

est divergente.

Proposition 5.2.3

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , localement intégrables sur $[a; b]$, si les intégrales généralisées

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^b g(t)dt,$$

convergent, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée

$$\int_a^b (f + \lambda g)(t)dt,$$

converge et on a

$$\int_a^b (f + \lambda g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. Soit $x \in [a; b]$

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + \lambda g)(t)dt &= \lim_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x (f + \lambda g)(t)dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x f(t)dt + \lambda \int_a^x g(t)dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt + \lim_{x \rightarrow b} \lambda \int_a^x g(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt. \end{aligned}$$

□

Proposition 5.2.4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

1. Soit $x \in]0; 1]$, on a

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (1 - x^{1-\alpha}), & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(x), & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{si } 1 - \alpha > 0 \\ +\infty, & \text{si } 1 - \alpha < 0 \end{cases}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe si et seulement si $\alpha < 1$, ainsi

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt,$$

est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

2. Pour $x \in [1; +\infty[$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (-1 + x^{1-\alpha}), & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x), & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{si } 1 - \alpha < 0 \\ +\infty, & \text{si } 1 - \alpha > 0 \end{cases}$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe si et seulement si $\alpha > 1$, ainsi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt,$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

□

Remarque 5.2.1. *L'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt,$$

est divergente, car on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt,$$

où

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge pour } \alpha < 1 \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge pour } \alpha > 1.$$

On vient de voir qu'une fois la primitive associée à l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(t) dt,$$

est explicitée alors on peut déduire la nature de cette intégrale, il suffit de calculer une limite de la primitive, mais malheureusement trouver l'expression de celle-ci, n'est pas toujours facile, par exemple le cas de la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ ou $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$. Comme pour les séries numériques, il faut concevoir d'autres critères qui nous permettent de déterminer la nature d'une intégrale généralisée.

5.3 Intégrale généralisée d'une fonction positive

Théorème 5.3.1: Majoration

Soit f une fonction définie sur $[a; b[$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$) à valeurs dans \mathbb{R}_+ et localement intégrable sur $[a; b[$. Alors la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

définie sur $[a; b[$ est croissante et l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction F est majorée. De plus, on a

$$\forall x \in [a; b[; \quad F(x) \leq \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. La fonction f étant positive sur $[a; b[$, alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

est croissante sur $[a; b[$, car pour tout $x \in [a; b[$, $F'(x) = f(x) \geq 0$.

Soit l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{F(x); x \in [a; b[\},$$

\mathcal{S} est non vide et admet une borne supérieure M . Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = M,$$

Comme M est une borne supérieure de \mathcal{S} ,

$$\forall x \in [a; b[; F(x) \leq M; \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0; \exists x_0 \in [a; b[; F(x_0) > M - \varepsilon,$$

comme F est croissante, alors

$$\forall x \in [x_0; b[; M - \varepsilon < F(x_0) < F(x) \leq M \leq M + \varepsilon,$$

ainsi

$$\forall x \in [x_0; b[; |F(x) - M| < \varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = M,$$

Pour la réciproque, supposons par l'absurde que $\int_a^b f(t)dt$ converge, et que F n'est pas bornée. Comme F est croissante, alors $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = +\infty$, d'autre part

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt = +\infty,$$

$\int_a^b f(t)dt$ diverge, ce qui est absurde, ainsi F est bornée. \square

Théorème 5.3.2: Comparaisons

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a; b[$ à valeurs réelles et localement intégrables sur $[a; b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$, supposons que pour tout $t \in [a; b[$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$.

1. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge.
2. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Démonstration.

1. Posons

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt \quad \text{et} \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt; \quad \forall x \in [a; b[.$$

Comme pour tout $t \in [a; b[$; $0 \leq f(t) \leq g(t)$, et F, G sont croissantes sur $[a; b[$, on a

$$\forall x \in [a; b[; \quad 0 \leq F(x) \leq G(x).$$

Donc, si G est majorée, F l'est également, d'après le théorème de majoration $\int_a^b f(t)dt$ converge.

2. Est la contraposée de 1..

\square

Théorème 5.3.3: d'équivalence

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a; b[$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ et localement intégrables sur $[a; b[$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), supposons $f \sim g$ au voisinage de b , alors les intégrales

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^b g(t)dt,$$

sont de même nature.

Démonstration. Comme $f \sim g$ au voisinage de b , il existe une fonction ε définie sur un voisinage $[\eta; b[$ de b vérifiant

$$\forall t \in [\eta; b[; \quad f(t)\varepsilon(t) = g(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow b} \varepsilon(t) = 1.$$

Donc il existe $\xi \in [\eta; b[$ tel que $\frac{1}{2} \leq \varepsilon(t) \leq 2$ ainsi

$$\forall t \in [\xi; b[; \quad \frac{f(t)}{2} \leq f(t)\varepsilon(t) = g(t) \leq 2f(t).$$

Alors, si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, l'intégrale $\int_\xi^b f(t)dt$ converge donc $\int_\xi^b 2f(t)dt$ converge, et d'après le théorème de comparaison $\int_\xi^b f(t)dt$ converge, $\int_a^b g(t)dt$ converge aussi.

Si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, $\int_\xi^b g(t)dt$ diverge donc l'intégrale $\int_\xi^b \frac{1}{2}g(t)dt$ diverge, d'où la divergence de $\int_\xi^b f(t)dt$ et de $\int_a^b f(t)dt$.

Par conséquent les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature. \square

Exemple 5.3.1. *La nature de l'intégrale généralisée*

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est positive et continue sur $]0; 1]$, et on a $e^{-t} \underset{0}{\sim} 1$, donc

$$\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t},$$

$\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge, alors $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ est divergente d'après le critère d'équivalence.

Corollaire 5.3.1: Critère de Riemann

Soient $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction localement intégrable, et $a > 0$,

1. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ pour tout $\alpha > 1$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ pour tout $\alpha \leq 1$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Démonstration. On utilise la définition de la limite et le théorème de comparaison avec l'intégrale de Riemann. \square

Théorème 5.3.4: Intégrale de Bertrand

Soient $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

1.

$$\text{L'intégrale } \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt \text{ converge } \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

2.

$$\text{L'intégrale } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} dt \text{ converge } \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

3.

$$\text{L'intégrale } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} dt \text{ converge } \Leftrightarrow \beta < 1$$

Démonstration.

1. Soient $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, prenons $\gamma \in]1; \alpha[$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln(t))^\beta} = 0,$$

d'après le corollaire précédent

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt,$$

converge. Soient $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln(t))^\beta} = +\infty,$$

alors l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt,$$

diverge. Si $\alpha = 1$, en utilise le changement de variable $t = e^u$, on obtient

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du,$$

$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du$ converge si et seulement si $\beta > 1$, alors

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt,$$

converge si et seulement si $\beta > 1$.

2. En utilisant le changement de variable $t = \frac{1}{u}$, on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} dt = \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha} (\ln(u))^\beta},$$

d'après 1.

$$\int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha} (\ln(u))^\beta},$$

converge si et seulement si $2 - \alpha > 1$ ou $2 - \alpha = 1$ et

$\beta > 1$, or

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} dt \text{ converge} \Leftrightarrow (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

3. Le développement limité de la fonction $\ln(x+1)$ au voisinage de 0 est

$$\ln(1+x) = x + o(x);$$

alors au voisinage de 1, on a

$$\ln t = \ln(1+t-1) = t-1 + o(t-1);$$

en déduit que

$$\frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} \underset{1}{\sim} \frac{1}{|t-1|^\beta},$$

en posons $t = u + 1$, on trouve

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{du}{|u|^\beta} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^\beta}.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^\beta},$$

sont de même nature, comme

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^\beta},$$

converge si et seulement si $\beta < 1$, alors l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} dt,$$

converge si et seulement si $\beta < 1$.

□

Exemple 5.3.2. *La nature de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Au voisinage de 0, on a

$$\frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} \underset{0}{\sim} t \ln t,$$

L'intégrale

$$\int_0^1 t \ln t dt,$$

converge, en effet une intégration par partie donne

$$\int_x^1 t \ln t dt = -\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4},$$

donc

$$\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt,$$

converge.

En $+\infty$ on a

$$\frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t \ln t}{t^{2\alpha}} = \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}},$$

comme

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} dt,$$

est une intégrale de Bertrand convergente si et seulement si $2\alpha - 1 > 1$, donc si et seulement si $\alpha > 1$, alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt,$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

5.4 Intégrale généralisée d'une fonction de signe quelconque

5.4.1 Convergence absolue

Définition 5.4.1

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a; b[$. On dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(t) dt,$$

converge absolument (ou absolument convergente) si

$$\int_a^b |f(t)| dt,$$

converge.

Exemple 5.4.1. On sait que

$$\left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2},$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$, alors l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt,$$

est absolument convergente pour tout $t \in [1; +\infty[$.

Proposition 5.4.1

Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente. En revanche, la réciproque est fautive.

5.4.2 Semi convergente

Définition 5.4.2

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a; b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est semi convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

Théorème 5.4.1: Critère de Cauchy

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a; b[$; ($-\infty < a < b \leq +\infty$), l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \eta \in [a; b[; \forall x, y \in [\eta; b[; \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, et posons

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

alors $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = l$

$$\exists \eta \in [a; b[; \forall x \in [\eta; b[; |F(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2};$$

pour tout $x, y \in [\eta; b[$

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y f(t)dt \right| &= |F(y) - l + l - F(x)| \\ &\leq |F(y) - l| + |F(x) - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 5.4.2: Critère d'Abel

Soient f et g deux fonctions définies localement intégrables sur $[a; b[$ telles que

1. f décroissante sur $[a; b[$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$.
2. $\exists M > 0$, tel que $\forall x, y \in [a; b[$ on ait

$$\left| \int_x^y g(t)dt \right| \leq M.$$

Alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge.

Démonstration. Soit $G : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

D'après le critère de Cauchy, afin de montrer que l'intégrale $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge, il suffit de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \alpha \in [a; b[; \forall x, y \in [\alpha; b[; \left| \int_x^y f(t)g(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Soient $x, y \in [\alpha; b[$, une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \int_x^y f(t)g(t)dt &= [f(t)G(t)]_x^y - \int_x^y f'(t)G(t)dt \\ &= f(y)G(y) - f(x)G(x) - \int_x^y f'(t)G(t)dt, \end{aligned}$$

ainsi

$$\left| \int_x^y f(t)g(t)dt \right| \leq |f(y)| |G(y)| + |f(x)| |G(x)| + \left| \int_x^y f'(t)G(t)dt \right|,$$

on a

$$\forall x; y \in [\alpha; b]; \left| \int_x^y g(t)dt \right| \leq M,$$

alors

$$|G(t)| = \left| \int_a^t g(u)du \right| \leq M,$$

on déduit que

$$\left| \int_x^y f(t)g(t)dt \right| \leq M \left(|f(x)| + |f(y)| + \int_x^y |f'(t)dt| \right),$$

comme f est décroissante et $\lim_{t \rightarrow b} f(t) = 0$, alors f est positive, $f'(t) \leq 0$, donc

$$\forall t \in [x; y]; |f'(t)| = -f'(t).$$

Alors

$$\left| \int_x^y f(t)g(t)dt \right| \leq M (f(x) + f(y) - f(y) + f(x)) = 2Mf(x),$$

ainsi $\lim_{t \rightarrow b} f(t) = 0$, donc

$$\exists \alpha \in [a; b]; \forall x \in [\alpha; b]; f(x) < \frac{\varepsilon}{2M},$$

puis

$$\forall x; y \in [a; b]; \left| \int_x^y f(t)g(t)dt \right| \leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

$\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge. □

Exemple 5.4.2. Soit $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Si $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge car pour tout $t \in [1; +\infty[$

$$\left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

2. Si $0 < \alpha \leq 1$, les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ et $t \mapsto \sin t$ sont continues sur $[1; +\infty[$ et donc localement intégrable,

et pour tout $x, y \in [1; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y g(t) dt \right| &= \left| \int_x^y \sin t dt \right| \\ &= |\cos x - \cos y| \\ &\leq |\cos x| + |\cos y| \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

D'après le critère d'Abel $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est convergente.

5.5 Fonctions définies par une intégrale

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On considère un intervalle semi-ouvert $J = [a; b[$ telle que $-\infty < a < b \leq +\infty$,

et une fonction de deux variables

$$\begin{aligned} f : I \times J \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto f(x, t). \end{aligned}$$

On suppose que $\lim_{x \rightarrow b} f(x, t) = \infty$, ainsi l'intégrale $\int_a^b f(x, t) dt$ est une intégrale généralisée dépendant du paramètre x . Donc le premier problème posé est celui de la convergence d'une famille d'intégrales généralisées : on est amené à déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquels $\int_a^b f(x, t) dt$ converge, dit ensemble de définition de la fonction

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt,$$

si pour tout $x \in J$, $\int_a^b f(x, t) dt$ converge, on dit que F est une fonction définie par une intégrale généralisée. Le but de cette partie est l'étude de la continuité et de la dérivabilité de cette fonction.

5.5.1 Propriétés d'une fonction définie par une intégrale généralisée

Théorème 5.5.1: de continuité

Soit $f : I \times [a; b[\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction $g : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. L'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ converge.
2. $\forall (x; t) \in I \times [a; b[; |f(x; t)| \leq g(t)$.

Alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(x; t) dt$ est continue sur I , et pour tout $x_0 \in I$ on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(x; t) dt = \int_a^b \lim_{x \rightarrow x_0} f(x; t) dt = \int_a^b f(x_0; t) dt.$$

Théorème 5.5.2: de dérivation

Soit $f : I \times [a; b[\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$), une fonction continue. On suppose que la dérivée partielle de f par rapport à x existe et que $\frac{\partial f}{\partial x} : I \times [a; b[\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. On suppose qu'il existe des fonctions $g, h : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que

1. Les intégrales généralisées $\int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b h(t)dt$ convergent.
2. $\forall (x; t) \in I \times [a; b[; |f(x; t)| \leq g(t)$.
3. $\forall (x; t) \in I \times [a; b[; \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x; t) \right| \leq h(t)$.

Alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(x; t)dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et on a

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^b f(x, t)dt \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

5.6 Applications**5.6.1 Fonction Gamma d'Euler**

On appelle fonction d'Euler l'application

$$\begin{aligned} \Gamma :]0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge pour tout x strictement positif, en effet

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente car pour tout $x \in [1; +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t^n t^{x-1} e^{-t} = 0$. Pour tout $x \in]0; 1[$

$$t^{x-1} e^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}},$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$ est convergente car $1 - x < 1$, d'où la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$.

Propriétés 5.6.1

Pour tout $x \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$,

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En particulier $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.
2. $\Gamma(x+n+1) = x(x+1) \cdots (x+n-1)\Gamma(x)$.
3. $\Gamma(n) = n!$.
4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
5. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.
6. $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^n t^{x-1} dt$.
7. $\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} (1 + \varepsilon(x))$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ (Formule de Stirling).
8. la fonction composée $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* .

Démonstration.

$$1. \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

On a

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt;$$

alors

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt;$$

on utilisant une intégration par parties

$$\Gamma(x+1) = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt;$$

d'où

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

□

5.6.2 Fonction Bêta d'Euler

La fonction bêta d'Euler est définie par

$$\beta(x, y) = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt;$$

où x et y sont des réels strictement positifs.

Au voisinage de 0,

$$t^{x-1} (1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{x-1}};$$

$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$, converge pour $x > 0$.

Au voisinage de 1,

$$t^{x-1} (1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{y-1}};$$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$, converge pour $y > 0$.

Ainsi $\beta(x, y)$ converge si $x > 0$ et $y > 0$.

Propriétés 5.6.2

Pour tout $x; y > 0$

1. $\beta(x; y) = \beta(y; x)$.
2. $\beta(x; y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
3. $\beta(x; y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$.
4. La formule de réflexion d'Euler, ou formule des compléments. Si $x \notin \mathbb{Z}$

$$\Gamma(x; 1-x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

En remarquant d'abord que $\Gamma(1-z)\Gamma(z)$ est 2-périodique et a les mêmes pôles et résidus que $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Résumé. Pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée de f sur un intervalle I , on commence par trouver tous les points de I où il y a problème, vérifier si se sont de vraies singularités et séparer l'intégrale en plusieurs de sorte que chacune ne comprend qu'une singularité ou bien une seule borne infinie.

- ★ Si f est positive sur (a, b) , on applique les critères de comparaisons.
- ★ Si f n'est pas de signe constant,
 - On essaye de montrer la convergence absolue, si l'intégrale ne converge pas absolument, ça ne veut rien dire.
 - Appliquer le critère d'Abel.
 - Utiliser l'intégration par parties.
 - Utiliser un changement de variables.
 - Utiliser un développement limité ou asymptotique, prendre un ordre suffisamment grand pour que le reste donne naissance à une intégrale absolument convergente (en intégrale de Riemann ou d'une fonction de signe constant).

5.7 Exercices

Exercice 26. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{lll}
 1. \int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt & 2. \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt & 3. \int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x} dx \\
 4. \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} & 5. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1} &
 \end{array}$$

Corrigé. 1. La fonction $t \mapsto \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0, 1]$, de plus, on a

$$\left| \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq 1,$$

Puisque $\int_0^1 1 dt$ converge (ce n'est même pas une vraie intégrale impropre), on en déduit que

$$\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

est aussi convergente.

2. Ici, on ne connaît pas de primitive de e^{-t^2} qui s'exprime facilement à l'aide des fonctions usuelles (en fait, c'est même impossible). On doit donc comparer. Commençons par remarquer que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale ne se pose donc qu'au voisinage de $+\infty$. Mais il est facile de voir que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0,$$

Autrement dit, $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, puisque $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, il en est de même de

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

3. Là encore, on va majorer, et on va même prouver que l'intégrale est absolument convergente. Pour cela, on remarque que, pour $x \geq 0$,

$$|xe^{-x} \sin x| \leq xe^{-x}.$$

D'autre part, puisque $x^3 e^{-x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, on en déduit que

$$xe^{-x} \sin x = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi, l'intégrale est absolument convergente.

4. En 1, la fonction est équivalente à $\frac{1}{1-t}$, fonction de signe constant dont l'intégrale est divergente (en 1).

Ainsi, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}},$$

diverge.

5. La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, 1]$. En 0, $\frac{1}{e^t - 1}$ est équivalent à $\frac{1}{t}$. Par comparaison à une intégrale de Riemann divergente,

$$\int_0^1 \frac{dt}{e^t - 1},$$

est divergente. A fortiori,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1},$$

est divergente.

Exercice 27. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on souhaite déterminer la nature de

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

1. On suppose $\alpha > 1$. En comparant avec une intégrale de Riemann, démontrer que l'intégrale étudiée est convergente.

2. On suppose $\alpha = 1$. Calculer, pour $X > e$, $\int_e^X \frac{dx}{x (\ln x)^\beta}$. En déduire les valeurs de β pour lesquelles l'intégrale converge.

3. On suppose $\alpha < 1$. En comparant à $\frac{1}{t}$, démontrer que l'intégrale étudiée diverge.

Corrigé. 1. Soit $\xi \in]1, \alpha[$. Alors, on a

$$\frac{t^\xi}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{\alpha-\xi} (\ln x)^\beta} \longrightarrow 0;$$

et donc, en notant f la fonction, on a

$$f(t) = +\infty o\left(\frac{1}{t^\xi}\right).$$

Puisque $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\xi}$ converge, il en est de même de $\int_e^{+\infty} f$.

2. Si $\alpha = 1$, alors la fonction est de la forme $u'u^{-\beta}$. Elle admet donc une primitive de la forme $\frac{1}{-\beta+1}u^{-\beta+1}$ si $\beta \neq 1$, et de la forme $\ln |\ln u|$ si $\beta = 1$. Pour $\beta \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_e^X \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} &= \left[\frac{1}{-\beta+1} (\ln t)^{-\beta+1} \right]_e^X \\ &= \frac{1}{-\beta+1} ((\ln X)^{-\beta+1} - 1) \end{aligned}$$

Lorsque X tend vers $+\infty$, ceci admet une limite finie si et seulement si $\beta > 1$. Dans le cas où $\beta = 1$, la primitive se calcule un peu différemment :

$$\int_e^X \frac{dt}{t \ln t} = \ln \ln X.$$

Ceci tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale n'est pas convergente.

3. On remarque que

$$\frac{1}{f(t)} = t^{\alpha-1} (\ln t)^\beta \longrightarrow 0;$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{t} = o(f(t)).$$

Puisque $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\int_e^{+\infty} f(t)dt$. En conclusion, l'intégrale étudiée converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Bibliographie

- [1] K. Allab, Éléments d'analyse, Tome 1 et 2., O.P.U, 2007.
 - [2] J. Rivaud, Analyse, Séries, équations différentielles-Exercices avec solutions, Vuibert, 1981.
 - [3] C. Deschamps, F. Moulin, A. Warusfel N. Cleirec, Y. Gentric, F. Lussier, C. Mullaert, S. Nicolas, M. Volker, Mathématiques tout-en-un, Dunod, 2016, 5 rue Laromiguière, 75005 Paris.
 - [4] J.P. Ramis, A. Warusfel, X. Buff, E. Halberstadt, F. Moulin, M. Ramis, J. Sauloy, Mathématiques tout-en-un pour la Licence, 2^e édition, Dunod, 2007, 2014 5 rue Laromiguière, 75005 Paris.
 - [5] E. Azoulay, J. Avignant, Analyse Mathématiques, Tome 1., McGraw- Hill, 1983.
 - [6] Y. Bougrouv, S. Nikolsk, Cours de mathématiques supérieures, Tome 1., Mir, Moscou, 1983.
 - [7] C. Servien, Séries numériques, suites et séries de fonctions, Intégrales, Ellipses, 1995.
-