

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN-TIARET



FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES
ET DE L'INFORMATIQUE

Cours d'analyse complexe

2^{ème} Année LMD

Mathématiques et Informatique

Réalisé par

Dr **Souhila Sabit**

Expertisé par :

Pr **Benouda Hedia** - Université Ibn Khaldoun, Tiaret.

Pr **GHEZAL Abderrezak** - Université Kasdi Merbah de Ouargla .

Pr **LAZREG Jamal Eddine** - Université Djillali LIABES Sidi-Bel-Abbès.

2023

Table des matières

Table des matières	1
1 Topologie dans le plan complexe	9
1.1 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes	9
1.1.1 Construction de \mathbb{C}	9
1.1.1.1 Propriétés des opérations sur \mathbb{C} [6, 9, 10]	10
1.1.2 Conjugés[6, 9, 10]	10
1.1.2.1 Proposition : propriétés de la conjugués	10
1.1.3 Le plan complexe	11
1.1.4 Module d'un nombre complexe , inégalités triangulaire :	11
1.1.4.1 Proposition : inégalités triangulaires	12
1.1.5 Argument d'un nombre complexe	13
1.1.5.1 Proposition : écriture sous forme trigonométrique des nombre complexes	13
1.1.5.2 Proposition : forme exponentielle[1, 6]	13
1.1.6 Les racines $N^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe	15
1.2 L'infini en analyse complexe.	15
1.3 Exercices	16
1.4 Solutions	17
2 Fonction de la variable complexe	23
2.1 Les fonctions	23
2.1.1 La continuité	23
2.1.2 La dérivabilité	23
2.1.3 Fonctions holomorphes	24
2.1.4 Fonction analytique :	25
2.1.5 Équivalence entre les fonctions analytiques et les fonctions holomorphes :	27
2.2 Fonctions harmoniques	29
2.3 Exercices	30
2.4 Solutions	31
3 Fonction élémentaires	39
3.1 Fonction Exponentielle[6]	39
3.2 Fonction Logarithme[6]	39
3.3 Fonctions Circulaires[6]	39
3.4 Fonctions Hyperboliques	40
3.5 Fonctions Puissances[6]	40
3.6 Exercices	41
3.7 Solutions	42

4	Calcul intégral	43
4.1	ARCS et chemins	43
4.1.1	Définition : Chemin	43
4.1.2	Définition : Homotopie[6, 8, 9]	43
4.1.3	Définition : (arc simple)[2, 5, 10]	43
4.1.4	Définition : (arc opposé)	44
4.1.5	Définition : (γ de classe C^1 par morceaux)	44
4.1.6	Définition : (arc équivalent)[3, 4, 9]	44
4.1.7	Exemple importants des chemins :	44
4.2	Intégrale curviligne(Intégration complexe)	45
4.3	Formules d'intégrales de Cauchy[5, 8, 9]	47
4.3.1	Théorème de Cauchy	48
4.4	Formule de la moyenne	49
4.4.1	Primitive	49
4.4.1.1	Une autre conséquence du théorème de Cauchy[6, 8, 9, 10]	49
4.5	Inégalité de Cauchy	49
4.6	Théorème de Liouville	50
4.7	Théorème de Morera	50
4.8	Exercices	50
4.9	Solutions	51
5	Développement en Série Taylor et en Série de Laurent	57
5.1	Développement en séries de Taylor	57
5.2	Séries de Laurent et Résidus	57
5.3	Les couronnes	57
5.4	Série de Laurent	58
5.4.1	Les points singuliers	59
5.5	Exercices	61
5.6	Solutions	61
6	Théorème des résidus et ses applications	63
6.1	Théorèmes des Résidus	63
6.2	Résidu en un point singulier isolé	64
6.2.1	Calcul pratique de résidus	64
6.3	Les lemmes de Jordan[3, 8, 9]	65
6.3.1	Lemme 1	65
6.3.2	Lemme 2	66
6.3.3	Lemme 3	66
6.4	Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$:	66
6.5	Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$:	68
6.6	Calcul des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx$:	70
6.7	Calcul des intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $-1 < \alpha < 0$	72
6.8	L'intégrale sous forme $\int_a^b f(x) dx$ avec a, b des point singuliers de f :	75
6.9	Principe de l'argument	79

6.10 Théorème de Rouché[1]	79
6.11 Exercices	80
6.12 Solutions	84
Bibliographie	101
Table des figures	103

Introduction

Les premiers résultats mathématiques qui a été estimées par les humains c'était les chiffres ,et on travaillé dur pour développer l'ensemble des nombres réels, ce dernier qui ne couvre pas lanécessité pour les mathématiciens au cours de recherche des solutions aux problèmes sur les équations du second degré avec son delta négatifs, tels que : $x^2 + 2 = 0$

Les mathématiciens sont obligé de chercher de nouveaux moyens de couvrir l'insuffisance dans l'ensemble des nombres réels, a été le résultat de recherche est l'accès au nouveau numéro appelé plus tard le nombre complexe, où l'idée de cette question a conduit à l'expansion de la gamme des nombres réels d'un groupe peuvent être obtenues dans laquelle les solutions aux équations mentionnées ci-dessus, il a appelé le numéro de groupe complexe (ou composite), ils sont généralisés l'analyse et faciliter les intégrations complexes, pour tomber tout cela dans un domaine indépendant, celle de l'analyse complexe, qui est devenu une partie essentielle de la nécessité quotidienne, des ingénieurs, des physiciens ...,

Parmi les questions abordées par l'analyse complexe, l'intégrales réels qui a toujours été un obstacle dans la voie des mathématiciens et physicien.

Mais avant d'entrer dans le coeur de la question dont il est détendu intégration utilisant l'intégration de notre rapport, nous devons d'abord connaître les propriétés des nombres complexes, nous allons examiné dans le premier chapitre, la construction de \mathbb{C} , la forme algébrique et la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Ensuite dans le deuxième chapitre, les Fonction de la variable complexe qui contient une définition de la fonction de la variable complexe, les fonctions holomorphes, fonctions analytiques, les condition de Cauchy-Riemann et les fonctions harmoniques. Troisième chapitre est les fonctions élémentaires : fonction exponentielle, fonction logarithme, fonctions circulaires, fonctions hyperboliques et fonctions puissances.

Le Calcul intégral est le quatrième chapitre qui contient intégrale curviligne, théorème de Cauchy, formule intégrale de Cauchy, formule de la moyenne, formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, inégalité de Cauchy et théorème de Liouville-Théorème de Morera.

Ensuite le cinquième chapitre est développement en série Taylor et en série de Laurent :

1. Développement en séries de Taylor.
2. Développement en série de Laurent.
3. Singularité isolées d'une fonction complexe .

Enfin sixième chapitre est théorème des résidus et ses applications qui contient théorème des résidus, calcul des résidus, applications au calcul intégral et à la sommation des séries, principe de l'argument et théorème de Rouché et conclusion de ce cours.

Chapitre 1

Topologie dans le plan complexe

1.1 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes

1.1.1 Construction de \mathbb{C}

Définition 1.1. [1, 5, 6, 8]

On appellerons corps des nombres complexes, et notons \mathbb{C} , l'ensemble \mathbb{R}^2 muni des deux lois internes \oplus et \otimes définies ainsi :

Pour tout $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$ on pose :

$$\begin{aligned}(a, b) \oplus (a', b') &= (a + a', b + b') \\ (a, b) \otimes (a', b') &= (aa' - bb', ab' + a'b)\end{aligned}$$

Remarque 1.1. \mathbb{C} est corps commutatif.

Notation 1.1.

Pour simplifier les écritures, nous écrivons $+$ et \times à la place des lois de composition les internes \oplus et \otimes .

Pour tout nombre réel a , nous convenons d'identifier le nombre $(a, 0)$ avec le réel a . Nous noterons ailleurs i le nombre complexe $(0, 1)$.

Appliquant cette convention et utilisant la définition de l'addition et de la multiplication dans \mathbb{C} , on peut écrire pour tout nombre complexe (a, b) :

$$(a, b) = a + ib$$

En effet :

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

Par ailleurs

$$(0, b) = (b, 0) \times (0, 1) = ib$$

Donc :

$$(a, b) = a + ib.$$

1.1.1.1 Propriétés des opérations sur \mathbb{C} [6, 9, 10]

Avec les convention d'écritures précédentes, l'addition et la multiplication sont définies sur \mathbb{R}^2 deviennent

$\forall z \in \mathbb{C}, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $z = a + ib$, $\forall z' \in \mathbb{C}, \exists (a', b') \in \mathbb{R}^2$ avec $z' = a' + ib'$,

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Notation 1.2. *On note :*

(i) La valeur a est le réel de z i.e $a = \text{Re}(z)$

(ii) La valeur b est imaginaire de z i.e $b = \text{Im}(z)$

Proposition 1.1. *Soient a, a', b et b' des réels on a :*

(i) $a + ib = 0 \iff a = b = 0$

(ii) $a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'$

Proposition 1.2. (i) z réel si est seulement si $\text{Im}(z) = 0$

(ii) z imaginaire pur si est seulement si $\text{Re}(z) = 0$

1.1.2 Conjugués[6, 9, 10]

Définition 1.2.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ou $a \in \mathbb{R}, b \in \mathfrak{R}$, un nombre complexe, on appelle le conjugué de z complexe noté \bar{z} , le nombre complexe

$$\bar{z} = a - ib$$

Proposition 1.3. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :*

(a) $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

b) $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

c) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

d) $\overline{\bar{z}} = z$

e) un nombre complexe z est réel si est seulement si $\bar{z} = z$ et imaginaire pur si est seulement si $\bar{z} = -z$

1.1.2.1 Proposition : propriétés de la conjugués

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$

i) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

ii) $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$

iii) si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

1.1.3 Le plan complexe

En mathématiques, le plan complexe (encore appelé plan de Cauchy) désigne un plan dont chaque point est la représentation graphique d'un nombre complexe unique.

On associe en général le plan complexe à un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct.

Dans un tel repère, tout point M est l'image d'un unique nombre complexe z qui est appelé affixe de cet unique point. On note $M(z)$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z = a + ib$ (où a et b sont des réels), on a la relation $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On peut ainsi dire que la partie réelle de z est l'abscisse de M et que la partie imaginaire de z en est son ordonnée.

D'après cette égalité, tous les points de l'axe $(O; \vec{u})$ sont tels que la partie imaginaire de leur affixe est nulle : leur affixe est donc un nombre réel. En conséquence, on appelle l'axe $(O; \vec{u})$ axe des réels.

De la même façon, tous les points de l'axe $(O; \vec{v})$ sont tels que la partie réelle de leur affixe est nulle : leur affixe est donc un nombre imaginaire pur. En conséquence, on appelle l'axe $(O; \vec{v})$ axe des imaginaires.

1.1.4 Module d'un nombre complexe , inégalités triangulaire :

Définition 1.3. [2, 7, 11]

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathfrak{R}$ et M son image dans le plan complexe.

Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est un nombre positif, qu'est la distance OM avec $M(a, b)$

alors : $z = a + ib$, donc $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$

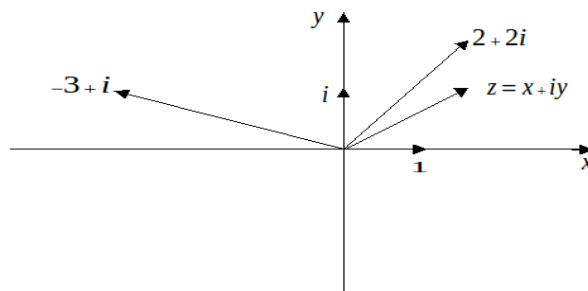


FIGURE 1.1 – Le plan complexe

Proposition 1.4. soit $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z|^2 = |z| \cdot |\bar{z}|$$

Démonstration 1.1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ou $a, b \in \mathbb{R}$ et soit M l'image de M dans P alors on sait que :

$$|z|^2 = \|\overrightarrow{OM}\|^2 = a^2 + b^2$$

Par ailleurs

$$z\bar{z} = (+ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Proposition 1.5. Pour tout nombre complexe z

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z| = |\bar{z}|$
3. $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$
4. $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$

Démonstration 1.2. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ou $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $|z| = 0$ alors $a^2 + b^2 = 0$ ce que n'est possible que si $a = b = 0$. Réciproquement si $z = a + ib$ est tel que $a = b = 0$ alors nécessairement $|z| = 0$
Il est clair que si $z = a + ib$ alors

1. $Re(z) = a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
2. $Im(z) = b \leq |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

1.1.4.1 Proposition : inégalités triangulaires

Pour tout nombre complexes z et z' on a :

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
3. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$
4. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Les inégalités (2) et (4) sont appelées inégalités triangulaires

Proposition 1.6. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, soit A le point du plan d'affixe a l'ensemble des point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

1. $|z - a| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r .

2. $|z - a| \leq r$ est le disque fermé de centre A et de rayon r .
3. $|z - a| < r$ est le disque ouvert de centre A et de rayon r .

Démonstration 1.3. Ces trois résultats proviennent de l'équivalence suivante :

$$|z - a| = r \Leftrightarrow AM = r$$

1.1.5 Argument d'un nombre complexe

1.1.5.1 Proposition : écriture sous forme trigonométrique des nombre complexes

Si z un nombre complexe non nul alors, il existe un ρ tel que $\rho = |z|$ et au moins un nombre réel θ noté l'argument tel que

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\rho}$$

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\rho}$$

alors

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

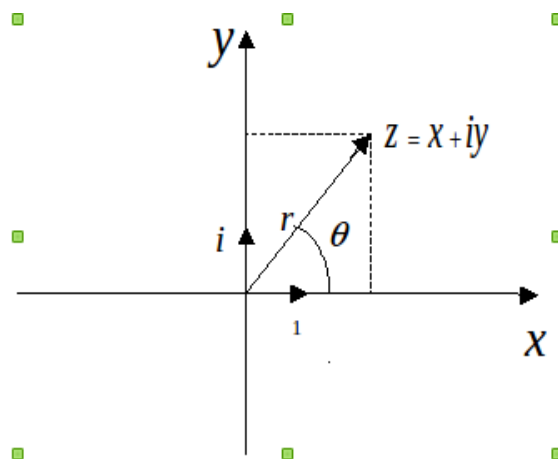


FIGURE 1.2 – Argument d'un nombre complexe

1.1.5.2 Proposition : forme exponentielle[1, 6]

a) Soient $z \neq 0$ avec $\rho = |z|$ et l'argument θ tel que

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\rho}$$

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\rho}$$

Alors la forme exponentielle de z est $z = \rho e^{i\theta}$

L'argument de z , un tel nombre n'est pas unique :

Si θ_0 est un argument de z , l'ensemble de tous les arguments de z est donné par :

$$\{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\arg(z) = \theta_0 [2\pi]$$

θ_0 est l'argument principal de z

b) Soit deux nombres complexes $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ ou $\rho, \rho' \in \mathbb{R}^+$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

On a :

1. $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$.
2. $\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$, si $z' \neq 0, z \neq 0$.

Corollaire 1.1. Soient z et z' deux nombre complexes on a :

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') ([2\pi])$
2. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') ([2\pi])$, si $z' \neq 0$
3. $\arg(\bar{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) ([2\pi])$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}^* \quad \arg(z^n) = n \arg(z)$

Démonstration 1.4. Soient $z = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}, z' = \rho' e^{i(\theta'+2k'\pi)}, k, k' \in \mathbb{Z}$ avec $\arg(z) = \theta$ et $\arg(z') = \theta'$.

1.

$$zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta'+2k''\pi)}, k'' \in \mathbb{Z}$$

Donc $\arg(zz') = \theta + \theta' + 2k''\pi$.

2.

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta'+2k''\pi)}, k'' \in \mathbb{Z}$$

Donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' + 2k''\pi$.

3. On a $z\bar{z} = \rho^2$, donc $\bar{z} = \frac{\rho^2}{z}$, alors

$$\bar{z} = \rho e^{i(-\theta-2k\pi)}$$

Donc $\arg(\bar{z}) = -\theta + 2k''\pi, k'' \in \mathbb{Z}$.

On a $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{i(-\theta-2k\pi)}$, donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta + 2k''\pi = \arg(\bar{z}), k'' \in \mathbb{Z}$.

4. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$.

On a $z = \rho e^{i\theta}$ ou $\theta \in \mathbb{R}$

On a donc $z^n = (\rho e^{i\theta})^n$

$$= \rho^n (e^{i\theta})^n$$

$$= \rho^n e^{in\theta}$$

Par conséquent $\arg(z^n) = n\theta = n \arg(z)$

La formule de Moivre :

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

1.1.6 Les racines $N^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $z = r e^{i(\theta + 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$ alors

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n e^{i(n\theta + 2kn\pi)}}$$

Donc il y a n racines de z

$$z_k = r e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

1.2 L'infini en analyse complexe.

Le plan achevé $\bar{\mathbb{C}}$ s'obtient du plan complexe \mathbb{C} par adjonction d'un point ∞ à l'infini :

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \infty$$

Par définition,

$$z_n \rightarrow \infty \quad \text{si et seulement si} \quad |z_n| \rightarrow +\infty$$

Ainsi

$$z_n \rightarrow \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{1}{z_n} \rightarrow 0$$

et

$$z_n \rightarrow \infty \text{ et } w_n \rightarrow a \quad \Rightarrow \quad z_n + w_n \rightarrow \infty$$

et

$$z_n \rightarrow \infty \text{ et } w_n \rightarrow a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z_n w_n \rightarrow \infty$$

1.3 Exercices

Exercice 1.1. 1. *Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :*

$$a) \frac{1-2i}{1+2i}, \quad b) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10}, \quad c) (1+i\sqrt{3})^5$$

2. *Calculer les racines 5^{ème} des nombres suivants :*

$$a) i, \quad b) 1, \quad c) 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

3. *Calculer les valeurs principale des nombres suivants dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$:*

$$a) \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), \quad b) 1+i, \quad c) -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Exercice 1.2. 1. *Trouver z_1 et z_2 les deux solution de système suivant :*

$$\begin{cases} iz_1 + 2z_2 = 1 + 9i \\ 2z_1 + iz_2 = -2 + 8i \end{cases}$$

2. *Montrer que $z_2 - z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$*

3. *Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$*

Exercice 1.3. *Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble \mathcal{C} :*

$$\begin{array}{rclcl} -z^2 & -(5-i)z & +8-i & = & 0 \\ z^2 & -4(1-i)z & +2(4-i) & = & 0 \\ z^4 & -4z^2 & -77 & = & 0 \end{array}$$

1.4 Solutions

Solution Ex 1.1

1. a)

$$\begin{aligned}\frac{1-2i}{1+2i} &= \frac{(1-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\ &= \frac{1-4i+(2i)^2}{1-4-4i} \\ &= \frac{1+4-4i}{1-4-4i} \\ &= \frac{-3-4i}{-3-4i} \\ &= \frac{-3}{-3} - \frac{4}{-4}i \\ &= \frac{3}{3} - \frac{4}{4}i \\ &= 1 - i\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} \times (1+i)^{10} \\ &= \frac{1}{2^5} \times [(1+i)^2]^5 \\ &= \frac{1}{2^5} \times (2i)^5 \\ &= \frac{32i^5}{2^5} \\ &= \frac{32}{2^5}(i)^5 \\ &= (i)^4 \times i \\ &= i\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^5 &= \left(2\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\right)^5 \\ &= 2^5 \left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right] \\ &= 2^5 \left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 32 \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 32 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 16 - 16\sqrt{3}i\end{aligned}$$

2. On calcule les racine 5^{ème} des nombres suivants :

a) $i = |i| = 1$ et $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

alors $i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$ Donc

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{z} &= (i)\sqrt[5]{5} \\ &= e^{i(\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5})} \end{aligned}$$

Donc :

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{10}i}, z_1 = i, z_2 = e^{\frac{9\pi}{10}i}, z_3 = e^{\frac{13\pi}{10}i}, z_4 = e^{\frac{-3\pi}{10}i}$$

b) $1 = e^{2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\sqrt[5]{z} = e^{\frac{2k\pi}{5}i}$$

Donc

$$z_0 = 1, z_1 = e^{\frac{2\pi}{5}i}, z_2 = e^{\frac{4\pi}{5}i}, z_3 = e^{\frac{6\pi}{5}i}, z_4 = e^{\frac{8\pi}{5}i}$$

c) $|2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i| = 4$ et $\arg(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Alors

$$\sqrt[5]{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i} = \sqrt[5]{4}e^{\frac{\pi}{20}i + \frac{2k\pi}{5}i}$$

Donc

$$z_0 = \sqrt[5]{4}e^{\frac{\pi}{20}i}, z_1 = \sqrt[5]{4}e^{\frac{9\pi}{20}i}, z_2 = \sqrt[5]{4}e^{\frac{17\pi}{20}i}, z_3 = \sqrt[5]{4}e^{\frac{5\pi}{4}i}, z_4 = \sqrt[5]{4}e^{\frac{33\pi}{20}i}$$

3. Les valeurs principale des nombres suivants dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$

a) $(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2})$

On a $|\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}| = 1$ et

$$\begin{aligned} \arg(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}) &= \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < \pi \\
\Rightarrow & -1 \leq \frac{2}{3} + 2k < 1 \\
\Rightarrow & -1 - \frac{2}{3} \leq 2k < 1 - \frac{2}{3} \\
\Rightarrow & \frac{-5}{3} \leq 2k < \frac{1}{3} \\
\Rightarrow & \frac{-5}{6} \leq k < \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Alors $k = 0$ et donc la valeurs principal est

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

b) $1 + i$

On a $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
& -\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi \\
\Rightarrow & -1 \leq \frac{1}{4} + 2k < 1 \\
\Rightarrow & \frac{-5}{4} \leq 2k < \frac{3}{4} \\
\Rightarrow & \frac{-5}{8} \leq k < \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

alors $k = 0$ et donc la valeurs principal est

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

c) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

On a $|z| = 2$ et $\arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
& -\pi \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < \pi \\
\Rightarrow & -1 \leq \frac{5}{4} + 2k < 1 \\
\Rightarrow & \frac{-9}{4} \leq 2k < \frac{-1}{4} \\
\Rightarrow & \frac{-9}{8} \leq k < \frac{-1}{8}
\end{aligned}$$

alors $k = -1$ et donc la valeurs principal est

$$2\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$$

Solution Ex 1.2

1.

$$\begin{cases} iz_1 + 2z_2 = 1 + 9i \times 2 \\ 2z_1 + iz_2 = -2 + 8i \times -i \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} 2iz_1 + 4z_2 = 2 + 18i \\ -2iz_1 + z_2 = 2i + 8 \end{cases}$$

Donc $5z_2 = 10 + 20i$, donc $z_2 = 2 + 4i$, on remplace cette valeurs dans la deuxième équation

$$2z_1 + i(2 + 4i) = -2 + 8i, \text{ alors } 2z_1 = 2 + 6i, \text{ donc } z_1 = 1 + 3i$$

2. $z_2 - z_1 = 1 + i$, d'autre part

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) &= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right) \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}+3+1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1+3-\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= 1 + i \\ &= z_2 - z_1 \end{aligned}$$

3. On a $1 + i = e^{i\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$ Alors

$$\begin{aligned} \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} &= e^{i\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \\ \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{6}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \\ \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{12}} &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Solution Ex 1.3

Solution des équation

1) $-z^2 - (5 - i)z + (8 - i) = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (5 - i)^2 + 32 - 4i \\ &= 25 - 1 - 10i + 32 - 4i \\ &= 56 - 14i\end{aligned}$$

On a $\Delta = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\Delta) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \\ 2xy = \operatorname{Im}(\Delta) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 56 \\ x^2 + y^2 = 14\sqrt{17} \\ 2xy = -14 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}2x^2 &= 56 + 14\sqrt{17} & \text{et} & \quad 2y^2 = -56 + 14\sqrt{17} \\ \Rightarrow x^2 &= 28 + 7\sqrt{17} & \text{et} & \quad y^2 = -28 + 7\sqrt{17} \\ \Rightarrow x &= \pm \sqrt{28 + 7\sqrt{17}} & \text{et} & \quad y = \pm \sqrt{-28 + 7\sqrt{17}}\end{aligned}$$

Donc Δ à deux racines carrés symétriques δ_1 et δ_2 . Alors

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -\sqrt{28 + 7\sqrt{17}} + i\sqrt{-28 + 7\sqrt{17}} \\ \delta_2 &= \sqrt{28 + 7\sqrt{17}} - i\sqrt{-28 + 7\sqrt{17}}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{(5 - i + \sqrt{28 + 7\sqrt{17}} - i\sqrt{-28 + 7\sqrt{17}})}{-2} \\ &= \frac{-5 - \sqrt{28 + 7\sqrt{17}}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{-28 + 7\sqrt{17}}}{2} \\ z_2 &= \frac{-5 + \sqrt{28 + 7\sqrt{17}}}{2} + i\frac{1 - \sqrt{-28 + 7\sqrt{17}}}{2}\end{aligned}$$

2) $z^2 - 4(1 - i)z + 2(4 - i) = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= 16(1 - i)^2 - 4(1)(2)(4 - i) \\ &= 16(1 - 1 - 2i) - 32 + 8i \\ &= -32 - 24i \\ &= -8(4 + 3i)\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -32 \\ x^2 + y^2 = 40 \\ 2xy = -24 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 8 & \text{et} & & 2y^2 &= 72 \\ \Rightarrow x^2 &= 4 & \text{et} & & y^2 &= 36 \\ \Rightarrow x &= \pm 2 & \text{et} & & y &= \pm 6 \end{aligned}$$

Donc $\delta_1 = -2 + 6i$ et $\delta_2 = 2 - 6i$

alors

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{4(1 - i) + 2 - i6}{2} \\ &= 3 - 5i \\ z_2 &= 2 + i \end{aligned}$$

3) $z^4 - 4z^2 - 77 = 0$

On pose $w = z^2$ on aura $w^2 - 4w - 77 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4(1)(-77) \\ &= 16 + 308 \\ &= 324 \end{aligned}$$

$$w_1 = \frac{4 + 18}{2} = 11 = z^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{11}$$

$$w_2 = \frac{4 - 18}{2} = -7 = z^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{7}i$$

Chapitre 2

Fonction de la variable complexe

2.1 Les fonctions

Définition 2.1. Une fonction f de la variable complexe $z = a + iy$ associe à un élément du domaine de définition D une image :

$$f(z) = Z = u(x, y) + iv(x, y)$$

u et v sont deux fonctions réelles de deux variables réelles.

$$\begin{aligned} f : D &\longmapsto \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

2.1.1 La continuité

Définition 2.2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$

On dit qu'une fonction f est continue en z_0 si $f(z_0)$ existe et $f(z) \rightarrow f(z_0)$ lorsque $z \rightarrow z_0$ (i.e)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

2.1.2 La dérivabilité

Définition 2.3. On dit que la fonction f est dérivable en z_0 , si f est continue et la limite de $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ existe lorsque h tend vers 0.

On notera la limite par $f'(z_0)$.

Corollaire 2.1. f est dérivable au point z_0 alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$$

2.1.3 Fonctions holomorphes

Dans tout ce qui suit D désigne un ouvert de \mathbb{C} .

Définition 2.4. [1, 6, 8]

f est une fonction holomorphe dans $D \Leftrightarrow f$ dérivable en tout point de D .

Proposition 2.1. [3, 6, 10]

Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, avec $z = x + iy$. Alors f est une fonction holomorphe si et seulement si $u(x, y)$ et $v(x, y)$ ont leurs premières dérivées partielles continues et satisfaisant les conditions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (2.1)$$

Démonstration 2.1.

Par hypothèse f est dérivable en z_0 , donc $f'(z_0)$ existe pour démontrer Cauchy-Riemann, on va considérer deux directions différentes pour la convergence vers z_0 et on va utiliser le fait que la limite de $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0}$ en z_0 est la même suivant toutes les directions.

L'approche suivante l'axe réel ($\Delta y = 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} &= \\ = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

L'approche suivante l'axe imaginaire ($\Delta x = 0$) donne :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} &= \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} &= \\ = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

puis que notre fonction est dérivable alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Théorème 2.1.

$$f = u + iv \text{ holomorphe dans } D \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ et } v \text{ de classe } C^1 \text{ dans } D \\ \text{et} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Cette condition est appelée les conditions de Cauchy- Riemann .

Exemple 2.1.

$z \mapsto z$ est holomorphe dans \mathbb{C} mais $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe dans aucun ouvert de \mathbb{C} .

Proposition 2.2. [4, 8, 9]

1. Si f et g sont holomorphe dans l'ouvert D , alors :
 - a) $f + g, (f + g)' = f' + g'$ et fg sont holomorphe dans D .
 - b) $\frac{f}{g}$ est holomorphe dans $D - \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) = 0\}$
 - c) Les règles classiques de calcul des dérivées sont équivalentes :

$$(f + g)' = f' + g', (fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

2. Si f est holomorphe dans un voisinage de z_0 et si g est holomorphe dans un voisinage de $f(z_0)$ alors :

$g \circ f : z \mapsto g[f(z)]$ est holomorphe dans un voisinage de z_0 .

2.1.4 Fonction analytique :

Définition 2.5.

Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$.
On dit que f est développable en série entière au point z_0 , s'il existe une

série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage U de z_0 dans \mathbb{C} tels que pour tout $z \in U$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On dit que la fonction f définie sur un ouvert U de \mathbb{C} est analytique dans U si elle est développable en série entière en tout point de U .

Exemple 2.2.

La fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est analytique dans le disque $D(0, 1)$
 $\forall z \in D(0, 1), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (développement aux limites au voisinage de 0)

Alors $\forall z_0 \in D(0, 1)$ et $z \in D(z_0, 1 - |z_0|) \subset D(0, 1)$

Donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} \\ &= \frac{1}{1-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

Théorème 2.2. *La somme et le produit de deux fonctions analytiques sur G est analytiques sur G .*

Démonstration 2.2. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$,
pour tout $z \in D(z_0, r) \subset G$

Alors

$$\begin{aligned} f(z) + g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

et

$$f(z) \times g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

2.1.5 Équivalence entre les fonctions analytiques et les fonctions holomorphes :

Définition 2.6. [7, 8, 10]

Nous avons vu qu'une fonction de la variable réelle développable en série entière au voisinage de 0 est indéfiniment dérivable. Maintenant que nous avons donné au sens à la notion de dérivation complexe, nous allons montrer que ce résultat est encore valable pour les fonctions d'une variable complexe.

Théorème 2.3.

Une fonction analytique sur un ouvert U tel que $U \neq \emptyset$ de \mathbb{C} est holomorphe sur U .

Soit $z_0 \in D(z_0, r)$ est le disque ouvert de centre z_0 et rayon r .

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, pour $z \in D(z_0, r) \subset U$, on a alors :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \text{ pour tout } z \in D(z_0, r).$$

Démonstration 2.3.

Pour $z_0 \in U$, il existe $r > 0$, tel que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Pour $z \in D(z_0, r) \subset U$, et pour $z \neq z_0$ dans $D(z_0, r)$, on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n = g(z)$$

Avec $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0) = a_1$, puisque la fonction g est continue en z_0 , la série entière $\sum a_{n+1} t^n$ qui à même rayon de convergence que $\sum a_n t^n$ est continue sur $D(0, r)$, donc en 0.

La fonction f est donc dérivable en z_0 de dérivée d'une fonction analytique sur U est elle même analytique sur U .

Donc : f est holomorphe.

On a :

$$(z + h - z_0) \leq |z - z_0| + \rho - |z - z_0| < \rho$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z_0)}{h} - g(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n P_n(z, h) \end{aligned}$$

Ou on a posé pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} P(z, h) &= \frac{(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n}{h} - n(z-z_0)^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (z+h-z_0)^{n-1-k} (z-z_0)^k - n(z-z_0)^{n-1} \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} |P(z, h)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |z+h-z_0|^{n-1-k} |z-z_0|^k + n|z-z_0|^{n-1} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{n-1-k} \rho^k + n\rho^{n-1} = 2n\rho^{n-1} \end{aligned}$$

La série $\sum n a_{n-1} \rho^{n-1}$ étant convergente.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut donc trouver un entier naturel $n_\varepsilon \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_{k-1} \rho^{k-1} < \varepsilon$$

Et un réel $\rho_1 \in]0, \rho - |z - z_0|[$ tel que pour : $|h| < \rho_1$ on ait :

$$\left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k P_k(z, h) \right| < \varepsilon$$

On a $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k P_k(z, h) = 0$, ce qui donne pour $|h| < \rho_1$

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| < 3\varepsilon$$

On a donc ainsi montré que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z)$$

Ce qui signifie que f est C-dérivable en z de dérivée $g(z)$.

Alors : f est donc holomorphe sur U de dérivée f est analytique sur U

Donc : f est holomorphe.

2.2 Fonctions harmoniques

Définition 2.7. [3, 5, 11]

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit f une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est harmonique sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f = 0$ sur Ω , ou Δf est le Laplacien de f défini par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Remarque 2.1.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques sur Ω .

Car $Re(\Delta f) = \Delta(Re(f))$ et $Im(\Delta f) = \Delta(Im(f))$

Proposition 2.3.

Toute fonction holomorphe sur un ouvert Ω est harmonique sur Ω

Démonstration 2.4.

Soit f une fonction holomorphe alors $Re(f) = u$ et $Im(f) = v$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ de classe } C^1 \text{ dans } \Omega \\ \text{et} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial v} \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \text{Alors } \Delta u = 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \text{Alors } \Delta v = 0 \end{array} \right.$$

2.3 Exercices

Exercice 2.1. Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{z \rightarrow (1+i)} \frac{z^2 - z + 1 - i}{z^2 - 2z + 2}, b) \lim_{z \rightarrow (1+i)} \left(\frac{z - 1 - i}{z^2 - 2z + 2} \right)^2, c) \lim_{z \rightarrow 2e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16},$$

Exercice 2.2. Étudier la dérivation de ces fonctions :

$$f(z) = x^2 + iy, h(z) = \frac{4z}{z^2 + 1}, g(z) = z^2, K(z) = \frac{2}{z^2 - iz - i}$$

Exercice 2.3. On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

1. Montrer que :

$$\sin(z) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + i.\cos(x)\operatorname{sh}(y)$$

$$\cos(z) = \cos(x)\operatorname{ch}(y) - i.\sin(x)\operatorname{sh}(y)$$

2. Déterminer les constantes a, b et c tq $f(z) = x + ay + i.(bx + cy)$ soit holomorphe dans \mathbb{C}

3. Déterminer les constantes a, b tq $f(z) = \cos(x)(2\operatorname{ch}(y) + a\operatorname{sh}(y)) + i.\sin(x)(2\operatorname{ch}(y) + b\operatorname{sh}(y))$ soit holomorphe dans \mathbb{C}
Quelle est alors expression de f en fonction de z ?

Exercice 2.4. On définit $f = u + i.v$ avec

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$$

- Vérifier que la fonction u est harmonique sur \mathbb{R}^2 .
- Déterminer la fonction $v(x, y)$ pour être f une fonction holomorphe et s'annule au point zéro.

Exercice 2.5. On définit $f = u + i.v$ avec

$$u(x, y) = -ye^x \cos y - xe^x \sin y$$

Déterminer la fonction $v(x, y)$ pour être f une fonction holomorphe et s'annule au point zéro.

Exercice 2.6. On définit $f = u + i.v$ avec

$$u(x, y) = e^{-x} x \sin(y)$$

Déterminer la fonction $v(x, y)$ pour être f une fonction holomorphe et s'annule au point zéro.

Exercice 2.7. Soit $f(z) = \frac{z + 2i - 1}{z - 4i}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

1. Écrire f sous forme algébrique ($f = u + iv$).
2. Démontrer que la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{4i\}$ par les conditions de Cauchy-Riemann..

Exercice 2.8. Soit $f(z) = \frac{z + 2i}{z - 3}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

1. Écrire f sous forme algébrique ($f = u + iv$).
2. Démontrer que la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{3\}$ par les conditions de Cauchy-Riemann..

2.4 Solutions

Solution Ex 2.1

a)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2 - z + 1 - i}{z^2 - 2z + 2} &= \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{[z - (1+i)][z + i]}{[z - (1+i)][z - 1 + i]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z + i}{z - 1 + i} \\ &= \frac{1 + i + i}{1 + i - 1 + i} \\ &= \frac{1 + 2i}{2i} \\ &= \frac{-1}{2}i + 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1+i} \left(\frac{z - (1+i)}{z^2 - 2z + 1} \right)^2 &= \lim_{z \rightarrow (1+i)} \left(\frac{[z - (1+i)]}{z - (1+i)(z - 1 + i)} \right)^2 \\ &= \lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{1}{(z - 1 + i)^2} = \frac{1}{(2i)^2} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

c) On a

$$\lim_{z \rightarrow 2e^{\frac{i}{3}}} \frac{z^3 - 8}{z^4 + 4z^2 + 16} = A$$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z \rightarrow 2e^{\frac{i}{3}}} \frac{(z - 2e^{\frac{\pi}{3}i})(z^2 + 2e^{\frac{\pi}{3}i}z + 4e^{\frac{2\pi}{3}i})}{\pi (z - 2e^{\frac{\pi}{3}i})(z^3 + 2e^{\frac{\pi}{3}i}z^2 + 4(1 - e^{\frac{2\pi}{3}i})z + 8(1 - e^{\frac{2\pi}{3}i}) + \frac{\pi}{3})} \\ &= \frac{12e^{\frac{2\pi}{3}i}}{-32 + 16e^{\frac{\pi}{3}i}} \end{aligned}$$

Solution Ex 2.2

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) &= 2x + i(i) \\ &= 2x - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable sur l'axe $x = \frac{1}{2}$ et $f'(z) = 1$

b) $h(z) = \frac{4z}{z^2 + 1}$

h est dérivable sur \mathbb{C} sauf les points qui s'annule $z^2 + 1$, Alors $z = +i$ ou $z = -i$, donc h est dérivable sur $\mathbb{C} - \{i, -i\}$

c) $g(z) = z^2$

g est dérivable sur \mathbb{C} parce que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) \\ &= 2z_0 \end{aligned}$$

d) $K(z) = \frac{2}{z^2 - iz - i}$

K est dérivable sur \mathbb{C} sauf les points qui s'annule $z^2 - iz - i$, Alors $z^2 - iz - i = 0$, Donc $\Delta = i^2 - 4(-i) = -1 + 4i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{17} \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2x^2 &= -1 + \sqrt{17} & \text{et} & \quad 2y^2 = 1 + \sqrt{17} \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} & \text{et} & \quad y^2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ \Rightarrow x &= \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}} & \text{et} & \quad y = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}} \end{aligned}$$

donc $\delta_1 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}} + i\sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}}$, $\delta_2 = -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}}$
alors

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(i + \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}} + i\sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}})}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}}}{2} \\ z_2 &= \frac{-\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}}{2} + i\frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}}}{2} \end{aligned}$$

donc h est dérivable sur

$$\mathbb{C} - \left\{ \frac{-\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}}{2} + i\frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}}}{2}, \frac{\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}}}{2} \right\}$$

Solution Ex 2.3

$$\begin{aligned} 1) \quad z &= x + iy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \cos(z) &= \cos(x + iy) \\ &= \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) \\ &= \cos(x)\frac{e^{-y} + e^y}{2} - \sin(x)\frac{e^{-y} - e^y}{2i} \\ &= \cos(x)ch(y) - i\sin(x)sh(y) \\ \sin(z) &= \sin(x + iy) \\ &= \sin(x)\cos(iy) - \cos(x)\sin(iy) \\ &= \sin(x)\frac{e^{-y} + e^y}{2} - \cos(x)\frac{e^{-y} - e^y}{2i} \\ &= \sin(x)ch(y) + i\cos(x)sh(y) \end{aligned}$$

- 2) On détermine les constante a, b, c tq $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$
 Soit holomorphe $u(x) = \operatorname{Re}(f) = x + ay, \operatorname{Im}(f) = bx + iy = v(x)$
 alors $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivable

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y} = c \text{ alors } c = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a = -\frac{\partial v}{\partial x} = b \text{ alors } b = -a$$

alors

$$\begin{aligned} f(x) &= x + ay + i(-ax + y), a \in \mathbb{R} \\ &= (x + iy) + a(y - ix) = (x + iy) - ia(x + iy) \\ &= (1 - ia)z \end{aligned}$$

- 3) $f(z) = \cos(x)(\operatorname{ech}(y) + \operatorname{ash}(y)) + i\sin(x)(2\operatorname{cosh}(y) + b\operatorname{sinh}(y))$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x)[2\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ash}(y)] = \frac{\partial v}{\partial y} = \sin(x)[2\operatorname{sh}(y) + b\operatorname{ch}(y)]$$

donc $b = -2, a = -2$

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos(x)[2\operatorname{ch}(y) - 2\operatorname{sh}(y)] + i\sin(x)[2\operatorname{ch}(y) - 2\operatorname{sh}(y)] \\ &= 2[\cos(x)\operatorname{ch}(y) - i\sin(x)\operatorname{sh}(y)] + 2i[\sin(x)\operatorname{ch}(y) + i\cos(x)\operatorname{sh}(y)] \\ &= 2[\cos(z) + i\sin(z)] = 2e^{iz} \end{aligned}$$

Solution Ex 2.4

– u est harmonique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Donc u est harmonique.

–

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \Rightarrow v(x, y) &= \int (3x^2 - 3y^2) dy \\ &= 3x^2 y - y^3 + c_1(x) + c_2 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy - 5 = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \Rightarrow -6xy - 5 &= -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \Rightarrow 6xy + 5 &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \Rightarrow 6xy + 5 &= 6xy + c_1'(x) \\ \Rightarrow c_1'(x) &= 5 \\ \Rightarrow c_1(x) &= 5x\end{aligned}$$

Donc $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5x + c_2$, puisque $v(0, 0) = 0$, alors

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5x$$

Solution Ex 2.5

$$u(x, y) = -ye^x \cos y - xe^x \sin y$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -ye^x \cos y - e^x \sin y - xe^x \sin y \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \Rightarrow v(x, y) &= \int (-ye^x \cos y - e^x \sin y - xe^x \sin y) dy \\ &= \int (-ye^x \cos y) dy + e^x \cos y + xe^x \cos y + c_1(x) + c_2 \\ &= -e^x [y \sin y - \int (\sin y) dy] + e^x \cos y + xe^x \cos y + c_1(x) + c_2 \\ &= -e^x y \sin y - e^x \cos y + e^x \cos y + xe^x \cos y + c_1(x) + c_2 \\ &= -e^x y \sin y + xe^x \cos y + c_1(x) + c_2\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -e^x y \sin y + e^x \cos y + e^x \cos y + xe^x \cos y + c_1'(x) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= -(e^x y \sin y - e^x \cos y - xe^x \cos y) \\ &= -e^x y \sin y + e^x \cos y + xe^x \cos y + c_1'(x) \\ \Rightarrow c_1'(x) &= 0 \\ \Rightarrow c_1(x) &= c\end{aligned}$$

Donc $v(x, y) = -e^x y \sin y + xe^x \cos y + c$, puisque $v(0, 0) = 0$, alors

$$v(x, y) = -e^x y \sin y + xe^x \cos y$$

Solution Ex 2.6

Soit $f = u + iv$

$$u(x, y) = e^{-x} x \sin y$$

cherche $v(x, y)$ pour être f holomorphe $f(0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\exp(-x)x \sin(y) + \exp(-x) \sin(y)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int^y (-\exp(-x)x \sin(y) + \exp(-x) \sin(y)) dt \\ &= \exp(-x)x \cos(y) - \exp(-x) \cos(y) + c_1 g(x) + c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\exp(-x)x \cos(y) + \exp(-x) \cos(y) + \exp(-x) \cos(y) + c_1 g'(x) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} = -\exp(-x)x \cos(y) \end{aligned}$$

$$c_1 g'(x) + 2 \exp(-x) \cos(y) = 0$$

$$\text{alors } g'(x) = \frac{2}{c_1} \exp(-x) \cos(y)$$

$$\text{donc } g(x) = \frac{2}{c_1} \exp(-x) \cos(y)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \exp(-x)x \cos(y) - \exp(-x) \cos(y) + 2 \exp(-x) \cos(y) + c_2 \\ &= \exp(-x)x \cos(y) + \exp(-x) \cos(y) + c_2 \end{aligned}$$

$$v(0, 0) = 1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$$

$$\text{donc } v(x, y) = \exp(-x) \cos(y) (x + 1) - 1$$

Solution Ex 2.7

Soit $f(z) = \frac{z + 2i - 1}{z - 4i}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \neq 4i$

1.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{z + 2i - 1}{z - 4i} \\
 &= \frac{z - 4i}{x + iy + 2i - 1} \\
 &= \frac{x + iy - 4i}{x - 1 + i(y + 2)} \\
 &= \frac{x + i(y - 4)}{(x - 1 + i(y + 2))(x - i(y - 4))} \\
 &= \frac{(x + i(y - 4))(x - i(y - 4))}{x^2 - x + (y + 2)(y - 4) + i(x(y + 2) - (x - 1)(y - 4))} \\
 &= \frac{x^2 + (y - 4)^2}{x^2 - x + y^2 - 2y - 8 + i(6x + y - 4)} \\
 &= \frac{x^2 - x + y^2 - 2y - 8 + i(6x + y - 4)}{x^2 + (y - 4)^2}
 \end{aligned}$$

Alors $u(x, y) = \frac{x^2 - x + y^2 - 2y - 8}{x^2 + (y - 4)^2}$ et $v(x, y) = \frac{6x + y - 4}{x^2 + (y - 4)^2}$

2.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(2x - 1)(x^2 + (y - 4)^2) - 2x(x^2 - x + y^2 - 2y - 8)}{(x^2 + (y - 4)^2)^2} \\
 \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(1)(x^2 + (y - 4)^2) - 2(y - 4)(6x + y - 4)}{(x^2 + (y - 4)^2)^2} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(2y - 2)(x^2 + (y - 4)^2) - 2(y - 4)(x^2 - x + y^2 - 2y - 8)}{(x^2 + (y - 4)^2)^2} \\
 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(6)(x^2 + (y - 4)^2) - 2x(6x + y - 4)}{(x^2 + (y - 4)^2)^2}
 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 + 48x - 12xy - y^2 + 8y - 16}{(x^2 + (y - 4)^2)^2} \\
 \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 + 48x - 12xy - y^2 + 8y - 16}{(x^2 + (y - 4)^2)^2} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y^3 - 20y^2 - 12yx + 64y - 74 + 48x + 2yx^2}{(x^2 + (y - 4)^2)^2} \\
 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-2y^3 + 20y^2 + 12yx - 64y + 74 - 48x - 2yx^2}{(x^2 + (y - 4)^2)^2}
 \end{array} \right.$$

Qui vérifié les conditions de Cauchy-Riemann.

Solution Ex 2.8

Soit $f(z) = \frac{z + 2i}{z - 3}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \neq 3$

1.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{z + 2i}{z - 3} \\
 &= \frac{x + iy + 2i}{x + i(y + 2)} \\
 &= \frac{x + iy - 3}{x + i(y + 2)} \\
 &= \frac{x - 3 + i(y)}{(x + i(y + 2))(x - 3 - i(y))} \\
 &= \frac{(x - 3 + i(y))(x - 3 - i(y))}{x^2 - 3x + (y + 2)(y) + i(-x(y) + (x - 3)(y + 2))} \\
 &= \frac{(x - 3)^2 + y^2}{x^2 - 3x + y^2 + 2y + i(2x - 3y - 6)} \\
 &= \frac{x^2 - 3x + y^2 + 2y + i(2x - 3y - 6)}{(x - 3)^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

Alors $u(x, y) = \frac{x^2 - 3x + y^2 + 2y}{(x - 3)^2 + y^2}$ et $v(x, y) = \frac{2x - 3y - 6}{(x - 3)^2 + y^2}$

2.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(2x - 3)((x - 3)^2 + (y)^2) - 2(x - 3)(x^2 - 3x + y^2 + 2y)}{((x - 3)^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(-3)((x - 3)^2 + (y)^2) - 2(y)(2x - 3y - 6)}{((x - 3)^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(2y + 2)((x - 3)^2 + (y)^2) - 2(y)(x^2 - 3x + y^2 + 2y)}{((x - 3)^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(2)((x - 3)^2 + (y)^2) - 2(x - 3)(2x - 3y - 6)}{((x - 3)^2 + y^2)^2}
 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-3x^2 + 3y^2 + 12y - 18x - 4xy - 27}{((x - 3)^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-3x^2 + 3y^2 + 12y - 18x - 4xy - 27}{((x - 3)^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-6xy - 2y^2 + 2x^2 - 12x + 18y + 18}{((x - 3)^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2x^2 + 12x - 18y - 18 + 2y^2 + 6xy}{((x - 3)^2 + y^2)^2}
 \end{array} \right.$$

Qui vérifié les conditions de Cauchy-Riemann.

Chapitre 3

Fonction élémentaires

3.1 Fonction Exponentielle[6]

Les fonctions exponentielles sont définies par

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

formule dans laquelle e est la base des logarithmes népériens. Si a est réel et positif on définit

$$a^z = e^{z\text{Log}a}$$

Les fonctions exponentielles complexes ont des propriétés analogues à celles des fonctions exponentielles réelle.

3.2 Fonction Logarithme[6]

La fonction $f(z) = \text{Log}z$; $z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle z .

$$w = \text{Log}(z) \Leftrightarrow z = e^w$$

Proposition 3.1. *La fonction $\text{Log}z$, $z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par*

$$\text{Log}z = \ln |z| + i\arg(z) = \ln |z| + i(\text{Arg}z + 2k\pi); k \in \mathbb{Z} \text{ ou } -\pi < \text{Arg}z \neq \pi$$

Exemple 3.1.

$$\text{Log}(1+i) = \ln |1+i| + i(\text{Arg}(1+i) + 2k\pi) = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3.3 Fonctions Circulaires[6]

Nous définirons les fonctions trigonométriques ou circulaires, $\sin z$, $\cos z$, etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\begin{aligned} \csc z &= \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} & \sec z &= \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} & \operatorname{cotg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \end{aligned}$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe.

3.4 Fonctions Hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} & \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}} \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} & \operatorname{sh} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont encore vérifiées :

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1; \operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$$

Les fonctions trigonométriques (ou circulaires) et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(iz) &= i \operatorname{sh} z & \cos(iz) &= \operatorname{ch} z & \operatorname{tg}(iz) &= i \operatorname{th} z \\ \operatorname{sh}(iz) &= i \sin z & \operatorname{ch}(iz) &= \cos z & \operatorname{th}(iz) &= i \operatorname{tg} z \end{aligned}$$

3.5 Fonctions Puissances[6]

La fonction z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$ est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}$$

De même si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions données, de z , on peut définir

$$f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \operatorname{Log}(f(z))}$$

Exemple 3.2.

$$(1+i)^{(1+i)} = e^{(1+i) \operatorname{Log}(1+i)} = e^{(1+i)(\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + i2k\pi)}$$

Remarque 1. On a

$$(z^\alpha)^k = z^{\alpha k}; \alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$$

mais

$$(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$$

dans le cas général si $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$

Exemple 3.3. On a

$$((-i)^2)^i = (-1)^i = e^{i \log(-1)} = e^{i(i(\pi+2k\pi))} = e^{-\pi-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

et

$$(-i)^{2i} = e^{2i \log(-i)} = e^{2i(i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{\pi-4k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

Donc

$$((-i)^2)^i \neq (-i)^{2i}$$

3.6 Exercices

Exercice 3.1. On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

1. Montrer que :

$$\sin(z) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + i.\cos(x)\operatorname{sh}(y)$$

$$\cos(z) = \cos(x)\operatorname{ch}(y) - i.\sin(x)\operatorname{sh}(y)$$

2. Déterminer les constantes a, b et c tq $f(z) = x + ay + i.(bx + cy)$ soit holomorphe dans \mathbb{C}

3. Déterminer les constantes a, b tq $f(z) = \cos(x)(2\operatorname{ch}(y) + a\operatorname{sh}(y)) + i.\sin(x)(2\operatorname{ch}(y) + b\operatorname{sh}(y))$ soit holomorphe dans \mathbb{C}

Quelle est alors l'expression de f en fonction de z ?

3.7 Solutions

Solution Ex 3.1

$$1) \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$z = x + iy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix-y}}{2i} \\ &= \sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\operatorname{sh}(y) \\ &= \cos(x + iy) = \cos(x)\operatorname{ch}(y) - i\sin(x)\operatorname{sh}(y) \end{aligned}$$

- 2) On détermine les constantes a, b, c tq $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$
Soit holomorphe $u(x) = \operatorname{Re}(f) = x + ay, \operatorname{Im}(f) = bx + iy = v(x)$
alors $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y} = c \text{ alors } c = 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = a = -\frac{\partial v}{\partial x} = b \text{ alors } b = -a$$

Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= x + ay + i(-ax + y), a \in \mathbb{R} \\ &= (x + iy) + a(y - ix) = (x + iy) - ia(x + iy) \\ &= (1 - ia)z \end{aligned}$$

3) $f(z) = \cos(x)(\operatorname{ech}(y) + a\operatorname{sh}(y)) + i\sin(x)(2\operatorname{cosh}(y) + b\operatorname{sinh}(y))$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x)[2\operatorname{ch}(y) + a\operatorname{sh}(y)] = \frac{\partial v}{\partial y} = \sin(x)[2\operatorname{sh}(y) + b\operatorname{ch}(y)]$$

Donc $b = -2, a = -2$

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos(x)[2\operatorname{ch}(y) - 2\operatorname{sh}(y)] + i\sin(x)[2\operatorname{ch}(y) - 2\operatorname{sh}(y)] \\ &= 2[\cos(x)\operatorname{ch}(y) - i\sin(x)\operatorname{sh}(y)] + 2i[\sin(x)\operatorname{ch}(y) + i\cos(x)\operatorname{sh}(y)] \\ &= 2[\cos(z) + i\sin(z)] = 2e^{iz} \end{aligned}$$

Chapitre 4

Calcul intégral

4.1 ARCS et chemins

4.1.1 Définition : Chemin

On appelle chemin sur \mathbb{C} toute application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Le point initial du chemin est $\gamma(a)$ et le point final est $\gamma(b)$. Ces deux points constituent les extrémités du chemin.

4.1.2 Définition : Homotopie[6, 8, 9]

Soient Ω un domaine de \mathbb{C} , γ_1 et γ_2 deux chemins définis sur le même intervalle $[a, b]$. On dit que γ_2 est homotope à γ_1 s'il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ et une application continue $h : [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ qui, à $(t, s) \in [a, b] \times [\alpha, \beta]$ associe $h(t, s) \in \Omega$ tel que :

$$h(t, \alpha) = \gamma_1(t)$$

Et

$$h(t, \beta) = \gamma_2(t)$$

Définition 4.1. [3, 4, 9]

On appelle un arc toute application continue γ d'un intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . On le notera souvent $([a, b], \gamma)$. On dit que $\gamma(a)$ est l'origine et que $\gamma(b)$ est l'extrémité.

On dit que γ est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

4.1.3 Définition : (arc simple)[2, 5, 10]

On dit que γ est un arc simple si l'application est injective. Il est dit réduit a un point : si l'application γ est constante. Si $([a, b], \gamma)$ est un arc, on note $Im(\gamma)$ pour $\gamma([a, b])$ et si U est un ouvert de \mathbb{C} , on dit que γ est un arc dans U si $Im\gamma \subset U$

4.1.4 Définition : (arc opposé)

L'arc opposé de $([a, b], \gamma)$ est l'arc $([a, b], \delta)$ défini pour $t \in [a, b]$ par

$$\delta(t) = \gamma(a + b - t)$$

Intuitivement, c'est l'arc γ (parcouru dans l'autre sens).

4.1.5 Définition : (γ de classe C^1 par morceaux)

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de \mathbb{R} et γ un application de $[a, b]$ dans \mathbb{C} . Rappelons que γ est dite de classe C^1 par morceaux si elle est continue et s'il existe une subdivision :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$

de $[a, b]$ telle que $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$, soit continûment dérivable pour chaque $i = 0, \dots, n-1$, γ_i est les restriction de γ sur $[a_i, a_{i+1}]$ avec :

$$\gamma_i(a_{i+1}) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$$

On appelle chemin dans un ouvert U tout arc $([a, b], \gamma)$ dans U tel que γ soit de classe C^1 par morceaux.

FIGURE 4.1 – chemin par morceaux

4.1.6 Définition : (arc équivalent)[3, 4, 9]

On dit que deux chemins $([a, b], \gamma)$ et $([c, d], \delta)$ sont équivalent s'il existe une application $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ vérifiant les conditions suivantes :

- i) φ et φ^{-1} est bijective croissante et de classe C^1 par morceaux.
- ii) on a $\gamma = \delta \circ \varphi$.

Si γ et δ sont équivalente on a :

$$Im\gamma = Im\delta.$$

4.1.7 Exemple importants des chemins :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Le chemin fermé $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \rightarrow z_0 + re^{it}$$

est appelé le cercle de centre z_0 et de rayon r , parcouru dans le sens direct

2. Soit $u, v \in \mathbb{C}$. Le chemin $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \rightarrow (1 - t)u + tv$$

est le segment orienté d'origine u et d'extrémité v . Le chemin opposé $[u, v]$ est le segment orienté $[v, u]$.

4.2 Intégrale curviligne(Intégration complexe)

Définition 4.2.

Soit $([a, b], \gamma)$ un chemin de classe C^1 et f une fonction continue sur $Im(\gamma)$.

L'intégrale de f sur γ notée par $\int_{\gamma} f(z) dz$ est définie par

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Proposition 4.1.

Si $([a, b], \gamma_1)$ et $([c, d], \gamma_2)$ sont deux chemins équivalentes et si f est une fonction holomorphe sur $Im\gamma$, on a

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Démonstration 4.1.

On a $\gamma_1 \sim \gamma_2$, il existe une bijective φ croissant avec : $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$
 $\gamma_2' = \varphi' \cdot \gamma_1'(\varphi)$

La formule de changement de variable dans les intégrales fournit

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_c^d f[\gamma_2(t)] \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_c^d f \circ (\gamma_1 \circ \varphi)(t) \varphi'(t) \gamma_1'(\varphi(t)) dt \\ &= \int_c^d f[\gamma_1(\varphi(t))] \gamma_1'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

On fait un changement de variable $z = \varphi(t)$ alors $dz = \varphi'(t) dt$ et puisque φ est une bijective croissante donc $a = \varphi(c)$ et $b = \varphi(d)$, alors :

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_a^b f[\gamma_1(z)] \gamma_1'(z) dz$$

$$= \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Donc $\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$

Définition 4.3.

Soient $([a, b], \gamma)$ et $([c, d], \gamma^\circ)$ deux chemins et f une fonction continue sur $Im\gamma \cup Im\gamma^\circ$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^\circ} f(z) dz &= \int_a^b (f \circ \gamma^\circ)(t) \gamma^{\circ\prime}(t) dt \\ &= \\ &= - \int_a^b f \circ \gamma(a+b-t) \gamma'(a+b-t) dt \\ &= \\ &= \int_b^a (f \circ \gamma)(t') \gamma'(t') dt' \\ &= \\ &= - \int_{\gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

Définition 4.4.

La longueur d'un chemin γ de classe C^1 est la valeur positive suivante :

$$long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Exemple 4.1. Soit γ est le chemin fermé $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \rightarrow z_0 + re^{it}$$

$$long(\gamma) = \int_0^{2\pi} |r| dt = 2\pi r$$

Proposition 4.2.

Si f est continue alors :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{Sup}(|f|) \text{long}(\gamma)$$

4.3 Formules d'intégrales de Cauchy[5, 8, 9]

Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert U simplement connexe, C une courbe de Jordan contenue dans U et z_0 un point de U dans C alors :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

En particulier

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

Démonstration 4.2.

Soit $\gamma = \{z \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$, $\frac{f(z)}{(z - z_0)}$ est holomorphe sur C , donc :

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} dz + \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{(z - z_0)} dz \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} dz \right| \leq \int_{\gamma} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} \right| dz$$

f étant holomorphe en z_0 .

$\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}$ peut être rendue arbitrairement voisine de $f'(z_0)$ pour ε

assez petit

$\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}$ admet donc un majorant M et

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} dz \leq 2\pi M\varepsilon$$

On a donc :

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} dz = 0$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{(z - z_0)} dz = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = 2i\pi f(z_0)$$

La relation $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$ est valable pour tout point z_0 intérieur à C .

L'expression $\frac{f(z)}{(z - z_0)}$ est continue et dérivable aussi bien par rapport à z que par rapport à z_0 (la démonstration ne s'annule pas si z_0 est à l'intérieur de C et z sur C)

On obtient

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{z}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

en dérivant sous le signe somme n fois par rapport à z_0 .

4.3.1 Théorème de Cauchy

La valeur $\int_C f(z) dz$ dépend a priori du chemin reliant les deux extrémités A et B . La question qui se pose est : Existe-t-il une classe de fonctions pour lesquels la valeur de cette intégrale ne dépend que des valeurs de A et B ? Si $z \rightarrow f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe D .

L'intégrale $\int_C f(z) dz$ prend la même valeur pour tout les chemins C , inclus dans D , ayant les mêmes extrémités.

Remarque 4.1.

Il en résulte que l'on peut noter ce type d'intégrale par

$$\int_{z_A}^{z_B} f(z) dz$$

Exemple 4.2.

$$f(z) = z^2.$$

Corollaire 4.1.

Si $z \rightarrow f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe D , alors pour tout chemin fermé (courbe finie) situé dans D ;

$$\int_C f(z) dz = 0$$

4.4 Formule de la moyenne

Proposition 4.3. *Soit f holomorphe sur U , $z_0 \in U, R > 0, \bar{D}(z_0, R) \subset U$. Alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt = \frac{1}{\pi R^2} \int \int_{\bar{D}(z_0, R)} f(x + iy) dx dy$$

Démonstration 4.3. *On utilise la formule de Cauchy :*

On sait que

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \bar{D}(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Sur $\partial \bar{D}(z_0, R)$, le variable z s'écrit sous la forme suivante :

$z = z_0 + Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$, alors on fait un changement de variable, donc $dz = Rie^{it} dt$, donc :

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} Rie^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt. \end{aligned}$$

4.4.1 Primitive

4.4.1.1 Une autre conséquence du théorème de Cauchy[6, 8, 9, 10]

Si $z \rightarrow f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D alors l'intégrale $\int_{z_0}^z f(s) ds = F(z)$.

Cette fonction est holomorphe dans D et de plus et de plus

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(s) ds = f(z)$$

4.5 Inégalité de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de \mathbb{C} . Soient $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r est inclus dans U . Pour tout entier n , on a l'inégalité

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| \leq r^{-n} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{it})|$$

4.6 Théorème de Liouville

Théorème 4.1. *Une fonction entière et bornée est nécessairement une constante.*

Démonstration 4.4. *Soit*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, z \in \mathbb{C}$$

On a les inégalités de Cauchy pour les coefficients de la série :

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \sup\{|f(z)|, |z| = r\}.$$

Puisqu'ici $|f(z)| \leq M$ pour tout z , en laissant $r \rightarrow +\infty$, on obtient

$$a_k = 0 \text{ si } k \geq 1.$$

4.7 Théorème de Morera

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Supposons que

$$\int_C f(z) dz = 0$$

pour toute chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D . Alors f est holomorphe dans D .

4.8 Exercices

Exercice 4.1. *Soit*

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow t^2 + it \end{aligned}$$

Calculez La longueur de γ .

Exercice 4.2. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z+i|=1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz, \quad J = \int_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z^2 - 3z + 2} dz, \\ H &= \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^3} dz, \quad K = \int_{|z|=2} \frac{1}{z^2 - 1} dz, \end{aligned}$$

Exercice 4.3. Soit $z = x + iy$ et $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$

Calculer l'intégrale complexe $\int_I f(z)dz$ dans les deux cas suivant :

1. I est la ligne brisée $z_1z_2z_3$ avec $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 2 + 4i$
2. I est le morceaux parabolique $y = x^2$ qui relié z_1 à z_3 .

Exercice 4.4. Soient a et b deux nombre réels strictement positives.
Donner une paramétrisation γ du bord du rectangle R défini par :

$$R = \{z \in \mathbb{C} / -a \leq \operatorname{Re}(z) \leq a; -b \leq \operatorname{Im}(z) \leq b\}$$

Calculer $\int_{\gamma} z^n dz$

4.9 Solutions

Solution Ex 4.1

Soit

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow t^2 + it \end{aligned}$$

La longueur de γ est :

$$\begin{aligned} \operatorname{long}(\gamma) &= \int_0^2 |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_0^2 |2t + i| dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 1} dt \end{aligned}$$

On fait un changement de variable

$$t = \frac{1}{2} \operatorname{sh}(x) \text{ alors } dt = \frac{1}{2} \operatorname{ch}(x)$$

$$t = 0 \text{ alors } x = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{sh}(x) &= 2 \\ \Rightarrow \operatorname{sh}(x) &= 4 \\ \Rightarrow e^{2x} - 8e^x - 1 &= 0 \\ \Rightarrow x &= \ln(4 + \sqrt{17}) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \text{long}(\gamma) &= \frac{1}{2} \int_0^{\ln(4+\sqrt{17})} \sqrt{\text{sh}(x)^2 + 1} \text{ch}(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\ln(4+\sqrt{17})} \text{ch}(x)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\ln(4+\sqrt{17})} \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} dx \\
 &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 2x + c \right]_0^{\ln(4+\sqrt{17})} \\
 &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} (4 + \sqrt{17})^2 - \frac{1}{2} + 2 \ln(4 + \sqrt{17}) \right]
 \end{aligned}$$

Solution Ex 4.2

1. $I = \int_{|z+i|=1} \frac{e^z}{(z^2 + 1)^2}$, puisque $z^2 + 1 = 1$ donne $z = i$ ou $z = -i$

$$z^2 = (z - i)(z + i)$$

donc on aura $\frac{e^z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{e^z}{(z - i)^2(z + i)^2}$ et puisque $\gamma(t) = -it + e^{it}$

alors

$$I = \int_{|z+i|=1} \frac{e^z}{(z - i)^2(z + i)^2}$$

donc

$$f(z) = \frac{e^z}{(z - i)^2} \text{ et, } z_0 = -i \text{ et } n = 1, \text{ alors}$$

$$f'(z) = \frac{e^z(z - i)^2 - 2(z - i)e^z}{(z - i)^4}$$

analytique sur (γ)

Alors on applique théorème de Cauchy générale

$$f'(-i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z + i)^2} dz$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i f'(-i) \\ &= 2\pi i \left(e^{-i} \frac{(-2i)^2 - 2(-2i)}{(-2i)^4} \right) \\ &= 2\pi i e^{-i} \times \left(\frac{-1+i}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-i} (-1-i) \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-i} (i+1) \end{aligned}$$

2. $J = \int_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z^2 - 3z + 2} dz$

$$\gamma(t) = 3e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, z^2 - 3z + 2 = (z-2)(z-1)$$
$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$
$$\int_{\gamma} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z^2 - 3z + 2} dz = - \int_{\gamma} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1} dz + \int_{\gamma} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} dz$$
$$f(z) = \sin \pi z^2 + \cos \pi z^2$$
$$\begin{aligned} J &= -2\pi i \times f(1) + 2\pi i \times f(2) \\ &= -2\pi i + 2\pi i \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.

$$K = \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz = -\frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{1}{z-1} dz + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{1}{z+1} dz$$

Donc $f(z) = 1$

$$\begin{aligned} K &= -\pi i \times f(1) + \pi i \times f(-1) \\ &= -\pi i + \pi i \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. $H = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3} dz, \quad \gamma = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ $f(z) = \sin z$ est analytique sur γ alors $f^{(2)}(0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-0)^3} dz \quad f'(z) = \cos z, f''(z) = -\sin z$

Donc

$$H = \pi i \times f^{(2)}(0) = \pi i \times (0) = 0$$

Solution Ex 4.3

Soit $z = x + iy$, $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$

1) I est la ligne brisée

$$I = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [1, 2] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow t + i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [2, 4] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow 2 + i\left(\frac{3}{2}t - 2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_I f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\ &= \int_1^2 (\gamma_1(t))^2 \times \gamma_1'(t)dt + \int_2^4 (\gamma_2(t))^2 \times \gamma_2'(t)dt \\ &= \int_1^2 (t+i)^2 \times (1)dt + \frac{3i}{2} \int_2^4 (2 + i(\frac{3}{2}t - 2))dt \\ &= \left[\frac{1}{3}(t+i)^3\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}(2 + i(\frac{3}{2}t - 2))^3\right]_2^4 \\ &= \frac{1}{3}[(2+i)^3 - (1+i)^3 + (2+4i)^3 - (2+i)^3] \\ &\quad + \frac{1}{3}[8 - 64i + 48i - 96 - 1 + i - 3i + 3] \\ &= \frac{1}{3}[-86 - 18i] \\ &= -\frac{86}{3} - 6i \end{aligned}$$

2) I est le morceau parabolique $y = x^2$ qui relie z_1, z_3

$$\begin{aligned} I : [1, 2] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow t + t^2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_I z^2 dz &= \int_1^2 (t + t^2 i)^2 \times (1 + 2ti) dt \\
&= \frac{1}{3} [(t + t^2 i)^3]_1^2 \\
&= \frac{1}{3} [(2 + 4i)^3 - (1 + i)^3] \\
&= \frac{1}{3} [8 - 64i + 48i - 96 - 1 + i - 3i + 3] \\
&= \frac{(-86 - 18i)}{3} \\
&= \frac{-86}{3} - 6i
\end{aligned}$$

Solution Ex 4.4

Soient $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, et $R = \{z \mid -a \leq \operatorname{Re}(z) \leq a, -b \leq \operatorname{Im}(z) \leq b\}$

$$\begin{array}{rcl}
R : & & [0, 4] \longrightarrow \mathbb{C} \\
& & t \longrightarrow \\
& \left\{ \begin{array}{l} (2t - 1)a - bi, \quad [0, 1] \\ a + ib(2t - 3), \quad [1, 2] \\ (5 - 2t)a + bi, \quad [2, 3] \\ -a + i(7 - 2t)b, \quad [3, 4] \end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_R z^n dz \\
&= 2a \int_0^1 f((2t - 1)a - bi) dt + 2b \int_1^2 f(a + ib(2t - 3)) dt \\
&\quad - 2a \int_2^3 f((5 - 2t)a + ib) dt - 2bi \int_3^4 f(-a + (7 - 2t)b) dt
\end{aligned}$$

On fait les changements des variables suivants :

$$\begin{aligned}
x &= 2t - 1 \\
y &= 2t - 3 \\
z &= 2t - 5 \\
u &= 2t - 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2a}{2} \int_{-1}^1 f(xa - bi) dx + bi \int_{-1}^1 f(a + iby) dy \\
&- a \int_{-1}^1 f(-za + bi) dz - bi \int_{-1}^1 f(-a - ibu) du \\
&= \left[\frac{(xa - bi)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{(a + iby)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^1 \\
&+ \left[\frac{(-za + bi)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{(-a - ubi)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{(a - bi)^{n+1} - (-a - bi)^{n+1}}{n+1} + \frac{(a + ib)^{n+1} - (a + ib)^{n+1}}{n+1} \\
&+ \frac{(-a + ib)^{n+1} - (a + ib)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-a - bi)^{n+1} - (-a + bi)^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{(-a - bi)^{n+1}}{n+1} [-1 + 1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Développement en Série Taylor et en Série de Laurent

5.1 Développement en séries de Taylor

Théorème 5.1. (*Séries de Taylor dans \mathbb{C} [6, 8, 9]*)

Soit f une fonction analytique en tout point du disque ouvert

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, \text{ où } z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } 0 < R \leq +\infty$$

Alors il existe une suite unique $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dans \mathbb{C} telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \forall z \in D.$$

De plus,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots$$

où

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$$

et ρ est un rayon quelconque tel que $0 < \rho < R$.

5.2 Séries de Laurent et Résidus

5.3 Les couronnes

Définition 5.1. [2, 4, 8]

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, et $0 < R_1 < R_2$.

La couronne ouverte de centre z_0 et de rayon R_1 et rayon R_2 noté par $ann(z_0, R_1, R_2)$ définie par :

$$ann(z_0, R_1, R_2) = \{\forall z \in \mathbb{C}, R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

Si on a l'égalité, on dit que la couronne est fermée définie par

$$\overline{ann}(z_0, R_1, R_2) = \{\forall z \in \mathbb{C}, R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2\}$$

Si $R_1 = 0$, $ann(z_0, 0, R_2) = \dot{D}(z_0, R_2)$ et on l'appelle disque pointé.

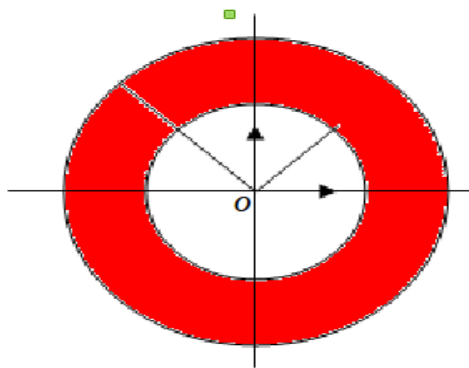


FIGURE 5.1 – La couronne

5.4 Série de Laurent

Proposition 5.1. [7, 9, 11]

Soit f une fonction analytique sur $ann(z_0, r_1, r_2)$, alors pour tout $z \in ann(z_0, r_1, r_2)$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$$

avec :

$$C_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} dz'$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ $C_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z') dz'$ et γ un contour quelconque orienté positivement, inclus dans la couronne et entourant de z_0 . Ce développement est appelé développement en série de Laurent et il est unique.

Démonstration 5.1.

γ est homotope à un contour T proche de $\gamma_1 - \gamma_2$ et entourant z_0

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left[\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw \right] \end{aligned}$$

On fait le développement de Taylor de f sur γ_2 , ce que donne les C_n pour $n \geq 0$. Pour γ_1 on'a :

$$|w - z_0| < |z - z_0|$$

Il faut donc refaire le même raisonnement que pour Taylor mais en considérant :

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^n} \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(w - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi les C_n pour $n \leq 0$.

Remarque 5.1.

Si f est analytique sur $D(z_0, r_0)$ alors les coefficients C_n sont nuls pour $n \leq 0$

Exemple 5.1.

$$f(z) = \frac{1}{z - a}, a \in \mathbb{R}_+^*$$

f possède une singularité en a . On recherche le développement en série de Laurent de f autour de $z_0 = 0$

1^{re} cas : $|z| < a$, f est analytique sur $D(0, r)$ avec $|z| < r < a$

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} \\
&= -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n \\
&= -\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z^2}{a^3} - \dots
\end{aligned}$$

2^{ème} cas : $|z| > a$, f est analytique sur $C(0, r_1, r_2)$ avec $a < r_1 < |z| < r_2$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z - a} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \\
&= \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \dots
\end{aligned}$$

5.4.1 Les points singuliers

Définition 5.2. [6, 7, 8, 9]

Soit z_0 un point au voisinage duquel f n'est pas analytique.

On dit que z_0 est un point singulière de f .

Soit z_0 un point singulier de f . S'il existe un disque ouvert pointé (privé de z_0) de centre z_0 et de rayon $r > 0$ dans lequel f est analytique, alors on dit que z_0 est un point singulier isolé.

Exemple 5.2.

$f : z \rightarrow \frac{1}{z-2}$, le point $z_0 = 2$ est un point singulier isolé.

$f : z \rightarrow \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$, le point $z_0 = 0$ est un point singulier non isolé.

Dans tout ce qui suit, on supposera les points singuliers isolés.

Dans le cadre de cette hypothèse, si on prend f admettant un point singulier z_0 , et que l'on considère sa série de Laurent associée autour de z_0 on note $b_n = C_{-n}$ et $a_n = C_n$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

tel que :

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ est une partie singulière.

Définition 5.3.

Si tous les b_n sont nuls, la fonction est analytique dans $D(0, r)$ et on dit que z_0 est une singularité apparente.

Définition 5.4.

Si les b_n sont tous non nuls, i.e : s'il existe un b_m non nul tel que $b_n = 0$, pour tout $n > m$, alors z_0 est un pôle d'ordre m et pour tout $z \in D(z_0, r)$.

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots$$

Si $m = 1$ on dit que a un pôle simple.

Définition 5.5.

S'il existe une infinité de b_n non nuls, la singularité est dite essentielle

Exemple 5.3.

1. $z \rightarrow \frac{\sin z}{z}$:
 $z_0 = 0$ est une singularité les b_n sont tous nuls et on'a :

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)} & \text{si } n \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$z \rightarrow \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

est analytique et z_0 est une singularité apparente.

2. $z \rightarrow \frac{1}{z-2}$: $z_0 = 2$ est une singularité c'est un pôle d'ordre 1

3. $z \rightarrow e^{\frac{1}{z}}$: $z_0 = 0$ est une singularité

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{n} \frac{1}{z^n} + \dots$$

$a_0 = 1$. $a_n = 0 \forall n > 0$, $b_n = \frac{1}{n}$, $\forall n > 0$ z_0 est un singularité essentielle

5.5 Exercices

Exercice 5.1. Soient $0 < a < b$ et $f(z) = \frac{1}{(z-b)(z-a)}$

Écrire le Développement de Laurent de la fonction f .

5.6 Solutions

Solution Ex 5.1

Dans le disque $|z| < a$, le développement de Taylor de f est

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} \frac{1}{1-z/a} - \frac{1}{b} \frac{1}{1-z/b} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a^{k+1}} - \frac{1}{b^{k+1}} \right) z^k \end{aligned}$$

Dans la couronne $a < |z| < b$, le développement de Laurent de f est

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{-1}{z} \frac{1}{1-a/z} - \frac{1}{b} \frac{1}{1-z/b} \right) \\ &= \frac{-1}{b-a} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{b^{k+1}} \right) \end{aligned}$$

À l'extérieur du disque $|z| < b$ enfin, le développement de Laurent de f est

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{b^k - a^k}{b-a} \right) \frac{1}{z^{k+1}} \end{aligned}$$



Chapitre 6

Théorème des résidus et ses applications

6.1 Théorèmes des Résidus

Théorème 6.1. [3, 5, 8]

Soient Ω un domaine simplement connexe de \mathbb{C} et $\{b_1, \dots, b_n\}$ un nombre fini de points de Ω isolés et distincts.

Soit une fonction f analytique dans un $\Omega - \{b_1, \dots, b_n\}$

Si on prend γ un contour dans Ω , entourant les $b_i, i \in [1, n]$, sans rencontrer ces point et orienté positivement, alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, b_k)$$

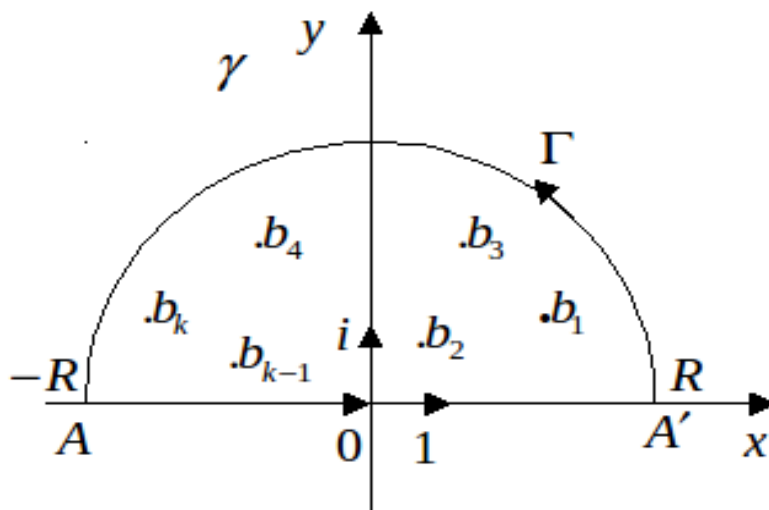


FIGURE 6.1 – Les points singulières

Démonstration 6.1.

$$\int f(z) dz = 0 = \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

Or :

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = -2i\pi \operatorname{Res}(f, b_k)$$

D'ou le résultat.

6.2 Résidu en un point singulier isolé

Définition 6.1.

Soit z_0 un point singulier de f , soit $\dot{D}(z_0, r)$ un disque pointé ne contenant pas de point singulier de f , alors :

$\forall z \in \dot{D}(z_0, r)$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Le coefficient b_1 est appelé résidu de f en z_0 et noté $\operatorname{Res}(f, z_0)$

On a donc :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz$$

ou γ est un contour orienté positivement est γ inclus dans $\dot{D}(z_0, r)$ et entourant z_0

Remarque 6.1.

Si z_0 est un point singulier apparent de f alors $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$

6.2.1 Calcul pratique de résidus

1. Si z_0 est un pôle simple, alors $f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + g(z)$

Ou : $g(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$ est une fonction analytique aux voisinage de z_0 et nulle en z_0 , on a donc :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) = b_1$$

Alors :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z)$$

2. Si z_0 est un pôle d'ordre m

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

En pratique il vaut mieux calculer directement le développement pour des pôles d'ordres élevés.

Proposition 6.1.

Soit $f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$ avec g une fonction analytique au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$
On a :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = g(z_0)$$

Proposition 6.2.

Soit $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec h et g deux fonctions analytiques au voisinage de z_0 , et tel que $g(z_0) \neq 0$ et z_0 est un zéro simple de h . On a alors :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Démonstration 6.2.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \\ &= g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} \\ &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \end{aligned}$$

6.3 Les lemmes de Jordan[3, 8, 9]**6.3.1 Lemme 1**

Soit f une fonction holomorphe dans un secteur $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi$ (θ désignant l'argument de z), sauf éventuellement en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées. Si

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{|z| \rightarrow 0} z f(z) = 0 \right)$$

pour $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$, alors l'intégrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

(ou γ est un arc de cercle de rayon R contenu dans le secteur $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$)

tend vers zéro quand R tend vers l'infini (resp. vers 0).

6.3.2 Lemme 2

Soit f une fonction holomorphe dans un secteur $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ du demi-plan supérieur (resp. du demi-plan inférieur), sauf éventuellement en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées.

Si $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$, pour $\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2$, alors l'intégrale :

$$\int_{\gamma} f(z) e^{ikz} dz$$

(Pour $k \geq 0$, (resp. $k \leq 0$)) étendu à un cercle γ de rayon R dans le secteur $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, tend vers zéro quand R tend vers l'infini.

Ce lemme est très souvent utilisé lors du calcul de transformées de Fourier pour la méthode des résidus.

6.3.3 Lemme 3

Si f est une fonction possédant un pôle simple à l'origine on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = i\pi \text{Res}(f, 0)$$

Où r est positif et $\gamma : t \rightarrow re^{i\pi t}, t \in [0, 1]$

6.4 Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx :$

Définition 6.2. [7, 10, 11]

Considérons une fonction $x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dont la fonction à variable complexe associée, holomorphe sur \mathbb{C} sauf en un nombre fini de singularités isolées.

On va désigner par $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ les singularités de $f(z)$ qui appartiennent au demi-plan supérieur

$$H = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$$

La courbe γ est simple fermée borde un domaine du demi-plan supérieure contenant certaines singularités de $f(z)$

Donc si pour tout réel $R > \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$ on intervalle fonction $f(z)$ sur la courbe γ par courue dans le sens trigonométrique et qui est constituée par l'intervalle $[-R, R]$ et le demi-cercle C_R de centre l'origine et de rayon R .

On applique théorème des résidus, alors :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} \text{Res}(f(z), z_k) \end{aligned}$$

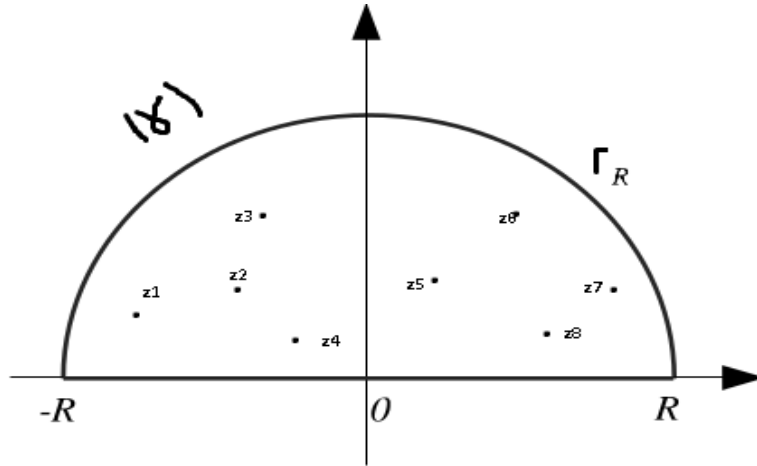


FIGURE 6.2 – Le chemin associé

Le lemme de Jordan permet de calculer la valeur de la limite de l'intégrale curviligne $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz$ lorsque R tend vers l'infini pour certaines fonction $f(z)$.

Par conséquent, si on fait tendre le réel $R > 0$ vers l'infini on obtient l'expression suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz + 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} Res(f(z), z_k)$$

Exemple 6.1.

Pour tout $0 < a < b$ calculons l'intégrale simple généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} dx$$

Notons que cette intégrale converge car, à l'infini la fonction

$$\frac{x^2}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}$$

est équivalente à la fonction $\frac{1}{x^2}$ et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 \text{ converge et que la fonction :}$$

$$z \mapsto f(z) = \frac{z^2}{(a^2 + z^2)(b^2 + z^2)} \text{ est holomorphe sur le demi-plan supérieur sauf aux points } ia \text{ et } ib.$$

Donc puis que $\lim_{z \rightarrow +\infty} z f(z) = 0$; le lemme de Jordan combiné avec le théorème des résidus impliquent qu'on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} dx &= 2\pi i [Res(f(z), ia) + Res(f(z), ib)] \\
&= 2\pi i \left[\frac{(ia)^2}{(2ib)(b^2-a^2)} + \frac{(ib)^2}{(-b^2+a^2)(2ib)} \right] \\
&= \frac{\pi}{b+a}
\end{aligned}$$

6.5 Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx :$

Définition 6.3.

Considérons une fraction rationnelle $\frac{p(x)}{Q(x)}$ dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas des racines réelles et son degré de $Q(x)$ est supérieur ou égale au degré de $P(x)$ plus un (i.e $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(x)) + 1$).

Le calcul de l'intégrale simple $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$ sera fait selon le signe du paramètre α .

1. **Le paramètre $\alpha > 0$:** Dans ce cas on choisit un réel $R > 0$ strictement supérieur aux modules des racines $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ de $Q(z)$ qui appliquant au demi-plan supérieur H et puis on intègre la fonction $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$ sur la courbe simple fermée Γ_R constituée par l'intervalle $[-R, R]$ et le demi-cercle $C_R \subset H$ centré à l'origine de rayon R . Donc : d'après le théorème des résidus on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz &= \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \\
&= 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} Res \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right)
\end{aligned}$$

Notons que puisque $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(z)) + 1$ il s'ensuit que :

$\frac{P(z)}{Q(z)}$ tend vers zéro quand z tend l'infini.

Donc : la fonction

$$M(R) = \sup \left\{ \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| ; z = Re^{i\theta} \text{ avec } 0 \leq \theta \leq \pi \right\} \longrightarrow 0$$

Quand $R \rightarrow +\infty$ Ainsi, puisque le module

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{p(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \right| &\leq M(R) \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin(\theta)} d\theta \\ &\leq 2M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin(\theta)} d\theta \\ &\leq 2M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R \theta/\pi} d\theta \\ \text{Car } \sin(\theta) &\geq 2\theta/\pi \quad \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\leq \frac{\pi M(R)}{\alpha R} [1 - e^{-\alpha R}] \end{aligned}$$

On déduit que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 0$.

Par conséquent l'intégrale simple généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_k \right).$$

2. Le paramètre $\alpha < 0$: On désigne par $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ les racines de $Q(x)$ qui appartiennent au demi-plan inférieur H^- , pour tout le réel R , tel que

$$R \geq \max(|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|)$$

on intègre la fonction $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$ sur la courbe fermée Γ_R constituée par le demi-cercle $C_R = \{R e^{i\theta}; \theta \in [-\pi, \pi]\} \subset H^-$ et l'intervalle $[-R, R]$ parcouru dans le sens opposé. Comme ci-dessus en appliquant le théorème des résidus sur Γ_R on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz &= - \int_{-R}^R \frac{p(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, u_k \right) \end{aligned}$$

Et ainsi le passage à la limite sur R vers l'infini implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{k=n} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, u_k \right)$$

Exemple 6.2.

Pour tout réels $a > 0$ et $b > 0$ calculons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2} dx$

D'après la méthode décrite ci-dessus en intégrant la fonction $\frac{e^{ibz}}{a^2 + z^2}$ sur la courbe simple fermée Γ_R , constituée par un demi-cercle C_R contenu dans le demi-plan supérieur H centré à l'origine et de rayon $R > 0$ et l'intervalle $[-R, R]$. On obtient lorsque R tend vers $+\infty$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2 + a^2} dx &= 2\pi i \operatorname{Rés} \left(\frac{e^{ibz}}{z^2 + a^2}, ia \right) \\
&= 2\pi i \frac{e^{-ba}}{2ia} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^2 + a^2} dx \\
&= \frac{\pi e^{-ba}}{a}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{a} e^{-ba} \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^0 \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{a} e^{-ba}
\end{aligned}$$

On fait le changement $y = -x$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \frac{\cos (bx)}{(x)^2 + a^2} (-dx) &= \int_{+\infty}^0 \frac{\cos (-by)}{(-y)^2 + a^2} (-dy) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\cos by}{y^2 + a^2} dy \\
\Rightarrow 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{a} e^{-ba}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ba}$$

6.6 Calcul des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx$:

Définition 6.4.

Dans ce paragraphe, on va adapter la méthode décrite au paragraphe précédant au cas des fonctions $\frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x}$ avec $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fonction rationnelle tel que le polynome $Q(x)$ ne possède pas des racines et son $\deg(Q(x)) \geq \deg(P(x))$

Notons que dans ces conditions pour l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx$, il suffit qu'on intègre la fonction

$$\frac{P(x) e^{i\alpha x}}{Q(x) x}$$

sur la courbe fermée $\Gamma_{r,R}$, constituée par le demi-cercle

$$C_R = \{R e^{i\theta}; \theta \in [0, \pi]\}, \text{ si } \alpha > 0.$$

Mais si $\alpha < 0$, on prend $\theta \in [-\pi, 0]$, et l'intervalle

$$I_- = [-R, -r]$$

Le demi cercle

$$C_r = \{re^{i\theta}, \theta \in [-\pi, 0]\}$$

Enfin l'intervalle

$$I_+ = [r, R],$$

$$r < \min(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$

et

$$R > \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$

Donc, d'après le théorème des résidus on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{r,R}} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx &= \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{C_r^-} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \\ &+ \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \\ &= 2\pi \sum_{k=1}^n \text{Rés} \left(\frac{P(x)}{Q(x)}, z_k \right) \end{aligned}$$

Notons aussi que si on procède comme ci-dessus on vérifie que l'intégrale

$$\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$$

tend vers zéro quand le rayon R tend vers $+\infty$ pour calculer la limite de l'intégrale

$$\int_{C_r^-} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$$

lorsque $r \rightarrow 0$, on va démontrer le 2^{ième} lemme de Jordan.

6.7 Calcul des intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ avec $-1 < \alpha < 0$

Définition 6.5. [5, 6, 9, 10, 11]

Dans ce paragraphe étant donnée une fraction

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

qui a que des pôles non réels tel que le

$$\text{deg}(Q(x)) \geq \text{deg}(P(x)) + 1$$

On va décrire une méthode qui permet de calculer les intégrales généralisées de type

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

avec $-1 < \alpha < 0$.

Notons d'abord que si dans l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

on effectue le changement de variable $x = e^t$, on obtient $dx = e^t dt$ que :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+1)t} \frac{P(e^t)}{Q(e^t)} dt$$

Notons aussi que si $u = \log(z)$ désigne la détermination principale du logarithme complexe telle que $\arg(z) \in]0, 2\pi[$.

On déduit que si $z_0 \neq 0$ est un pôle de la fraction $\frac{P(z)}{Q(z)}$ alors, le nombre complexe

$u_0 = \log(z_0)$ est une singularité de la fonction $\frac{P(e^u)}{Q(e^u)}$.

Suite à ces remarques on déduit que pour calculer l'intégrale de type

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Il suffit qu'on applique le théorème des résidus à la fonction

$$e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)}$$

sur le rectangle C_R indiquée sur la figure suivante

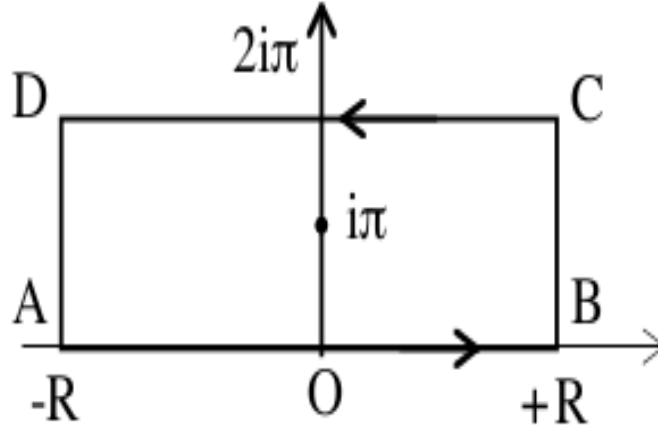


FIGURE 6.3 – Le chemin associé

$$\int_{ABCD} e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)} du = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)}, u_k \right)$$

$$\begin{aligned} \int_{ABCD} e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)} du &= \int_{-R}^R e^{(\alpha+1)x} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx + i \int_0^{2\pi} e^{(\alpha+1)(R+iy)} \frac{P(e^{R+iy})}{Q(e^{R+iy})} dy \\ &+ \int_R^{-R} e^{(\alpha+1)(x+2\pi i)} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx + i \int_{2\pi}^0 e^{(\alpha+1)(-R+iy)} \frac{P(e^{-R+iy})}{Q(e^{-R+iy})} dy \\ &= (1 - e^{2\pi(\alpha+1)i}) \int_{-R}^R e^{(\alpha+1)x} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx \\ &+ i \int_0^{2\pi} e^{(\alpha+1)(R+iy)} \frac{P(e^{R+iy})}{Q(e^{R+iy})} dy \\ &- i \int_0^{2\pi} e^{(\alpha+1)(-R+iy)} \frac{P(e^{-R+iy})}{Q(e^{-R+iy})} dy \end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout réel $R > 0$ assez grand on a :

$$\left| e^{(\alpha+1)(R+iy)} \frac{P(e^{R+iy})}{Q(e^{R+iy})} \right| \simeq e^{(\alpha+1)R} \frac{C}{e^{nR}}$$

et

$$\left| e^{(\alpha+1)(-R+iy)} \frac{P(e^{-R+iy})}{Q(e^{-R+iy})} \right| \simeq R^{-(\alpha+1)R} C$$

Ou $n \in \mathbb{N}^*$ on déduit que si $R \rightarrow \infty$ on obtient les deux expressions suivantes :

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -\frac{-\pi e^{-\alpha i}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(z^\alpha \frac{P(z)}{Q(z)}, z_k \right)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+1)x} \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx = -\frac{\pi e^{-\pi\alpha i}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(e^{(\alpha+1)u} \frac{P(e^u)}{Q(e^u)}, x_k \right)$$

Exemple 6.3.

Pour tout $0 < \alpha < 1$, calculons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx$

Pour calculer cette intégrale nous considérons le rectangle Γ_R dont les cotés sont $[-R, R]$, $[R; R+2\pi i]$, $[R+2\pi i, -R+2\pi i]$ et $[-R+2\pi i, -R]$ (voir la figure) et nous appliquerons le théorème des résidus à la fonction ;

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z} \text{ Sur } \Gamma_R$$

La courbe Γ_R est simple fermée et borde un rectangle du demi-plan supérieur qui contient le pôle simple πi de $f(z)$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \pi i) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{(z - \pi i) e^{\alpha z}}{1 + e^z} \\ &= 2\pi i \frac{e^{\alpha \pi i}}{e^{\pi i}} \\ &= -2\pi i e^{\alpha \pi i} \end{aligned}$$

Observons que par définition d'une intégrale curviligne, on peut écrire ;

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} dy \\ &+ \int_R^{-R} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{(x+2\pi i)}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{ie^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} dy \\ &= (1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} dy \\ &- \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} dy \end{aligned}$$

Ainsi puis que le paramètre $0 < \alpha < 1$ et pour tout réel $y \in [0, 2\pi]$

On a ;

$$\left| \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| \leq \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} \simeq e^{(\alpha-1)R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1 + e^{R+iy}} dy = 0$$

et :

$$\left| \frac{ie^{\alpha(-R+iy)}}{1 + e^{-R+iy}} \right| \leq \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}} \simeq e^{-\alpha R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\alpha(R+iy)}}{1 + e^{R+iy}} dy = 0$$

On en déduit que si R tend vers l'infini on obtient :

$$(1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = -2\pi i e^{\alpha\pi i}$$

Par conséquent , pour tout réel $0 < \alpha < 1$ l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

6.8 L'intégrale sous forme $\int_a^b f(x) dx$ avec a, b des point singuliers de f :

Donc on choisit un chemin γ qui contient le morceau $[a, b]$ comme l'exemple suivant :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2 (\sqrt{1 - x^2})}$$

On prend

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2 (\sqrt{1 - z^2})}$$

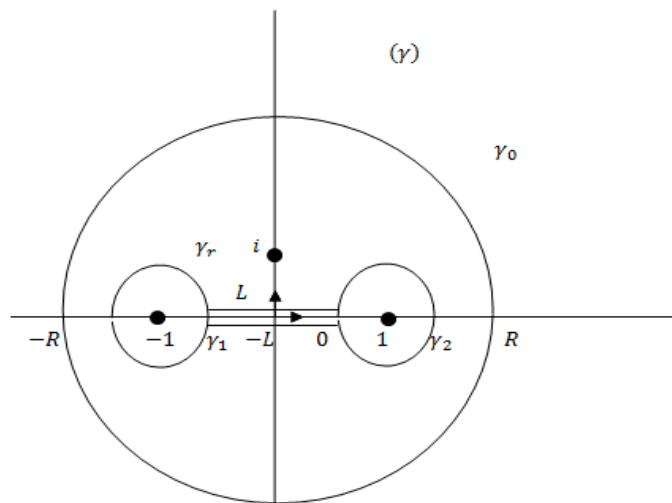


FIGURE 6.4 – le chemin γ associé à l'exemple

Donc $z_0 = 1$, $z_1 = -1$ sont des points singuliers de f et on a aussi $z_2 = i$, $z_3 = -i$ deux pôles d'ordre 2.

$$(z - 1) = r_1 e^{i\theta_1}, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \text{ alors } 1 - z = r_1 e^{i(\theta_1 + \pi)}.$$

$$(z + 1) = r_2 e^{i\theta_2}, \quad 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$$

Alors

$$\begin{aligned} g(z) &= \sqrt{1 - z^2} \\ &= \sqrt{(z + 1)(1 - z)} \\ &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \pi}{2}\right) + k\pi i}, \quad k = 0, 1 \end{aligned}$$

Si on prend $k = 0$ donc

$$\begin{aligned} g(i) &= \sqrt{\sqrt{2} * \sqrt{2}} * e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi\right)} \\ &= \sqrt{2} e^{\pi i} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-i) &= \sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= +\sqrt{2} \end{aligned}$$

On prend γ :

$$\gamma = \Gamma \cup \{-L\} \cup \gamma_0 + DC + \gamma_1 + AB + \gamma_2 + L$$

(notre fonction $\sqrt{1 - z^2}$ est analytique et une seule valeur.)

$$f(z) = \frac{1}{(1 + z^2)^2 \sqrt{1 - z^2}}$$

quand $z \in (AB)$

$$\begin{aligned} g(z) &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{\pi + \pi}{2}\right)}, \quad \theta_1 + \theta_2 = \pi \\ &= \sqrt{r_1 r_2} \\ &= -\sqrt{(1 - x)(1 + x)} \\ &= -\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

$z \in (CD) \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 3\pi$, alors

$$\begin{aligned} g(z) &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{4\pi}{2}\right)} \\ &= \sqrt{r_1 r_2} \\ &= \sqrt{1 - u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{-L} f(z) dz + \int_L f(z) dz + \int_{\gamma_0} f(z) dz \\ &+ \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{DC} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \\ &= \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz \\ &+ \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{-1+r}^{1-r} f(z) dz + \int_{1-r}^{-1+r} f(z) dz \end{aligned}$$

$z = Re^{i\theta}$ alors

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{(1+z^2)^2 + \sqrt{1+z^2}} \right| \\ &\leq \frac{1}{(R^2+1)^{5/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma} |f(z)| dz \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{R}{(R^2+1)^{3/2}} dz \\ &= \frac{2\pi R}{(R^2+1)^{3/2}} \\ &\rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

$z \in \gamma_2$ alors $z = 1 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{(1+z^2) \sqrt{(1-z)(1+z)}} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{r}} \\ \int_{\gamma_2} f(z) dz &\leq \frac{\pi r}{\sqrt{r}} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Sur γ_0 de même principe, on trouve :

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz \rightarrow 0$$

$$(r \rightarrow 0).$$

Sur γ_1 : $z = -1 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi r}{\sqrt{r}} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0).$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)) \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-i)^2}{(z-i)^2 (z+i)^2 \sqrt{1-z^2}} \right) \right) \\ &+ 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z+i)^2}{(z-i)^2 (z+i)^2 (\sqrt{1-z^2})} \right) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{-6}{16\sqrt{2}} + \frac{-6}{16\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{-12}{8\sqrt{2}} \pi \\ &= \frac{-3\pi}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{-3\pi\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Donc quand on passe à la limite $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow +\infty$

$$2 \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \frac{-3\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \frac{-3\pi\sqrt{2}}{8}$$

6.9 Principe de l'argument

Théorème 6.2. [1, 8, 6] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine simplement connexe Ω

Soit γ un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous les pôles et zéros de $f(z)$ dans Ω . Alors

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{ind}_{f \circ \gamma}(0)$$

6.10 Théorème de Rouché[1]

Théorème 6.3. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes dans un domaine simplement connexe Ω et sur sa frontière γ .

Supposons qu'en tout point de γ , on ait $|f(z)| > |g(z)|$. Alors $f(z)$ et $f(z) + g(z)$ ont le même nombre de zéros dans Ω .

6.11 Exercices

Exercice 6.1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx$

Exercice 6.2. Soit $f = \frac{ze^{iz}}{z^2+1}$ avec $z \in \mathbb{C}$

1. Déterminer les points singuliers de f et calculer le résidu à chaque point.
2. Déterminer la paramétrisation de γ , le contour défini par le segment $\Gamma_R = [-R, R]$ et le demi-cercle C_R de centre 0 et rayon R ou $R > 1$

3. Calculer $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$, $\int_{C_R} f(z)dz$, $\int_{\gamma} f(z)dz$.

4. Dédurre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2+1} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2+1} dx$.

5. Dédurre $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2+1} dx$

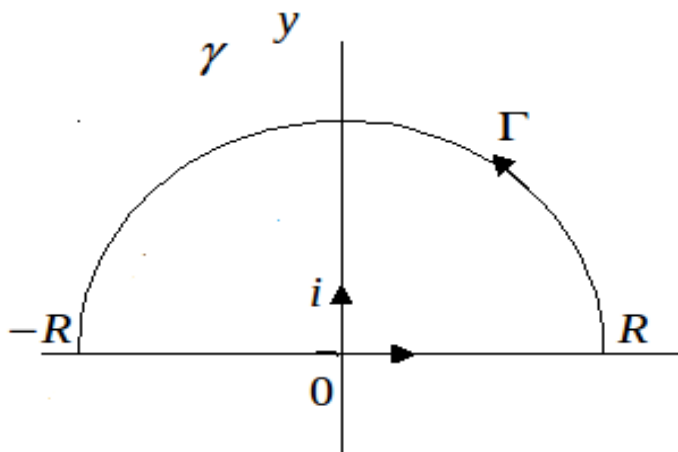


FIGURE 6.5 – le chemin γ associé à l'exercice 1 et 2

Exercice 6.3. Soit $f(z) = \frac{z}{z^5 + 1}$ avec $z \in \mathbb{C}$

1. Déterminer les points singuliers de f et calculer le résidu des point dans $\gamma = \gamma_R \cup [0, R] \cap \Gamma_R^\circ$.
2. Déterminer la paramétrisation de γ (figure)
3. Calculer $\int_{\gamma_R} f(z)dz$, $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$, $\int_{[0,R]} f(z)dz$ et $\int_{\gamma} f(z)dz$.
4. Dédire $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^5 + 1} dx$

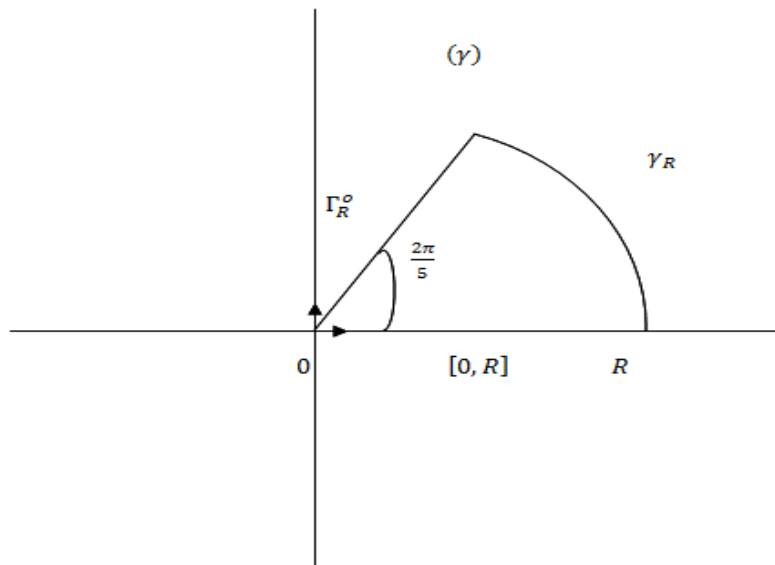


FIGURE 6.6 – le chemin γ associé à l'exercice 3

Exercice 6.4. Soient $f(z) = \frac{e^{i(1+a)z} + e^{i(1-a)z}}{2z}$ avec $z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}, |a| < 1$ et (γ) défini dans la figure en face.

1. Déterminer les points singuliers de f et calculer le résidu de chaque points.
2. Montrer que $\frac{e^{i(1+a)x} + e^{i(1-a)x}}{2x} = \frac{\cos(x)\cos(ax)}{x} + i\frac{\sin(x)\cos(ax)}{x}$
(En utilisant $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ et $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$)
3. Déterminer la paramétrisation de $\gamma = \gamma_R \cup \gamma_r \cup \Gamma_R \cup \Gamma'_R$ avec $R > 1$.

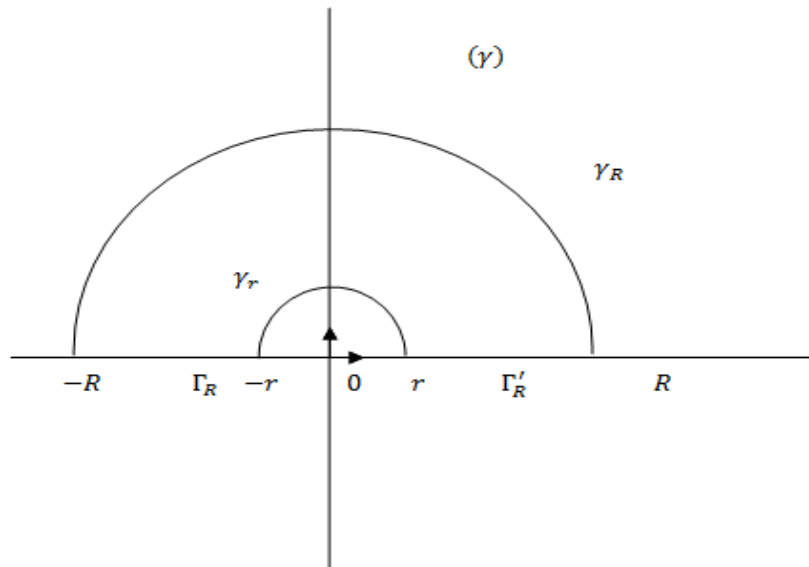


FIGURE 6.7 – le chemin γ associé à l'exercice 4

4. Calculer $\int_{\gamma_R} f(z)dz, \int_{\gamma_r} f(z)dz, \int_{\Gamma'_R} f(z)dz, \int_{\Gamma_R} f(z)dz$ et $\int_{\gamma} f(z)dz$. Et ses limites quand $R \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 0$
5. Dédire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)\cos(ax)}{x} dx$

Exercice 6.5. Soient $f(z) = \frac{z}{z^3 + 1}$ avec $z \in \mathbb{C}$ et (γ) défini dans la figure.

1. Déterminer les points singuliers de f et calculer le résidu des points qu'ils sont dans (γ) .
2. Déterminer la paramétrisation de $\gamma = \gamma_R \cup \Gamma_R \cup [0, R]$ avec $R > 1$.
3. Calculer $\int_{\gamma_R} f(z)dz, \int_{\Gamma_R} f(z)dz, \int_{[0,R]} f(z)dz$ et $\int_{\gamma} f(z)dz$.
4. Dédire $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx$

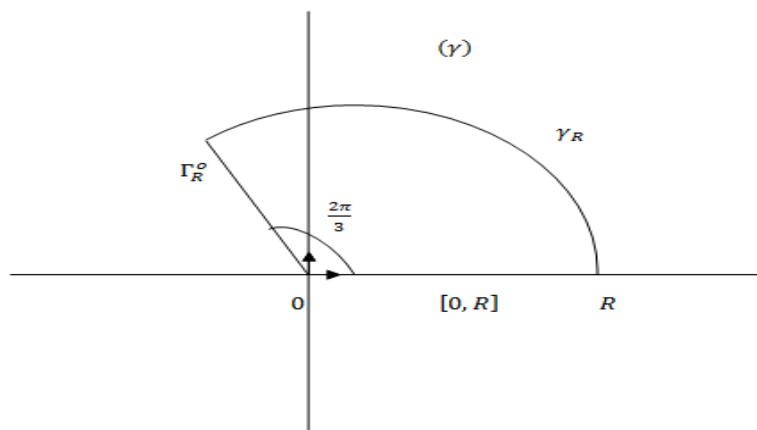


FIGURE 6.8 – le chemin γ associé à l'exercice 5

Exercice 6.6. Soit $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4 + 4}$ avec $z \in \mathbb{C}$.

1. Calculer $(1 + i)^2$ et $(1 - i)^2$.
2. Calculer les solutions de $z^4 + 4 = 0$ et calculer le résidu des points singulier de f dans $\gamma = \gamma_R \cup \Gamma_R$.
3. Déterminer la paramétrisation de γ (figure en bas)
4. Calculer $\int_{\gamma_R} f(z)dz$, $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$ et $\int_{\gamma} f(z)dz$.
5. Dédurre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4 + 4} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^4 + 4} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^4 + 4} dx$
6. Dédurre $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^4 + 4} dx$

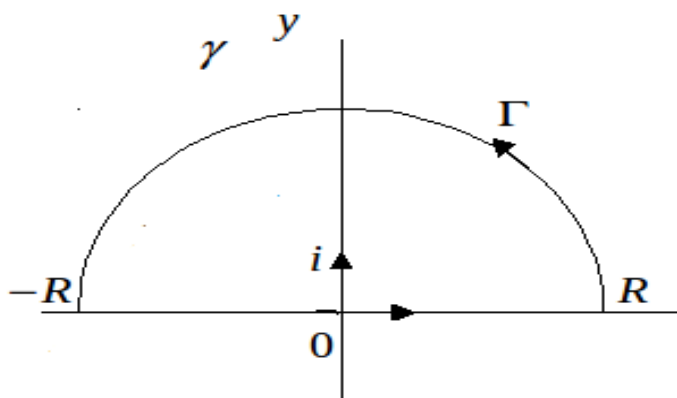


FIGURE 6.9 – le chemin γ associé à l'exercice 6

6.12 Solutions

Solution Ex 6.1

Soit $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$
Alors $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$
et $\gamma = \gamma_1 + [-R, R]$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz + \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx \\ (*) \quad 2\pi i \times \text{Res}(f, i) &= \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{R^2 e^{2it} + 1} \times iR^2 e^{it} + \int_{-R}^R \frac{\cos x + i \sin x}{x^2 + 1} \\ &= 2\pi i \times \frac{e^{-1}}{2i} \\ &= \frac{\pi}{e}\end{aligned}$$

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{ie^{iRe^{it}}}{R^2 e^{2it} + 1} \times Re^{it} \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-R \sin t}}{R^2 - 1} \times R \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty$$

Alors

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow \frac{\pi}{e} &= \lim \int_0^{\pi} \frac{ie^{iRe^{it}}}{R^2 e^{2it} + 1} \times Re^{it} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x^2 + 1} \\ \frac{\pi}{e} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}$$

$$\text{Et } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx = 0$$

Et puisque $\cos x$ est une fonction paire et $x^2 + 1$ aussi alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} dx$$

Alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Solution Ex 6.2

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1}$$

1. Les points singuliers de f
 $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)ze^{iz}}{(z - i)(z + i)} \\ &= \frac{ie^{-1}}{2i} \\ &= \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, -i) &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z + i)ze^{iz}}{(z - i)(z + i)} \\ &= \frac{-ie}{-2i} \\ &= \frac{e}{2} \end{aligned}$$

2. La paramétrisation

$$\begin{aligned} \Gamma_R &= [-R, R] \rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow t \\ C_R &: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow Re^{it} \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} f(z) &= \int_{-R}^R f(\Gamma_R)\Gamma'_R(t)dt \\ &= \int_{-R}^R \frac{te^{it}}{t^2 + 1} dt \\ \int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_0^\pi f(\gamma_R(t))\gamma'_R(t)dt \\ &= i \int_0^\pi \frac{Re^{it} \times e^{iRe^{it}}}{R^2e^{2it} + 1} \times Re^{it} dt \\ \int_\gamma f(z)dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) \\ &= 2\pi i \times \frac{1}{2e} = \frac{\pi i}{e} \\ &= \int_{-R}^R f(t)dt + \int_{\gamma_R} f(z)dz \end{aligned}$$

4. Passage à la limite

$$\int_0^\pi \frac{R^2 e^{it} \times e^{iRe^{it}}}{R^2 e^{2it} + 1} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

par lemme de Jordan (02)

on a $\frac{z}{z^2 + 1} e \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0$ et γ_R est demi cercle de rayon R $0 \leq t \leq \pi$

alors $\lim \int_{\gamma_R} \frac{z}{z^2 + 1} e^{ikz} = 0$ pour $k \geq 0$

On a $k = 1$

Alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{it}}{t^2 + 1} dt$$

alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{it}}{t^2 + 1} dt + 0 = \frac{\pi i}{e}$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{it}}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi i}{e}$$

On a $e^{it} = \cos t + i \sin t$
donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cos t}{t^2 + 1} dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi i}{e}$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cos t}{t^2 + 1} dt = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi i}{e}\right) = 0$$

Et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + 1} dt = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi i}{e}\right) = \frac{\pi}{e}$$

5.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + 1} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{t \sin t}{t^2 + 1} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + 1} dt$$

Par le changement de variable $t = -y$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{t \sin t}{t^2 + 1} dt &= \int_{+\infty}^0 \frac{-y \sin(-y)}{y^2 + 1} (-dy) \\ &= \int_{+\infty}^0 -\frac{y \sin y}{y^2 + 1} (dy) = \int_0^{+\infty} \frac{y \sin y}{y^2 + 1} (dy) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + 1} dt &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + 1} dt \\ \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + 1} dt &= \frac{1}{2} \pi \end{aligned}$$

Solution Ex 6.3

$$f(z) = \frac{z}{z^5 + 1}$$

1. Les points singuliers de f :

$$z^5 + 1 = 0 \Rightarrow z^5 = -1 = e^{(\pi + 2k\pi)i}$$

$$\text{alors } z_k = e^{\frac{\pi + 2k\pi}{5}i} \quad k = \overline{0, 4} \text{ Donc}$$

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{5}i}, \quad z_1 = e^{\frac{3\pi}{5}i}, \quad z_2 = e^{\pi i} = -1, \quad z_3 = e^{\frac{7\pi}{5}i}, \quad z_4 = e^{\frac{9\pi}{5}i}$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi}{5}i}} \frac{(z - e^{\frac{\pi}{5}i}) \times z}{z^5 + 1}$$

$$z^5 + 1 = (z - e^{\frac{\pi}{5}i})(z^4 + e^{\frac{\pi}{5}i}z^3 + e^{\frac{2\pi}{5}i}z^2 + e^{\frac{3\pi}{5}i}z + e^{\frac{4\pi}{5}i})$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{e^{\frac{\pi}{5}i}}{5e^{\frac{\pi}{5}i}} = \frac{1}{5e^{\frac{4\pi}{5}i}}$$

2. Paramétrisation de γ :

$$\begin{aligned} [0, R] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow t \\ \Gamma_R = [0, R] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow te^{\frac{2\pi}{5}i} \\ \gamma_R : [0, \frac{2\pi}{5}] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow Re^{it} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{\frac{\pi}{5}i}) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{3\pi} \right) \\ &\quad \frac{5e^{\frac{\pi}{5}i}}{5e^{\frac{\pi}{5}i}} \\ &= \frac{2\pi i}{3\pi} \\ &\quad \frac{5e^{\frac{\pi}{5}i}}{5e^{\frac{\pi}{5}i}} \\ \int_{[0, R]} f(z)dz &= \int_0^R \frac{t}{t^5 + 1} dt \\ \int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_0^R \frac{2\pi}{5} \frac{iRe^{it} \times Re^{it}}{R^5 e^{5it} + 1} dt \\ \int_{\Gamma_R} f(z)dz &= - \int_{\Gamma_R} f(z)dz = - \int_0^R f(e^{\frac{2\pi}{5}i}) \times e^{\frac{2\pi}{5}i} \\ &= -e^{\frac{2\pi}{5}i} \int_0^R \frac{te^{\frac{2\pi}{5}i}}{t^5 + 1} dt \\ &= -e^{\frac{4\pi}{5}i} \int_0^R \frac{t}{t^5 + 1} dt \end{aligned}$$

4. $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) = 0$ par le premier lemme de Jordan : $\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z}{z^5 + 1} = 0$
alors $\int_{\gamma_R} \frac{z}{z^5 + 1} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$

On aura

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^5+1} dt - e^{\frac{4\pi}{5}i} \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^5+1} dt &= \frac{2\pi i e^{\frac{-3\pi}{5}i}}{5} \\
 &= (1 - \cos(\frac{4\pi}{5})) \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^5+1} dt \\
 &+ i \sin \frac{4\pi}{5} \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^5+1} dt \\
 &= \frac{2\pi}{5} (i \cos(\frac{3\pi}{5}) + \sin(\frac{3\pi}{5}))
 \end{aligned}$$

alors
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^5+1} dt = \frac{2\pi \cos \frac{3\pi}{5}}{5 \sin \frac{4\pi}{5}}$$

Solution Ex 6.4

- 1) Les points singuliers de f
 $z = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{i(1+a)z} + e^{i(1-a)z}}{2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

- 2)

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{i(1+a)z} + e^{i(1-a)z}}{2x} &= \frac{\cos(1+a)x + i \sin(1+a)x}{2x} + \frac{\cos(1-a)x + i \sin(1-a)x}{2x} \\
 &= \frac{\cos x \cos ax - \sin x \sin ax + \cos x \cos ax + \sin x \sin ax}{2x} \\
 &+ i \frac{\sin x \cos ax + \cos x \sin ax + \sin x \cos ax - \cos x \sin ax}{2x} \\
 &= \frac{\cos x \cos ax}{x} + i \frac{\sin x \cos ax}{x}
 \end{aligned}$$

- 3) La paramétrisation de γ

- a)

$$\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \rightarrow Re^{it}$$

b)

$$\begin{aligned}\Gamma_R : [-R, -r] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow t\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\Gamma'_R : [r, R] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow t\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\gamma_r : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow re^{it}\end{aligned}$$

4) On calcule les intégrales suivants :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{R'}} f(z)dz &= \int_r^R f(\Gamma_{R'}) \times \Gamma'_{R'}(t)dt \\ &= \int_r^R \frac{e^{i(1+a)t} + e^{(1-a)t}}{2t} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} f(z)dz &= \int_{-R}^{-r} f(\Gamma_R) \times \Gamma'_R(t)dt \\ &= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i(1+a)t} + e^{(1-a)t}}{2t} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r} f(z)dz &= - \int_{\gamma_r} f(\gamma_r(t)) \times \gamma'_r(t)dt \\ &= - \int_0^\pi \frac{e^{i(1+a)re^{it}} + e^{(1-a)re^{it}}}{2re^{it}} \times ire^{it} dt \\ &= - \int_0^\pi i \frac{e^{ri(1+a)e^{it}} + e^{ri(1-a)e^{it}}}{2} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} f(z)dz &= \int_0^\pi f(\gamma_R(t)) \gamma'_R(t)dt \\ &= \int_0^\pi i \frac{e^{i(1+a)Re^{it}} + e^{i(1-a)Re^{it}}}{2Re^{it}} dt \times iRe^{it}\end{aligned}$$

$$A = \frac{i}{2} \int_0^\pi (e^{i(1+a)Re^{it}} + e^{i(1-a)Re^{it}}) dt$$

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{1}{2} \int_0^\pi |e^{i(1+a)Re^{it}} + e^{i(1-a)Re^{it}}| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (e^{i(1+a)R \sin t} + e^{i(1-a)R \sin t}) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(1+a)R \sin t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(1-a)R \sin t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin t > \frac{2t}{\pi} &\Rightarrow -R \sin t \leq -\frac{2Rt}{\pi} \\ |a| < 1 &\Rightarrow -1 < a < 1 \Rightarrow 1-a > 0, 1+a > 0 \\ * -R \sin t(a+1) &\leq -(a+1) \frac{Rt}{\pi} \\ * -R \sin t(a-1) &\leq -(a-1) \frac{Rt}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(1+a)\frac{Rt}{\pi}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(1-a)\frac{Rt}{\pi}} dt \\ &\leq \frac{\pi}{-(1+a)R} e^{-\frac{Rt}{\pi}(1+a)} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{-(1-a)R} e^{-\frac{Rt}{\pi}(1-a)} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{-(1+a)R} (e^{-2(1+a)R} - 1) + \frac{\pi}{-(1-a)R} (e^{-2(1-a)R} - 1) \\ &\rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$0 < \lim_{R \rightarrow +\infty} |A| < 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} |A| = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz &= \lim - \int_0^\pi i \frac{e^{ri(1+a)e^{it}} + e^{ri(1-a)e^{it}}}{2} dt \\ &= -i \int_0^\pi dt = -i\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z) dz &= \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_r} + \int_{\Gamma_R} + \int_{\Gamma'_R} \\ &= -i\pi + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i(1+a)t} + e^{i(1-a)t}}{2t} dt \\ &+ \int_0^\infty \frac{e^{i(1+a)t} + e^{i(1-a)t}}{2t} dt \\ &= 0 \text{ pas de point singulier à l'intérieur de } \gamma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i(1+a)t} + e^{i(1-a)t}}{2t} dt = i\pi$$

5) On a

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(1+a)t} + e^{i(1-a)t}}{2t} dt \right) = i\pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} = i\pi$$

Solution Ex 6.5

Soit $f(z) = \frac{z}{z^3 + 1}$, $z \in \mathbb{C}$

1) Les point singuliers de f

$$z^3 + 1 = 0$$

$$z^3 = -1 = e^{(\pi + 2k\pi)i}$$

$$z_k = e^{\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)i}, k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2i} = z_0$$

$$z_1 = e^{\pi i} = -1 = z_1$$

$$z_2 = e^{\frac{5\pi i}{3}} = e^{2\pi \frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} = z_2$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \times \frac{z}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)} \\ &= \frac{z_0}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2i}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2i} + 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2i} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2i}\right)} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3}i(3 + \sqrt{3}i)} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3}i)(-i)(3 - \sqrt{3}i)}{\sqrt{3}i(3 + \sqrt{3}i)(-i)(3 - \sqrt{3}i)} \\ &= \frac{3i + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 3i}{\sqrt{3}(9 + 3)} = \frac{-6i + 2\sqrt{3}}{12\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}i \end{aligned}$$

2)

$$\gamma_R : \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \rightarrow Re^{it}$$

$$\Gamma_R : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \rightarrow t$$

$$\Gamma_{R'} : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \rightarrow te^{\frac{2\pi}{3}i}$$

3) Les intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{R'}} f(z) dz &= - \int_{\Gamma_R} f(z) dz = - \int_0^R f(\Gamma_{R'})(\Gamma_{R'}) \\ &= - \int_0^R \frac{te^{\frac{2\pi}{3}i}}{t^3 + 1} \times e^{\frac{2\pi}{3}i} dt \\ &= -e^{\frac{4\pi}{3}i} \int_0^R \frac{t}{t^3 + 1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} f(z) dz &= \int_0^R \frac{t}{t^3 + 1} dt \\ \int_{\gamma_R} f(z) dz &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{Re^{it}}{R^3 e^{3it} + 1} \times Rie^{it} dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{R^2 e^{2it}}{R^3 e^{3it} + 1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, R_0) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{\pi}{3}i \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz &= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + \frac{\pi}{3} i \\
 &= \lim \int_{\gamma_R} + \int_{[0, R]} + \int_{\Gamma_R} \\
 &= \lim \int_{\gamma_R} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{t}{t^3 + 1} dt - e^{\frac{4\pi}{3} i} \int_0^R \frac{t}{t^3 + 1} dt
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + \frac{\pi}{3} i = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} + (1 - \exp(\frac{4\pi}{3} i)) \int_0^R \frac{t}{t^3 + 1} dt$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{R^2}{R^3 + 1} dt = \frac{R^2}{R^3 + 1} \frac{2\pi}{3}, R \rightarrow 0$$

$$\text{alors } (1 - e^{\frac{4\pi i}{3}}) \int_0^{\infty} \frac{t}{t^3 + 1} dt = \frac{\pi}{3} (\sqrt{3} + i)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{t}{t^3 + 1} dt = \frac{\pi}{3} \frac{(\sqrt{3} + i)}{\frac{4\pi i}{1 - e^{\frac{4\pi}{3} i}}}$$

$$= \frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3} + i}{1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3} + i}{3 + \sqrt{3}i} \times \frac{\sqrt{3} - i}{3 - \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \times \frac{3\sqrt{3} + 3i - 3i + \sqrt{3}}{9 + 3}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{t^3 + 1} dt = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

Solution Ex 6.6

$$\text{Soit } f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4 + 4}$$

1. On a $(1 + i)^2 = 2i$ et $(1 - i)^2 = -2i$.
2. Les point singuliers de f :

$$\begin{aligned} z^4 + 4 &= 0 \\ \Rightarrow z^4 &= -4 = 4i^2 \\ \Rightarrow z^2 &= 2i \quad \text{ou} \quad z^2 = -2i \end{aligned}$$

$$\text{Alors } z_0 = 1 + i, z_1 = -1 - i, z_2 = 1 - i, z_3 = -1 + i$$

a)

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \times \frac{e^{iz}}{(z - z_0)(z - z_1)(z^2 + 2i)} \\ &= \frac{e^{iz_0}}{(z_0 - z_1)(z_0^2 + 2i)} \\ &= \frac{e^{i-1}}{8i(1 + i)} \\ &= \frac{-e^i}{16e}(i + 1) \\ &= \frac{-1}{16e}[\cos(1) + i\sin(1)](i + 1) \\ &= \frac{-1}{16e}([\cos(1) - \sin(1)] + i[\cos(1) + \sin(1)]) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_3) &= \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3) \times \frac{e^{iz}}{(z - z_3)(z - z_2)(z^2 - 2i)} \\ &= \frac{e^{iz_3}}{(z_3 - z_2)(z_3^2 - 2i)} \\ &= \frac{e^{-i-1}}{8i(1 - i)} \\ &= \frac{-e^{-i}}{16e}(i - 1) \\ &= \frac{-1}{16e}[\cos(1) - i\sin(1)](i - 1) \\ &= \frac{-1}{16e}([- \cos(1) + \sin(1)] + i[\cos(1) + \sin(1)]) \end{aligned}$$

3.

$$\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \rightarrow Re^{it}$$

$$\Gamma_R : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \rightarrow t$$

4. Les intégrales :

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{t^4 + 4} dt$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{R^4 e^{4it} + 4} iRe^{it} dt$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= 2i\pi(\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_3)) \\ &= 2i\pi \frac{-1}{16e}([\cos(1) - \sin(1)] + i[\cos(1) + \sin(1)]) \\ &+ 2i\pi \frac{-1}{16e}([- \cos(1) + \sin(1)] + i[\cos(1) + \sin(1)]) \\ &= \frac{\pi}{4e}([\cos(1) + \sin(1)]) \end{aligned}$$

5.

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^4 + 4} dt$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{R^4 e^{4it} + 4} iRe^{it} dt$$

Par le deuxième lemme de Jordan :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{z^4 + 4} dz = 0 \text{ et } k = 1, \text{ alors :}$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^4 + 4} dt = \frac{\pi}{4e}([\cos(1) + \sin(1)])$$

Puisque $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4 + 4} dt = \text{Re}\left(\frac{\pi}{4e}([\cos(1) + \sin(1)])\right) = \frac{\pi}{4e}([\cos(1) + \sin(1)])$$

Et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^4 + 4} dt = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{4e}([\cos(1) + \sin(1)])\right) = 0$$

6. Puisque la fonction \cos est paire alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4 + 4} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4 + 4} dt$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^4 + 4} dt = \frac{\pi}{8e}([\cos(1) + \sin(1)]).$$



Conclusion

Dans ce cours, nous avons présenté la construction de l'ensemble \mathbb{C} et nous avons définis les opérateurs sur cet ensemble. Après, on a défini de la fonction de la variable complexe, les fonctions holomorphes, les fonctions analytiques, les condition de Cauchy-Riemann et les fonctions harmoniques. Ensuite on a défini les fonctions exponentielle, logarithme, circulaires, hyperboliques et puissances.

On a présenté le Calcul intégral et l'utilisation d'intégrale curviligne, théorème de Cauchy, formule intégrale de Cauchy, formule de la moyenne, formule intégrale de Cauchy pour les dérivées, inégalité de Cauchy et théorème de Liouville-Théorème de Morera.

On a présenté aussi le développement en série Taylor et en série de Laurent et singularité isolées d'une fonction complexe.

Enfin une application de théorème des résidus avec des exemples et des exercices résolus.



Bibliographie

- [1] Michèle Audin. Analyse complexe. *Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS*, 2011.
- [2] B. Belaidi. Analyse complexe cours et exercices corrigés. *Deuxième édition*, page 245, 2009.
- [3] C.M. Bethke. Geochemical reaction modeling : Concepts and applications. *Oxford university Press US*, 1996.
- [4] John B. Conway. Functions of one complex variable. *Springer-Verlag, New York*, 1978.
- [5] P. Eyssidieux. Analyse complexe. *Lyon*, 2013-2014.
- [6] André Giroux. Analyse complexe : Cours et exercices corrigés. *Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal*, 2013.
- [7] A. Lesfari. Analyse complexe. *SMA 6*, 2014-2018.
- [8] B. Chabat M. Lavrentiev. Méthode de la théorie des fonctions d'une variable complexe. *Edition Mir, Moscou*, 1977.
- [9] W. Rudin. Analyse réelle et complexe, cours et exercices. 1987.
- [10] V. Smirnov. Cours de mathématiques supérieures. *Tome 3, OPU*, 1985.
- [11] G. Dennis Zill and D. Patrick Shanahan. Complex analysis. *Jones and Bartlett Publishers*, 2003.

Table des figures

1.1	Le plan complexe	11
1.2	Argument d'un nombre complexe	13
4.1	chemin par morceaux	44
5.1	La couronne	58
6.1	Les points singulières	63
6.2	Le chemin associé	67
6.3	Le chemin associé	73
6.4	le chemin γ associé à l'exemple	75
6.5	le chemin γ associé à l'exercice 1 et 2	80
6.6	le chemin γ associé à l'exercice 3	81
6.7	le chemin γ associé à l'exercice 4	82
6.8	le chemin γ associé à l'exercice 5	83
6.9	le chemin γ associé à l'exercice 6	83