RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES
ET DE L'INFORMATIQUE

Cours d'Analyse 1

Un polycopié destiné aux étudiants du première année LMD
Mathématiques et Informatique

Réalisé par

Dr. Bendouma Bouharket

bouharket.bendouma@univ-tiaret.dz

Expertisé par :

Pr. Souid Mohamed Said - Université Ibn Khaldoun, Tiaret.

Dr. Amin Benaissa cherif- Université des Sciences et de la Technologie d'Oran- Mohamed Boudiaf.

Année Universitaire 2023-2024

Avant-propos

Ce polycopié constitue un support pédagogique pour le cours d'Analyse 1, destiné aux étudiants de première année LMD, domaine Mathématiques et Informatique, conformément au programme officiel actuel. J'ai enseigné ce module au niveau de la faculté des mathématiques et de l'informatique de l'Université de Tiaret.

Ce polycopié comporte six chapitres :

Chapitre 1 : Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$.

Chapitre 2 : Le corps des nombres complexes.

Chapitre 3 : Suites de nombres réels.

Chapitre 4 : Fonctions réelles d'une variable réelle.

Chapitre 5 : Fonctions dérivables.

Chapitre 6 : Fonctions élémentaires.

Chaque chapitre contient des explications détaillées ainsi que des exemples illustratifs pour aider les étudiants à comprendre l'analyse 1, suivis d'une série d'exercices (non corrigés) proposés.

Dr. Bendouma Bouharket

Table des matières

Avant-propos **1**

Table des matières **2**

Notations et terminologie **7**

1 Le corps des nombres réels **8**

1.1 $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné 8

1.1.1 $(\mathbb{R}, +, .)$ est un corps commutatif. 8

1.1.2 $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné 9

1.1.3 L'ensemble des nombres naturels et récurrence 10

1.1.4 L'ensemble des nombres rationnels 11

1.1.5 Intervalles de $\mathbb{R}$ 12

1.2 $\mathbb{R}$ est un corps valué 13

1.2.1 Valeur absolue d'un réel 13

1.2.2 Distance dans $\mathbb{R}$ 14

1.3 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$ 14

1.3.1 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ 17

1.4 $\mathbb{R}$ est un corps archimédien 17

1.4.1 Propriété d'Archimède 17

1.4.2 Partie entière d'un réel 18

1.4.3 Densité 18

1.5 Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$ 19

1.5.1 Voisinages 19

1.5.2 Parties ouvertes et fermées 19

1.5.3 Adhérence 20

1.5.4 Point d'accumulation 20

1.6 Exercices 21

2 Le corps des nombres complexes 23

2.1 Structure de corps des nombres complexes 23
2.2 Opérations sur les nombres complexes 24
2.3 Conjugué d'un nombre complexe 25
2.4 Module d'un nombre complexe 25
2.5 Interprétation géométrique des nombres complexes 26
2.6 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul 26
2.7 Forme exponentielle d'un nombre complexe 29
2.8 Formules de Moivre et d'Euler 30
2.8.1 Expressions de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ 31
2.8.2 Linéarisation d'expressions trigonométriques 31
2.9 Racines n-iémes d'un nombre complexe 32
2.10 Résolution de l'équation du second degré 33
2.10.1 Calcul des racines carrées sous forme algébrique 33
2.10.2 Équation du second degré 35
2.11 Exercices 36

3 Suites de nombres réels 38

3.1 Définitions générales 38
3.1.1 Définition d'une suite 38
3.1.2 Suites bornées 38
3.1.3 Suites monotones 39
3.2 Suites convergentes 40
3.3 Suites adjacentes 45
3.4 Suites extraites 47
3.5 Suites de Cauchy 48
3.6 Généralisation de la notion de la limite 49
3.6.1 Limite inférieure et limite supérieure 50
3.7 Comparaison de suites 51
3.8 Suites récurrentes 53
3.8.1 Suites récurrentes linéaires du premier ordre 53
3.8.2 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ 55

3.8.3 Suites récurrentes linéaires du second ordre 56
3.9 Exercices 57

4 Fonctions réelles d'une variable réelle 60
4.1 Généralités sur les fonctions 60
4.1.1 Définition 60
4.1.2 Graphe d'une fonction réelle 61
4.1.3 Opérations sur les fonctions 61
4.1.4 Fonction paire, impaire, périodique 63
4.1.5 Fonctions majorées, minorées, bornées 63
4.1.6 Fonctions monotones 64
4.1.7 Maximum et minimum locaux 65
4.2 Limite d'une fonction 65
4.2.1 Définitions générales 65
4.2.2 Théorèmes sur les limites 69
4.2.3 Opérations sur les limites 71
4.3 Fonctions continues 74
4.3.1 Définitions générales 74
4.3.2 Discontinuité de première espèce et de seconde espèce 76
4.3.3 Continuité uniforme 78
4.3.4 Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé . 79
4.4 Fonction réciproque continue 82
4.5 Comparaison locale des fonctions 85
4.5.1 Comparaison au voisinage d'un point 85
4.5.2 Exemples (Croissances comparées) 87
4.5.3 Équivalents usuels 87
4.6 Exercices 88

5 Fonctions dérivables 90
5.1 Fonction dérivable 90
5.1.1 Dérivée d'une fonction en un point 90
5.1.2 Dérivée à droite, dérivée à gauche 91
5.1.3 Interprétation géométrique de la dérivée 92
5.2 Opérations sur les fonctions dérivables 93

5.2.1 Opérations algébriques 93
5.2.2 Dérivée d'une fonction composée 94
5.2.3 Dérivée d'une fonction réciproque 94
5.2.4 Dérivées des fonctions usuelles 95
5.2.5 Primitives d'une fonction 96
5.3 Fonctions différentiables 96
5.3.1 Différentielle d'une fonction en un point 96
5.3.2 Opérations sur les différentielles 97
5.4 Théorème de Rolle et des accroissements finis 98
5.4.1 Théorème de Fermat 98
5.4.2 Théorème de Rolle 99
5.4.3 Théorème des accroissements finis 100
5.4.4 Sens de variation d'une fonction dérivable 103
5.5 Dérivées d'ordre supérieur 104
5.5.1 Dérivées successives 104
5.5.2 Classe d'une Fonction 104
5.5.3 Formule de Taylor 105
5.6 Extrémum local d'une fonction dérivable 106
5.7 Convexité d'une courbe 108
5.7.1 Partie convexe du plan 108
5.7.2 Fonction convexe 108
5.7.3 Point d'inflexion 110
5.8 Asymptote d'une courbe 111
5.8.1 Définitions 111
5.8.2 Recherche des asymptotes 111
5.9 Construction du graphe d'une fonction 113
5.10 Exercices 117

6 Fonctions élémentaires **119**
6.1 Fonctions logarithmes et exponentielles 119
6.1.1 Fonction logarithme népérien 119
6.1.2 Fonction exponentielle de base e 122
6.1.3 Fonction logarithme de base quelconque 123
6.1.4 Fonction exponentielle de base quelconque 124

6.1.5 Fonctions puissances 126
6.2 Fonctions hyperboliques et leurs inverses 126
6.2.1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques 126
6.2.2 Fonctions tangente et cotangente hyperboliques 127
6.2.3 Fonctions hyperboliques réciproques 128
6.3 Fonctions circulaires réciproques 131
6.3.1 Fonction Arc sinus 131
6.3.2 Fonction Arc cosinus 132
6.3.3 Fonction Arc tangente 133
6.4 Exercices 134

Bibliographie **135**

Notations et terminologie

. L'ensemble vide $\emptyset$ (ou $\{\}$).

. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \ \ et \ \ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

. L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z} \ \ et \ \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. On a $\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

. L'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

. L'ensemble des nombres réels positifs $\mathbb{R}_+ = \{a : a \in \mathbb{R} \ \ et \ \ a \geq 0\}$.

. L'ensemble des nombres réels négatifs $\mathbb{R}_- = \{a : a \in \mathbb{R} \ \ et \ \ a \leq 0\}$.

. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$ et $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$.

. La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

. La négation $\overline{P}$ (ou $\neg P$) : non P.

. La conjonction, $P \wedge Q$: P et Q.

. La disjonction, $P \vee Q$: P ou Q.

. L'implication, $P \Rightarrow Q$: P implique Q (ou si P, alors Q).

. L'équivalence, $P \Leftrightarrow Q$: P est équivalent à Q (ou P si et seulement si Q).

. Le quantificateur $\forall$: pour tout.

. Le quantificateur $\exists$: il existe.

. L'inclusion $A \subseteq B$: $x \in A \Rightarrow x \in B$.

. L'ègalité $A = B$: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

. L'intersection $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

. La réunion $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$ et $0! = 1$.

Chapitre 1

Le corps des nombres réels

1.1 $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres réels, muni de deux lois de composition internes : l'addition $+ : (x, y) \to x + y$, la multiplication $. : (x, y) \to x.y$ et d'une relation $\leq$: $(x, y) \to x \leq y$.

1.1.1 $(\mathbb{R}, +, .)$ est un corps commutatif.

A_1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = y + x$ (Commutativité de l'addition).

A_2. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + (y + z) = (y + x) + z$ (Associativité).

A_3. 0 est élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$.

A_4. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ il existe un élément noté $-x$ appelé opposé de x tel que $x + (-x) = 0$.

On résume ces propriétés $A_1 - A_4$ en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

A_5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x.y = y.x$ (Commutativité de la multiplication).

A_6. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x.(y.z) = (y.x).z$ (Associativité).

A_7. 1 est élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R} : x.1 = 1.x = x$.

A_8. Pour chaque $x \in \mathbb{R}^*$ il existe un élément noté $x^{-1} = \frac{1}{x}$ appelé inverse de x tel que $x.(x^{-1}) = 1$.

On résume ces propriétés $A_5 - A_8$ en disant que $(\mathbb{R}^*, .)$ est un groupe commutatif.

A_9. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x.(y + z) = xy + xz$ et $(y + z).x = y.x + z.x$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

On résume toutes ces propriétés $A_1 - A_9$ en disant que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un corps commutatif.

1.1.2 $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

La relation " $\leq$ " sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0,$$

est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$. Nous avons :

A_{10}. $\forall a \in \mathbb{R} : a \leq a$ (" $\leq$ " est réflexive).

A_{11}. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow a = b$ (" $\leq$ " est antisymétrique).

A_{12}. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a = c$ (" $\leq$ " est transitive).

A_{12}. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a \leq b) \vee (b \leq a)$ (" $\leq$ " est totale).

De plus, la relation d'ordre " $\leq$ " est compatible avec l'addition et avec la multiplication par les réels positifs :

$\triangleleft$ $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c.$

$\triangleleft$ $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a \leq b) \wedge (0 \leq c) \Rightarrow ac \leq bc.$

On définit le maximum (resp,. le minimum) de deux réels a et b par :

$$\max(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } a \leq b, \\ a & \text{si } b \leq a. \end{cases} \quad \left(resp, . \min(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b, \\ b & \text{si } b \leq a. \end{cases} \right).$$

Remarque 1.1.1. - $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} (a \leq b) \Leftrightarrow (b \geq a), \\ (a \leq b) \Leftrightarrow (b - a \geq 0). \end{cases}$

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} (a < b) \Leftrightarrow (a \leq b) \wedge (a \neq b), \\ (a > b) \Leftrightarrow (a \geq b) \wedge (a \neq b). \end{cases}$.

Proposition 1.1.1. (*Propriétés élémentaires des nombres réels*)

1) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c.$

2) $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, (a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d.$

3) $\forall a \in \mathbb{R}^*, 0 < a \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{a}.$

4) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall c \in \mathbb{R}_+^*, (a \leq b) \Leftrightarrow (a.c \leq b.c).$

5) $\forall (a, b, c, d) \in (\mathbb{R}_+)^4, (a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow a.c \leq b.d.$

6) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a+c = b+c \Rightarrow a = b.$

7) $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, (a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow a+c \leq b+d.$

8) $\forall a \in \mathbb{R}, a.0 = 0 = 0.a.$

9) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a.(-b) = -(a.b) = (-a).b.$

10) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a.b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0).$

Remarque 1.1.2. (*Utilisation du signes* $\sum$ *et* $\prod$)
Le signe $\sum$ *signifie "somme" (resp.,* $\prod$ *signifie "produit") s'utilise pour désigner la somme (resp., le produit) de termes obtenus pour des valeurs successives d'un entier. Soit* $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $p \leq n$ *et soit* $x_p, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

1). *La somme de tous les termes* x_k, $k = p, ..., n$ *est notée* $\sum_{k=p}^{k=n} x_k$.

2). *Le produit de tous les termes* x_k, $k = p, ..., n$ *est notée* $\prod_{k=p}^{k=n} x_k$.

On a : $\sum_{k=1}^{k=n} x_k = x_1 + x_2 +, ..., +x_n$ *et* $\prod_{k=1}^{k=n} x_k = x_1 \times x_2 \times ... \times x_n$.

Exemples 1.1.1. 1). $\begin{cases} 0+1+2+3+...+2023 = \sum_{k=0}^{k=2023} k, \\ 0+2+4+6+...+2024 = \sum_{k=0}^{k=1012} 2k. \end{cases}$

2). *Soit* $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} 1+3+5+...+(2n+1) = \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1) \\ \sin^2(x)+\sin^2(2x)+\sin^2(3x)+...+\sin^2(nx) = \sum_{k=1}^{k=n} \sin^2(kx) \\ 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n+1) = \prod_{k=1}^{k=n+1} k \\ 2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n) = \prod_{k=1}^{k=n} 2k \\ 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n = \prod_{k=1}^{k=n} k = n! \ (factorielle\ n). \end{cases}$.

1.1.3 L'ensemble des nombres naturels et récurrence

On désigne l'ensemble des entiers naturels par $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
Tout entier naturel n a un successeur $n+1$, et tout entier naturel non nul n a un prédécesseur $n-1$.

Théorème 1.1.1. (*Principe de raisonnement par récurrence*)
Soit $P(n)$ *une proposition dependant d'un entier naturel* n. *S'il existe un entier* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que :*

1) $P(n_0)$ *est vraie (Initialisation) ;*

2) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *(Hérédité),*

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1.1.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.*
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n$.

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n) : (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) *Initialisation : Pour $n = 0$, nous avons $(1+\alpha)^0 = 1 \geq 1 + 0\alpha = 1$, donc $P(0)$ est vraie.*

2) *Hérédité : Soit $n \geq 0$, supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire supposons que $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$ et montrons que $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha$. Puisque $1 + \alpha \geq 0$, alors l'hypothèse de récurrence implique que :*

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geq (1+\alpha)(1+n\alpha),$$

soit : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2$,
il s'ensuit que : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha$, car $n\alpha^2 \geq 0$.
Donc $P(n+1)$ est vraie. D'aprés le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si on pose $\alpha = 1$, alors on aura $2^n \geq n$.

Remarque 1.1.3. *Voici des méthodes classiques pour démontrer $P \Rightarrow Q$.*

a) *Le raisonnement directe : on suppose que la proposition P est vraie (c'est l'hypothèse), et on montre qu'alors la proposition Q est vraie.*

b) *Le raisonnement par contraposition : est basé sur l'équivalence suivante :*
L'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.
Par conséquent, démontrer $P \Rightarrow Q$ revient à démontrer $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

c) *Le raisonnement par l'absurde : on suppose le contraire de $P \Rightarrow Q$, c'est à dire suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction.*

1.1.4 L'ensemble des nombres rationnels

On désigne l'ensemble des nombres décimaux par $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$.
Par définition l'ensemble des nombres rationnels est $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.

$(\mathbb{Q}, +, ., \leq)$ est un sous-corps commutatif totalement ordonné de $(\mathbb{R}, +, ., \leq)$.
On a les inclusions suivantes : $\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.2. *Un nombre réel est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale finie ou périodique à partir d'un certain rang.*

Exemple 1.1.2. 1) $\frac{7}{5} = 0.6$, $\frac{179}{99} = 1.7676... = 1.\underline{76}$, $\frac{487}{27} = 18.037037.... = 18.\underline{037}$.

2) *Montrons que* $x = 0.\underline{13} = 0.131313...$ *est un rationnel.*

On a : $x = 0.1313... \Longleftrightarrow 100x = 13.1313... = 13 + 0.1313... = 13 + x$,

alors, $99x = 13$, *cela donne donc* $x = \frac{13}{99} \in \mathbb{Q}$.

3) *Montrons que* $y = 15.\underline{136}$ *est un rationnel.*

On a : $y = 15.136136... = 15 + 0.136136... = 15 + x$, *où* $x = 0.136136...$,

d'où, $1000x = 136.136136136.... = 136 + 0.136136136... = 136 + x$,

alors, $x = \frac{136}{999}$, *cela donne donc* $y = 15 + \frac{136}{999} = \frac{15121}{999} \in \mathbb{Q}$.

Définition 1.1.1. *Un nombre réel est dit irrationnel si et seulement s'il n'est pas rationnel. Ainsi l'ensemble des nombres irrationnels est* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exemple 1.1.3. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(*$\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel).*
En effet, raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2}$ *soit un nombre rationnel, c'est-à-dire* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ *où* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{Z}^*$ *sont premiers entre eux, alors* $a^2 = 2b^2$. *Ainsi* a^2 *est pair, ce qui implique que* a *est pair. Il existe alors* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $a = 2k$. *ce qui donne* $b^2 = 2k^2$ *et* b *pair aussi. Il en résulte que* 2 *divise* a *et* b *ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux. Donc* $\sqrt{2}$ *n'est pas un nombre rationnel.*

Remarque 1.1.4. *a). L'equation* $x^2 = 2$ *n'admet pas de solution dans* $\mathbb{Q}$.

b). Si l'écriture décimale illimitée d'un réel est non périodique, alors ce réel est irrationnel.

1.1.5 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.1.2. *Une partie* I *de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle si, dés qu'elle contient deux réels, elle contient tous les réels intermédiaires, c'est-à-dire :*

$$\forall a, b \in I,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (a \leq x \leq b \implies x \in I)$$

Pour tous réels a *et* b *avec* $a \leq b$, *on définit les intervalles suivants.*

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ *intervalle fermé borné (ou segment).*

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ *intervalle borné semi ouvert à droite.*

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ *intervalle borné semi ouvert à gauche.*

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ *intervalle borné ouvert.*

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$ *intervalle fermé non borné.*

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$ *intervalle ouvert non borné.*

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ *droite réelle.*

Remarque 1.1.5. a) *On notera les intervalles suivants :*

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[,\ \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[,\ \mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$ *et* $\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$.

b) *L'ensemble* $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *n'est pas un intervalle.*

c) *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $\varepsilon > 0$. *L'ensemble* $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ *est un intervalle ouvert de centre* a *et de rayon* ε.

1.2 $\mathbb{R}$ est un corps valué

1.2.1 Valeur absolue d'un réel

Définition 1.2.1. *Pour tout réel* x, *on appelle valeur absolue de* x *le réel noté* $|x|$ *défini par :* $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$

Proposition 1.2.1. *La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :*

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$; $\quad |-x| = |x|$; $\quad |x| = 0 \iff x = 0$; $\ |x|^2 = x^2$ *et* $\sqrt{x^2} = |x|$.

2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x||y|$ *et* $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ *avec* $y \neq 0$.

3) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*inégalité triangulaire*).

4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ (*seconde inégalité triangulaire*).

5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ :$ $\begin{cases} |x| = \alpha \Leftrightarrow (x = \alpha \vee x = -\alpha) \\ |x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha \\ |x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \leq -\alpha \vee x \geq \alpha. \end{cases}$.

6) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$ $\begin{cases} \max(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y + |x - y|) \\ \min(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y - |x - y|). \end{cases}$

Remarque 1.2.1. *On dit que* $(\mathbb{R}, |.|)$ *est un corps valué.*

1.2.2 Distance dans $\mathbb{R}$

Définition 1.2.2. *On appelle distance usuelle sur $\mathbb{R}$ l'application d définie par :*

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ (x,\ y) &\to d(x,y) = |x-y|. \end{aligned}$$

Le réel positif $d(x,y)$ est appelé distance de x à y.

Proposition 1.2.2. *La distance d vérifie les propriétés suivantes :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \begin{cases} d(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x=y). \\ d(x,y) = d(y,x) \ \textit{(symétrique).} \\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ \textit{(inégalité triangulaire).} \end{cases} .$$

Proposition 1.2.3. *Soient a et x des nombres réels et soit $\varepsilon > 0$. les assertions suivantes sont équivalentes :*

1). $d(x,a) \leq \varepsilon$. 2). $|x-a| \leq \varepsilon$. 3). $a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon$. 4). $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

Proposition 1.2.4. (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Pour tous $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, et $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{k=n} y_k^2 \right).$$

Proposition 1.2.5. (*Inégalité de Minkowski*)

Pour tous $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n} (x_k + y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{k=n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{k=n} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Définition 1.3.1. (*Majorant, minorant*)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :

1. *A est majorée par $M \in \mathbb{R}$ (ou $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A) si $\forall\ x \in A$, $x \leq M$.*

2. *A est minorée par $m \in \mathbb{R}$ (ou $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A) si $\forall\ x \in A$, $x \geq m$.*

3. *A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée c'est-à-dire :*

$$\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in A, m \leq x \leq M$$

Définition 1.3.2. (*Maximum, minimum*)
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :

1. *$M \in \mathbb{R}$ est le plus grand élément de A (ou bien le maximum de A), que le note $M = \max A$ si $M \in A$ et M est un majorant de A.*

2. *$m \in \mathbb{R}$ est le plus petit élément de A (ou bien le minimum de A), que le note $m = \min A$ si $m \in A$ et m est un minorant de A.*

Définition 1.3.3. (*Borne supérieure, borne inférieure*)
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1 *On appelle la borne supérieure de A le plus petit des majorants de A. S'il existe on le note $\sup(A)$.*

2 *On appelle la borne inférieure de A le plus grand des minorants de A. S'il existe on le note $\inf(A)$.*

Exemple 1.3.1. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$.*

1. *L'intervalle $A = [a, b[$ est borné (majoré par b et minoré par a). L'ensemble des majorants de A est $[b, +\infty[$, celui-ci admet un plus petit élément qui est $b \notin A$, donc $b = \sup(A)$ et $\max(A)$ n'existe pas. L'ensemble des minorants de A est $]-\infty, a]$, qui admet un plus grand élément $a \in A$, donc $a = \inf(A) = \min(A)$.*
2. *L'intervalle $B =]-\infty, b]$ est majoré par b et n'est pas minoré. L'ensemble des majorants est $[b, +\infty[$, celui-ci admet un plus petit élément qui est $b \in A$, donc $b = \sup(A) = \max(A)$. L'ensemble des minorants de B est vide, donc B n'admet pas de borne inférieure.*

Proposition 1.3.1. *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp., minorée) admet une borne supérieure (resp., inférieure).*

Remarque 1.3.1. *L'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ est non vide, majoré par $\sqrt{2}$, admet $\sqrt{2}$ comme borne supérieure dans $\mathbb{R}$, mais n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, c'est à dire $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure.*

Remarque 1.3.2. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On a :*

1. *(A est bornée) $\iff (\forall x \in A, \inf(A) \leq x \leq \sup(A))$.*
2. *Si A est majorée, $\max(A)$ existe si et seulement si $\sup(A)$ existe et $\sup(A) \in A$, dans ce cas on a $\sup(A) = \max(A)$.*

3. *Si A est majorée,* $\sup(A) \notin A$ *alors* $\max(A)$ *n'existe pas.*
4. *Si A est minorée,* $\min(A)$ *existe si et seulement si* $\inf(A)$ *existe et* $\inf(A) \in A$, *dans ce cas on a* $\inf(A) = \min(A)$.
5. *Si A est minorée,* $\inf(A) \notin A$ *alors* $\min(A)$ *n'existe pas.*

Proposition 1.3.2. *(Caractérisation des bornes supérieure et inférieur)*
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $(m, M) \in \mathbb{R}^2$, alors :

1. $$M = \sup(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M \ (c\text{-}\grave{a}\text{-}d\ M \text{ est un majorant}), \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists\ x_0 \in A,\ M - \epsilon < x_0 \leq M. \end{cases}$$
2. $$m = \inf(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq m \ (c\text{-}\grave{a}\text{-}d\ m \text{ est un minorant}), \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists\ x_0 \in A,\ m \leq x_0 < m + \epsilon. \end{cases}$$

Exercice 1. *Déterminer (s'ils existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément d'ensemble suivant :*

$$A = \left\{ \frac{n-2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Solution 1. *A n'est pas vide car pour $n = 0$,* $\dfrac{n-2}{n+1} = -2 \in A$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{n-2}{n+1} = 1 - \dfrac{3}{n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $n + 1 \geq 1 \Longrightarrow 0 < \frac{3}{n+1} \leq 3 \Longrightarrow 1 > 1 - \dfrac{3}{n+1} \geq -2$.
Donc A est minoré par -2 et majoré par 1, alors A est borné. L'ensemble des minorants de A est $]-\infty, -2]$ *et l'ensemble des majorants de A est* $[1, +\infty[$. *Comme -2 appartient à A, alors -2 est le plus petit élément de A. Donc* $-2 = \min(A) = \inf(A)$.
Montrons que $\sup(A) = 1$, *pour cela on utilise le critère de borne supérieure :*

$$1 = \sup(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n-2}{n+1} \leq 1, \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ 1 - \epsilon < \dfrac{n_0 - 2}{n_0 + 1} \leq 1. \end{cases}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n-2}{n+1} \leq 1$, *car 1 est un majorant de A.*
Soit $\epsilon > 0$, tel que $1 - \epsilon < \dfrac{n-2}{n+1}$.
Donc $1 - \epsilon < \dfrac{n-2}{n+1} \Longleftrightarrow 1 - \epsilon < 1 - \dfrac{3}{n+1} \Longleftrightarrow n > \dfrac{3}{\epsilon} - 1$.
Le premier nombre naturel qu'on est sure qu'il vérifie l'inégalité précédente est $n_0 = [\dfrac{3}{\epsilon} - 1] + 1$.

Donc $\forall \epsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $1 - \epsilon < \dfrac{n_0 - 2}{n_0 + 1} \leq 1$, *ce qui montre que* $\sup(A) = 1$.
$\max(A)$ *n'existe pas car* $\sup(A) = 1 \notin A$.

1.3.1 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On adjoint à l'ensemble $\mathbb{R}$ *deux éléments distincts non réels, notés* $-\infty$ *et* $+\infty$, *et on prolonge à* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *les lois* $+, .$ *et la relation d'ordre total* $\leq$ *par :*

$$1)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x.(+\infty) = (+\infty).x = +\infty \text{ et } x.(-\infty) = (-\infty).x = -\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ x.(+\infty) = (+\infty).x = -\infty \text{ et } x.(-\infty) = (-\infty).x = +\infty. \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} (+\infty) + (+\infty) = +\infty \text{ et } (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ (+\infty).(+\infty) = (-\infty).(-\infty) = +\infty \text{ et } (+\infty).(-\infty) = (-\infty).(+\infty) = -\infty \\ -\infty \leq -\infty \text{ et } +\infty \leq +\infty. \end{cases}$$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ *est appelé droite numérique achevée.*
On remarque que les expressions suivantes : $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $0.(+\infty)$, $(+\infty).0$, $0.(-\infty)$ *et* $(-\infty).0$ *ne sont pas définis (n'ont aucun sens). Ces expressions sont appelées formes indéterminées.*

Théorème 1.3.1. *Toute partie de* $\overline{\mathbb{R}}$ *non vide admet une borne supérieure et une borne inférieure dans* $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 1.3.2. *Dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *on a* $\inf([-\infty, 0[) = \inf(]-\infty, 0[) = -\infty$ *et* $\sup(]0, +\infty[) = \sup(]0, +\infty]) = +\infty$.

1.4 $\mathbb{R}$ est un corps archimédien

1.4.1 Propriété d'Archimède

Proposition 1.4.1. $\mathbb{R}$ *est un corps archimédien c'est à dire :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ nx \geq y.$$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, raisonnons par l' absurde en supposant que : $\forall n \in \mathbb{N},\ nx < y$.
L'ensemble $F = \{nx | n \in \mathbb{N}\}$ est alors une partie non vide et majoré de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)x \leq M$ et donc $nx \leq M - x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que $(M - x)$ est un majorant de F strictement inférieur à M, contradiction avec la définition de M. □

Remarque 1.4.1. *On a*

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*\ \ nx > y$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*\ \ n > y$.

1.4.2 Partie entière d'un réel

Proposition 1.4.2. *Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, tel que $n \leq x < n+1$, n est appelé la partie entière de x, et noté $E(x)$ ou $[x]$.*
$E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
On a les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ E(x) \in \mathbb{Z}$ *et* $\ x - 1 < E(x) \leq x < E(x) + 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x = E(x) + \alpha$, *où* $0 \leq \alpha < 1$.
3. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \ E(x) = x$ *et* $E(x) + E(-x) = 0$.
4. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ n \leq x \Longrightarrow n \leq E(x)$.

Exemple 1.4.1. $E(\sqrt{2}) = 1$, $E(-\pi) = -4$ *et* $E(5) = 5$.

Remarque 1.4.2. (*Approximations décimales*)
Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $p \in \mathbb{N}$, on a $E(x10^p) \leq x10^p < E(x10^p) + 1$, d'où :

$$\frac{E(x10^p)}{10^p} \leq x < \frac{E(x10^p)+1}{10^p}.$$

$\frac{E(x10^p)}{10^p} = E(x10^p)10^{-p}$ *s'appelle approximation décimale d'ordre p du nombre x.*
$\frac{E(x10^p)}{10^p}$ *est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} prés par défaut, et* $\frac{E(x10^p)+1}{10^p}$ *un nombre décimal approchant x à 10^{-p} prés par excès.*

1.4.3 Densité

Définition 1.4.1. *Une partie F non vide de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si :*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a < b \Longrightarrow \exists c \in F,\ a < c < b).$$

Théorème 1.4.1. *Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans l'ensemble $\mathbb{R}$, c'est à dire, tout intervalle ouvert et non vide contient au moins un rationnel et un irrationnel.*

Démonstration. 1. Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \Longrightarrow \exists z \in \mathbb{Q},\ x < z < y).$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$, tel que $x < y$, on a donc $y - x > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédiene, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(y-x) > 1$, c'est-à-dire $y - x > \frac{1}{n}$. En notant $m = E(nx) + 1$ et $z = \frac{m}{n}$, on obtient $m - 1 \leq nx < m$ et $m \leq nx + 1 < m + 1$, d'où $x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$ et $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Donc il existe $z = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, tel que $x < z < y$.
1. Montrons que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x < y \Longrightarrow \exists z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\ x < z < y).$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$, tel que $x < y$. D'aprés la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel z tel que $x - \sqrt{2} < z < y - \sqrt{2}$, d'où $x < z + \sqrt{2} < y$ et on montre que $z + \sqrt{2}$ est irrationnel (par l'absurde). Donc $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

1.5 Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$

1.5.1 Voisinages

Définition 1.5.1. *Soit $\mathcal{V}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit a un réel. On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert I contenant a, inclus dans $\mathcal{V}$. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}_a$.*

Remarque 1.5.1. 1. *Soit $\varepsilon > 0$, les intervalles $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ et $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ sont des voisinages de a.*

2. *Un intervalle ouvert est un voisinage de chacun de ses points.*

3. *Toute prtie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de a, est aussi voisinage de a.*

4. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, l'intervalle ouvert $]x_0, +\infty[$ (resp., $]-\infty, x_0[$) est appelé voisinage de $+\infty$ (resp., $-\infty$).*

1.5.2 Parties ouvertes et fermées

Définition 1.5.2. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

1. *A est dite ouverte si pour tout $x \in A$ il existe un intervalle ouvert I_0 tel que $x \in I_0$ et $I_0 \subseteq A$.*

2. *A est dite fermée si A est le complémentaire d'une partie ouverte dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.5.1. *L'intervalle fermé $[a, b]$ est le complémentaire de l'ensemble ouvert $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$.*

1.5.3 Adhérence

Définition 1.5.3. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que a est un point adhérent à A si tout intervalle ouvert I contenant a rencontre A. L 'ensemble des points adhérents à A est noté $\overline{A}$ et est appelé adhérence de A. On a :*

$$a \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset.$$

Remarque 1.5.2. *On a :*
1). $A \subseteq \overline{A}$. 2). *A est fermée si* $\overline{A} = A$. 3). $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$).

1.5.4 Point d'accumulation

Définition 1.5.4. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que a est un point d'accumulation de A si tout intervalle ouvert I contenant a rencontre A en un point au moins autre que a. On a :*
a est un point d'accumulation de A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ (]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Définition 1.5.5. (*Point isolé*) *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un 'elément a de A qui n'est pas un point d'accumulation de A est dit isolé, c'est à dire, il existe un intervalle ouvert I contenant a qui ne rencontre A qu'au point a. On a :*
a est un point isolé de A si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A = \{a\}.$$

Exemples 1.5.1. 1. *$\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ouverts et des fermés.*

2. *Si $A = \{-2\} \cup [-1, 1[$, alors $\overline{A} = \{-2\} \cup [-1, 1]$, $\{-2\}$ est un point isolé de A, tout élément de $[-1, 1]$ est un point d'accumulation de A.*

1.6 Exercices

Exercice 1. 1). *Soit a et b deux réels, montrer que :*

1. $(\forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R},\ x > b \text{ et } a \leq x) \Rightarrow a \leq b$.

2). *Soit $a \geq 0$, montrer que :* $(\forall \varepsilon \geq 0,\ a \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

3). *Si a et b sont des réels strictement positifs, montrer que :*

1. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{bc}} + \dfrac{1}{\sqrt{ca}} + \dfrac{1}{\sqrt{ab}} \leq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

Exercice 2. *Démontrer par récurrence que :*

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! \leq n^n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{2n} - 2^n$ *est divisible par* 7.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{k=n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{n+k} > \dfrac{2}{3}$.

Exercice 3. *Soient x et y deux nombres réels. Montrer que :*

1. $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.
2. $|x| + |y| \leq |x - y| + |x + y|$.

Exercice 4. *Montrer que :*

1. $\forall x \in \mathbb{Z},\ E(x) + E(-x) = 0$.
2. $\forall x \notin \mathbb{Z},\ E(x) + E(-x) = -1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(x+n) = E(x) + n$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(nx) \geq nE(x)$.

Exercice 5.
1. *Montrer que :* $\sup\{x \in \mathbb{Q}^+ :\ x^2 < 3\} = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
2. *Déterminer :* $\sup\{x \in \mathbb{R} :\ 3x^2 + 7x + 4 > 0\}$ *et* $\inf\{x \in \mathbb{R} :\ -27 \leq x^3 < 100\}$.

Exercice 6. *Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que :*

1. *Si $A \subset B$ et B est bornée, alors A est bornée et on a :*

$$\sup A \leq \sup B \quad et \quad \inf B \leq \inf A.$$

2. *Si A et B bornées, alors $A \cup B$ est bornée et on a :*

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) \quad et \quad \inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

3. *Si A et B sont bornées, alors $A + B$ est bornée et on a :*

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad et \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B,$$

où $A + B = \{x = a + b : a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Exercice 7. *Soit l'ensemble $A = \left\{ \dfrac{2n+1}{n-1} : n \in \mathbb{N} \text{ et } n > 1 \right\}$.*

1. *Montrer que A est borné (minoré et majoré) et non vide.*
2. *Quels sont $\max A$ et $\min A$ s'ils existent. Determiner $\sup A$ et $\inf A$.*
3. *En déduire $\sup B$ et $\inf B$, où $B = \left\{ \dfrac{2n+1}{n-1} + 2(-1)^n : n \in \mathbb{N} \text{ et } n > 1 \right\}$.*

Chapitre 2

Le corps des nombres complexes

2.1 Structure de corps des nombres complexes

L'equation $x^2+1=0$ *(ou* $x^2=-1$*) n'a pas de solution dans* $\mathbb{R}$*. On va construire un ensemble, noté* $\mathbb{C}$ *appelé ensemble des nombres complexes, contenant* $\mathbb{R}$*, et muni des lois internes l'addition et la multiplication, qui prolongent celles de* $\mathbb{R}$ *et tel que l'équation* $x^2+1=0$ *possède des solutions, c'est à dire il existe un nombre non réel* i *dans* $\mathbb{C}$*, tel que* $i^2=-1$*.*

Munissons $\mathbb{R}^2$ *de deux lois internes l'addition* " $+$ " *et la multiplication* "." *définies par :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \forall (x',y')\in\mathbb{R}^2 : \begin{cases} (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \\ (x,y).(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y). \end{cases}$$

On peut vérifier par des calculs faciles que $(\mathbb{R}^2,+,.)$ *est un corps commutatif :*

" $+$ " *est commutative, associative, admet un élément neutre* $0=(0,0)$ *(élément nul) et tout élément* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *admet un symétrique* $(-x,-y)$*.*

"." *est commutative, associative, distributive par rapport à* $+$*, admet un élément neutre* $1=(1,0)$ *(élément unité) et tout élément* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ *admet un inverse* $(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2})$*.*

On note $\mathbb{C}=(\mathbb{R}^2,+,.)$ *qu'on appelle corps des nombres complexes, les éléments de* $\mathbb{C}$ *sont appelés les nombres complexes. L'application* $x\longmapsto(x,0)$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *est un isomorphisme du corps* $\mathbb{R}$ *sur le sous-corps* $\mathbb{R}\times\{0\}=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$*. En identifiant* $\mathbb{R}$ *par* $\mathbb{R}\times\{0\}$*, par la suite nous identifierons donc le nombre complexe* $(x,0)$ *au nombre réel* x*, ce qui fait apparaître* $\mathbb{R}$ *comme un sous-corps de* $\mathbb{C}$*.*

On note $(x,0)=x$ *pour* $x\in\mathbb{R}$, *en particulier,* $0=(0,0)$ *et* $1=(1,0)$.
Le nombre complexe $i=(0,1)$ *vérifie* $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$. *On a alors :*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,0)+(0,1)(y,0)=(x,0)+(0.y-1.0,0.0+1.y)=(x,0)+(0,y)=(x,y),$$

l'écriture du complexe $z=(x,y)$ *devient alors* $z=x+iy$.
Donc, tout nombre complexe z *s'écrit sous une forme unique* $z=x+iy$ *(appelée forme algébrique), où* x *et* y *sont des réels. Le nombre reel* x *est appelé partie réelle de* z *et notée* $x=\mathfrak{Re}(z)$ *et le nombre reel* y *est appelé partie imaginaire de* z *et notée* $y=\mathfrak{Im}(z)$, *on peut donc écrire* z *sous la forme :* $z=\mathfrak{Re}(z)+i\mathfrak{Im}(z)$.

2.2 Opérations sur les nombres complexes

On a $\mathbb{C}=\{z|\ z=x+iy=,\ \text{avec } x,y\in\mathbb{R} \text{ et } i^2=-1\}$, *et l'on calcule avec les nombres complexes comme avec les nombres réels en remplaçant* i^2 *par* -1. *On a donc les propriétés suivantes :*

1) *Soient* $z=x+iy$ *et* $z'=x'+iy'$ *deux nombres complexes, où* x, y, x' *et* y' *sont des réels on a :*
   . *addition :* $z+z'=(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i\ (y+y')$.
   . *soustraction :* $z-z'=(x+iy)-(x'+iy')=(x-x')+i\ (y-y')$.
   . *multiplication :* $zz'=(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i\ (xy'+yx')$,

2) $\forall z,z'\in\mathbb{C},\ z+z'=z'+z$ *et* $zz'=z'z$.

3) $\forall z\in\mathbb{C},\ z+0=0+z=z,\ z.1=1.z=z$ *et* $z.0=0.z=0$.

4) $\forall z,z',z''\in\mathbb{C},\ (z+z')+z''=z+(z'+z'')$ *et* $(zz')z''=z(z'z'')$.

5) $\forall z,z',z''\in\mathbb{C},\ z(z'+z'')=zz'+zz''$.

6) *L'opposé de* $z=x+i\ y$ *est* $-z=(-x)+i\ (-y)=-x-i\ y$.

7) *L'inverse de* $z\in\mathbb{C}^*$, *noté* $z'=\dfrac{1}{z}$, *si* $z=x+iy$ *alors*

$$z'=\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}+\ i\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

8) $z^0=1,\ \ z^n=z\times\cdots\times z$ *(n fois,* $n\in\mathbb{N}$*) et* $z^{-n}=\left(\dfrac{1}{z}\right)^n=\dfrac{1}{z^n}$ *avec* $z\neq 0$.

9) $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ *avec* $z\neq 1$.

2.3 Conjugué d'un nombre complexe

On appelle conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$ le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$. On a donc $\mathfrak{Re}(\overline{z}) = \mathfrak{Re}(z)$, $\mathfrak{Im}(\overline{z}) = -\mathfrak{Im}(z)$ et $\overline{z} = \mathfrak{Re}(z) - i\mathfrak{Im}(z)$.

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1) $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ *et* $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$.

2) $\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ *avec* $z' \neq 0$.

3) $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$ *et* $z - \overline{z} = i2\mathfrak{Im}(z)$ *i.e,.* $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.

4) $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$ *(z est réel).*

5) $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$ *(z est imaginaire pur).*

6) Si $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$, alors $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

2.4 Module d'un nombre complexe

On appelle module de $z \in \mathbb{C}$, le réel positif noté $|z|$ et défini par :$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a les propriétés suivantes :

1) Si $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$.

2) Si z est réel ($z = x \in \mathbb{R}$), alors son module est aussi sa valeur absolue ($|z| = \sqrt{x^2} = |x|$).

3) Si $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\mathfrak{Re}(z) = x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

4) $|z|^2 = z \times \overline{z}$, $|\overline{z}| = |z|$ *et* $|-z| = |z|$.

5) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

6) $|zz'| = |z||z'|$, $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *avec* $z' \neq 0$.

7) Si $z \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ *et* $|z| = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$.

8) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ *(L'inégalité triangulaire).*

En effet,

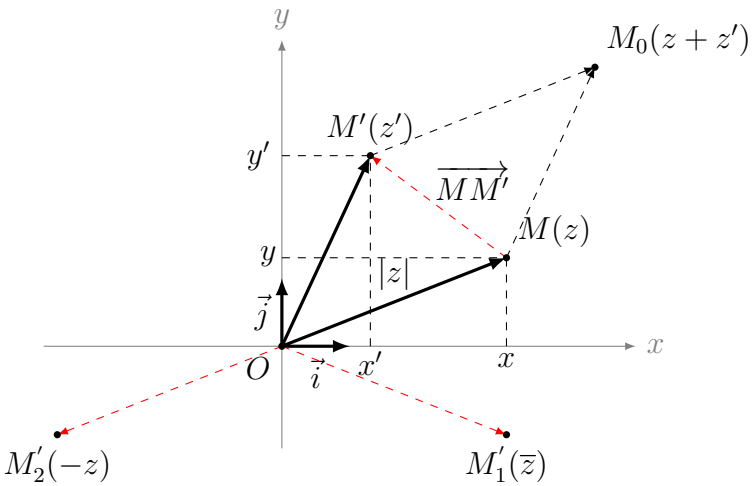
$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\,\overline{(z + z')} = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{z'}| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z||\overline{z'}| + |z'|^2 \\ &\leq (|z| + |z'|)^2. \end{aligned}$$

Puisque les deux expressions $|z + z'|$ et $(|z| + |z'|)$ sont des réels positifs, on en deduit que : $\sqrt{|z + z'|^2} = |z + z'| \leq \sqrt{(|z| + |z'|)^2} = |z| + |z'|$.

2.5 Interprétation géométrique des nombres complexes

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on peut représenter le nombre complexe $z = x + iy$ par le point M (ou le vecteur $\vec{u}$) de coordonnées (x, y). On dit que M (resp. $\vec{u}$) est l'image (resp. le vecteur image) de z, il est noté $M(z)$ (resp. $\vec{u}(z)$). Réciproquement z est appelé affixe du point M (resp. du vecteur $\vec{u}$). Le plan $\mathcal{P}$ est alors appelé plan complexe. Les axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ sont appelés respectivement axe des réels et axe des imaginaires. Pour tout points M et M' du plan $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on a l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est z, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est z' et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$.

• *M et M' sont symétriques par rapport à O (resp. (Ox)) si $z' = -z$ (resp. $z' = \overline{z}$).*



2.6 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$ un nombre complexe non nul d'image M dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 2.6.1. *On appelle argument de z toute mesure en radians θ de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. On note $\theta = \arg(z)$.*

Remarque 2.6.1. *1) Les arguments d'un nombre complexe non nul z sont les réels de la forme $\theta + 2\pi k$ où θ est l'un des arguments de z et k est un entier relatif.*

2) L'unique argument θ appartenant a l'intervalle $]-\pi,\pi]$ s'appelle l'argument principal de z et on le note $Arg(z)$.

Exemple 2.6.1. *1) $Arg(0)=2$, $Arg(i)=\frac{\pi}{2}$, et $Arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$.*

2) Si $z\in\mathbb{R}_+^*$, alors $\arg(z)=2\pi k$ et si $z\in\mathbb{R}_-^*$, alors $\arg(z)=\pi+2\pi k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

3) Si $z\in i\mathbb{R}_+^*$, alors $\arg(z)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ et si $z\in i\mathbb{R}_-^*$, alors $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Définition 2.6.2. *On appelle forme trigonométrique de z non nul l'écriture :*

$$z=|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) \text{ avec } \theta=arg(z).$$

Remarque 2.6.2. *1) Si $|z|=1$, alors $z=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.*

2) Soient $r\in\mathbb{R}_+^*$ et soit $\theta\in\mathbb{R}$, on a :

$$z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))\Longleftrightarrow r=|z| \text{ et } arg(z)=\theta.$$

3) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls, on a :

$$z_1=z_2\Longleftrightarrow(|z_1|=|z_2| \text{ et } \arg(z_2)=\arg(z_1)+2\pi k, \text{ avec } k\in\mathbb{Z}).$$

4) Relations entre forme algébrique et forme trigonométrique :

$$\begin{cases}|z|=\sqrt{x^2+y^2}\\ \cos(\theta)=\dfrac{x}{|z|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \sin(\theta)=\dfrac{y}{|z|}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

Exemple 2.6.2. *Soit les nombres complexes, $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=2-2i$.*
Les modules $|z_1|=2$ et $|z_2|=2\sqrt{2}$, on doit avoir

$$z_1=2(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1)) \text{ et } z_2=2\sqrt{2}(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2)),$$

d'où

$$\begin{cases}\cos(\theta_1)=\dfrac{1}{2}\\ \sin(\theta_1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad et \quad \begin{cases}\cos(\theta_2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin(\theta_2)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\end{cases}$$

donc, $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$ et $\theta_2=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Formes trigonométriques :

$$z_1=2(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})) \text{ et } z_2=2\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

Proposition 2.6.1. *Si z et z' sont des nombres complexes non nuls, alors :*

1) $\arg(\overline{z}) = -\arg z + 2\pi k$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2\pi k$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

3) $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2\pi k$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

4) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2\pi k$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

5) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2\pi k$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soient $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = |z'|(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$ écrits sous leurs formes trigonométriques.

1) On a :

$$\begin{aligned} zz' &= |z||z'|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= |z||z'|\left(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')\right) \\ &= |z||z'|\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right). \end{aligned}$$

Donc $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

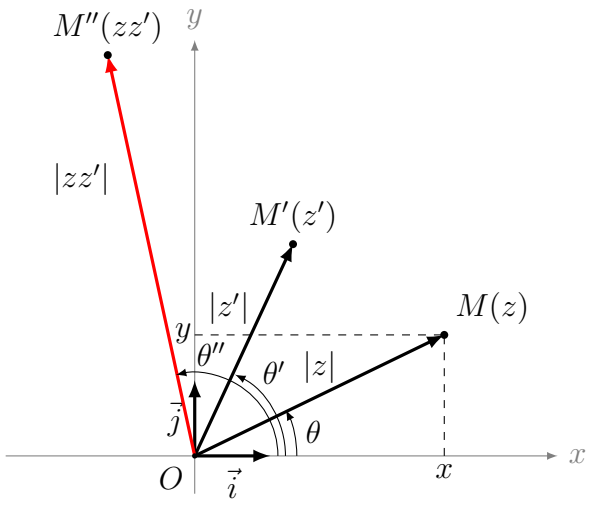
2) On a : $\overline{z} = |z|(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = |\overline{z}|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.
Donc $\arg(\overline{z}) = -\arg z + 2\pi k$.

3) Par récurrence.

4) On pose : $z' = \frac{1}{z}$, alors $zz' = 1$.

5) On a : $\frac{z}{z'} = z.\frac{1}{z'}$ et on utilise les propriétés précédentes.

□



2.7 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Pour tout réel θ, on pose $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$. On a pour tous réels θ et θ',

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (cos(\theta) + isin(\theta))(cos(\theta') + isin(\theta')) \\ &= cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta') + i(cos(\theta)sin(\theta') + sin(\theta)cos(\theta')) \\ &= cos(\theta + \theta') + isin(\theta + \theta') = e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

Tout nombre complexe z, non nul de module r et d'argument θ, peut s'écrire sous forme exponentielle suivante : $z = re^{i\theta}$.
Par exemples : $i = 1(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-1 = 1(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = e^{i\pi}$.

Proposition 2.7.1. *Pour tous réels θ, θ' et pour tout entier relatif n, on a :*

1) $|e^{i\theta}| = 1$, $\mathfrak{Re}(e^{i\theta}) = cos(\theta)$, $\mathfrak{Im}(e^{i\theta}) = sin(\theta)$ et $arg(e^{i\theta}) = \theta + 2\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, $e^{-i\theta} = cos(-\theta) + isin(-\theta) = \overline{e^{i\theta}}$ et $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

3) $e^{i\theta}e^{i\theta'} \neq 0$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Démonstration. 1) $|e^{i\theta}| = |\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = \sqrt{(cos(\theta))^2 + (sin(\theta))^2} = 1$.

2) On a $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \overline{e^{i\theta}}$.
On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_+, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
- Pour $n = o$, on a $(e^{i\theta})^0 = 1 = e^{i0\theta}$ est vraie.
- On suppose que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ et on montre que $(e^{i\theta})^{n+1} = e^{i(n+1)\theta}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
$(e^{i\theta})^{n+1} = e^{i\theta}(e^{i\theta})^n = e^{i\theta}e^{in\theta} = e^{i(n+1)\theta}$.
Si $n \in \mathbb{Z}_-$, alors $\exists m \in \mathbb{N}, n = -m$. Donc
$(e^{i\theta})^n = (e^{i\theta})^{-m} = \dfrac{1}{(e^{i\theta})^m} = e^{-im\theta} = e^{in\theta}$.

3) D'aprés 2), on a $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta-i\theta} = e^0 = 1$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta)}\dfrac{1}{e^{i\theta'}}$.
Donc $e^{i\theta} \neq 0$, $e^{i\theta'} \neq 0$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}e^{-i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}$.

□

Soient $z = |z|e^{i\theta}$ et $z' = |z'|e^{i\theta'}$ écrits sous leurs formes exponentielles. Alors

1) $zz' = (|z|e^{i\theta})(|z'|e^{i\theta'}) = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}$ et $z^n = |z|^n e^{in\theta}$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

2) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{|z|e^{i\theta}}{|z'|e^{i\theta'}} = \dfrac{|z|}{|z'|}e^{i\theta}e^{-i\theta'} = \dfrac{|z|}{|z'|}e^{i(\theta-\theta')}$,

3) $z = z' \Longleftrightarrow (|z| = |z'|$ et $\theta' = \theta + 2\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z})$.

A l'aide de ces formules, on retrouve les formules trigonométriques (formules d'addition, de duplication et de multiplication). On a :

$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} \iff \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = (\cos(\theta)+i\sin(\theta))(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$

$e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta}e^{-i\theta'} \iff \cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta') = (\cos(\theta)+i\sin(\theta))(\cos(\theta')-i\sin(\theta'))$,

d'où

$$\begin{cases} \cos(\theta+\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \\ \sin(\theta+\theta') = \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \cos(\theta-\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta') \\ \sin(\theta-\theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') - \cos(\theta)\sin(\theta'). \end{cases}$$

D'aprés ces formules d'addition on peut déduire les formules suivantes :

$$\begin{cases} \cos(\theta)\cos(\theta') = \dfrac{1}{2}(\cos(\theta+\theta') + \cos(\theta-\theta')) \\ \sin(\theta)\sin(\theta') = -\dfrac{1}{2}(\cos(\theta+\theta') - \cos(\theta-\theta')) \\ \sin(\theta)\cos(\theta') = \dfrac{1}{2}(\sin(\theta+\theta') + \sin(\theta-\theta')) \\ \cos(\theta)\sin(\theta') = \dfrac{1}{2}(\sin(\theta+\theta') - \sin(\theta-\theta')). \end{cases}$$

En posant $\theta' = \theta$, on obtient les formules suivantes :

$$\begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin(\theta)^2 = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin(\theta)^2 \\ \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta). \end{cases}$$

Exemple 2.7.1. *Calculons* $(1+i)^{2020}$.
On a $1+i = \sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\cos(\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(\dfrac{\pi}{4})) = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$.
D'où,

$$(1+i)^{2020} = \sqrt{2}^{2020}e^{i(2020\frac{\pi}{4})} = 2^{1010}e^{505\pi i} = 2^{1010}(e^{\pi i})^{505} = -2^{1010}.$$

2.8 Formules de Moivre et d'Euler

1) Pour tout réel θ, et pour tout entier relatif n, la formule de Moivre est :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{2.1}$$

2) Pour tout réel θ, on a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.

On obtient, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$.

Les formules suivantes, dites formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{2.2}$$

2.8.1 Expressions de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

En developpant le premier membre de (2.1) *par la formule du binôme de Newton et en separant partie reelle et partie imaginaire, on obtient* $\cos(n\theta)$ *et* $\sin(n\theta)$ *i.e.,*

$$\cos(n\theta) = \mathfrak{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) \quad et \quad \sin(n\theta) = \mathfrak{Im}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n).$$

Exemple 2.8.1. *1) Calcul de* $\cos 2x$ *et* $\sin 2x$*. On a*

$$\cos(2x) + i\sin(2x) = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\cos(x)\sin(x).$$

$$D'où : \begin{cases} cos2x = \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin 2x = 2\cos(x)\sin(x). \end{cases}$$

2) Calcul de $\cos 3x$ *et* $\sin 3x$*. On a*

$$(\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x).$$

$$D'où : \begin{cases} cos3x = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\ \sin 3x = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x). \end{cases}$$

2.8.2 Linéarisation d'expressions trigonométriques

Il s'agit d'exprimer $\cos^n(\theta)\sin^m(\theta)$ *où* $n, m \in \mathbb{N}$ *comme somme d'élements de la forme :* $a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)$, $k \in \mathbb{N}$ *et* $k \leq n+m$*. La méthode consiste à utiliser les formules d'Euler (generalisée) et la formule du binôme de Newton :*

$$\begin{cases} \cos^n(\theta) = \dfrac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n}{2^n} \\ \sin^m(\theta) = \dfrac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^m}{(2i)^m} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \cos(k\theta) = \dfrac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} \\ \sin(k\theta) = \dfrac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i}. \end{cases}$$

Exemple 2.8.2. *Linéariser* $\cos^2(x), \sin^2(x), \cos^3(x), \sin^3(x)$ *et* $\cos(x)\sin^3(x)$.

1)
$$\begin{cases} \sin^2(x) = \dfrac{(e^{ix} - e^{-ix})^2}{(2i)^2} = -\dfrac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2) = -\dfrac{1}{4}(2\cos 2x - 2) \\ \cos^2(x) = \dfrac{(e^{ix} + e^{-ix})^2}{(2)^2} = \dfrac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) = \dfrac{1}{4}(2\cos 2x + 2), \end{cases}$$

$$d'où \quad \begin{cases} \sin^2(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2(x) = \dfrac{1}{2}(\cos 2x + 1). \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \sin^3(x) = \dfrac{(e^{ix} - e^{-ix})^3}{(2i)^3} = -\dfrac{1}{8i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = -\dfrac{1}{8}(2\sin 3x - 6\sin x) \\ \cos^3(x) = \dfrac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{(2)^3} = \dfrac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \dfrac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x), \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} \sin^3(x) = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x) \\ \cos^3(x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x). \end{cases}$

3) $\cos(x)\sin^3(x) = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})}{2}\frac{(e^{ix}-e^{-ix})^3}{(2i)^3} = \frac{1}{2^3}(-\sin 4x + 2\sin 2x).$

2.9 Racines n-iémes d'un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe et $n \in \mathbb{N}^*$, une racine n-iéme de Z, c'est un nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

- *Si $Z = 0$, alors il y a une racine n-iéme unique $z = 0$.*
- *Si $Z \in \mathbb{C}^*$. Posons $Z = |Z|e^{i\theta} = |Z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ et cherchons $z = |z|e^{i\alpha} = |z|(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ tel que $z^n = Z$. On a :*

$$z^n = Z \Longleftrightarrow |z|^n e^{in\alpha} = |Z|e^{i\theta} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z|^n = |Z| \\ n\alpha = \theta + 2\pi k, \ avec\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \ avec\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Donc, tout nombre complexe non nul $Z = |Z|e^{\imath\theta}$ admet exactement n racines n-iéme deux à deux distincts z_k, $1 \leq k \leq (n-1)$ où

$$z_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n})} = \sqrt[n]{|Z|}\left(\cos(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n})\right).$$

Remarque 2.9.1. *1) Si $n \in \mathbb{N}^*$, $|z_k| = \sqrt[n]{|Z|}$ et si $n \geq 2$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.*

2) Si $Z = 1$, les n racines n-iémes de l'unité sont donc les nombres :

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k}{n}), \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

- Par exemple, les racines 3-ième (ou cubiques) de 1 sont :
$z_0 = 1, z_1 = e^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = e^{\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) les racines n-iémes z_k de Z peuvent aussi être obtenues en multipliant l'une des racines n-iéme de Z par les racines n-iémes de l'unité.

4) Si $n = 2$, le nombre complexe non nul $Z = |Z|e^{i\theta}$ admet exactement deux racines carrées opposées :

$$z_0 = \sqrt{|Z|}e^{i\frac{\theta}{2}} \ \ et \ \ z_1 = -\sqrt{|Z|}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

- Par exemple, le nombre complexe $Z = -1 + i\sqrt{3}$ *s'écrit* $2e^{\frac{2\pi}{3}}$, *ses racines carrées sont :* $z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ *et* $z_1 = -\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2} = -z_0$.

Exemple 2.9.1. *1) Déterminer les racines* 3*-ième (ou cubiques) du* $Z = -8i$.

Soit $z = |z|e^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$ *tel que*

$$z^3 = -8i \Longleftrightarrow z^3 = 2^3(-i) = 2^3 e^{-\frac{\pi}{2}} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ \alpha = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \ avec\ k \in \{0,1,2\}. \end{cases}$$

Donc les trois racines cubiques de -8i sont

$$z_k = 2e^{-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}} = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})\right), \ avec\ k \in \{0,1,2\},$$

c'est-à-dire : $z_0 = 2e^{-\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i, z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}} = 2i$ *et* $z_2 = 2e^{\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^4 = \sqrt{3} + i \qquad (1)$.

On a $|\sqrt{3} + i| = 2$ *et* $arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}$, *d'où* $\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{\pi}{6}}$.

Les solutions de l'équation (1), *sont les racines quatriémes de* $Z = \sqrt{3}+i$. *On pose* $z = |z|e^{i\alpha}$, *d'où*

$$(1) \Longleftrightarrow z^4 = 2e^{\frac{\pi}{6}} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[4]{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, \ avec\ k \in \{0,1,2,3\}. \end{cases}$$

Donc les quatres solutions de (1) *sont :*

$z_0 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{24}}$, $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{13\pi}{24}} =$, $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{25\pi}{24}}$ *et* $z_3 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{37\pi}{24}}$.

2.10 Résolution de l'équation du second degré

2.10.1 Calcul des racines carrées sous forme algébrique

On appelle racine carrée du nombre complexe $Z = X + iY$ *tout nombre complexe* $z = x + iy$ *tel que :* $z^2 = Z$. *On a alors :*

$$z^2 = Z \Longleftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = X + iY \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = X, \\ 2xy = Y, \end{cases}$$

le signe de xy *étant celui de* Y. *Si* $Y > 0$, x *et* y *ont le même signe et de signe contraire si* $Y < 0$. *De plus :*

$|z^2| = |z|^2 = |Z| \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = |Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$, *donc on a*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ x^2 + y^2 = |Z| \\ 2xy = Y, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{|Z|+X}{2} \\ y^2 = \frac{|Z|-X}{2} \\ sgn(xy) = sgn(Y), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |x| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|Z|+X} \\ |y| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|Z|-X} \\ sgn(xy) = sgn(Y), \end{cases}$$

le nombre complexe Z possède donc deux racines carrées opposées z et $-z$.

Exemple 2.10.1. *1) On a $(1+i)^2 = 2i$ (respectivement, $(1-i)^2 = -2i$), alors les racines carrées de $2i$ (respectivement, $-2i$) sont $(1+i)$ et $-(1+i)$ (respectivement,(1-i) et -(1-i)).*

2) Si $Z = X \in \mathbb{R}$, alors les racines carrées de Z sont

$$\begin{cases} \sqrt{X} \ \ et \ \ -\sqrt{X}, & si\ X > 0, \\ i\sqrt{-X} \ \ et \ \ -i\sqrt{-X}, & si\ X < 0. \end{cases}.$$

3) Si $Z = iY \in i\mathbb{R}^*$, alors $Z = iY = \frac{1}{2}(2i)Y = \frac{1}{\sqrt{2}^2}(1+i)^2 Y$. D'où les racines carrées de Z sont

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{Y}{2}}(1+i) \ \ et \ \ -\sqrt{\frac{Y}{2}}(1+i), & si\ Y > 0, \\ \sqrt{\frac{-Y}{2}}(1-i) \ \ et \ \ -\sqrt{\frac{-Y}{2}}(1-i), & si\ Y < 0. \end{cases}.$$

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = -3 + 4i$ (2).

Les solutions de l'équation (2), sont les racines carrées de $Z = -3 + 4i$. Le nombre $z = x + iy$ sera une telle racine carrée de Z si l'on a :

$$(x+iy)^2 = Z \Longleftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = -3 + 4i,$$

d'où

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = |Z| = 5 \\ 2xy = 4, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy > 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \ et \ y = 2 \\ x = -1 \ et \ y = -2. \end{cases}$$

Donc, les racines carrées de $-3 + 4i$ sont

$$z_1 = 1 + 2i \ et \ z_2 = -1 - 2i = -z_1.$$

2.10.2 Équation du second degré

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On considère l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue le nombre complexe z.

Pour tout nombre complexe z, on a :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \ (\textit{forme canonique}) \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right) \ (\textit{forme factorisée}), \end{aligned}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant et δ une racine carrée de Δ.

1) Si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes qui sont :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \ et \ z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

2) Si $\Delta = 0$, l'équation (E) a une seule solution (où une solution double) qui est :

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}.$$

- Dans tous les cas, on a :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}, \ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \ et \ az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Remarque 2.10.1. *Lorsque les coefficients a, b et c sont réels, alors $\Delta \in \mathbb{R}$ et l'équation (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:*

1) Si $\Delta \geq 0$, les solutions sont réelles (distinctes ou confondues) :

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \ et \ z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2) Si $\Delta < 0$, les solutions sont complexes conjuguées et distinctes :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \ et \ z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 2.10.2. *1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1-i)z - 5i = 0$ (1).*

Le discrimant de l'équation est $\Delta = 18i = 9(2i) = [3(1+i)]^2$. Les solutions de cette équation sont alors : $z_1 = -1 - 2i$ et $z_2 = 2 + i$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2\cos\theta + 1 = 0$ (2), $\theta \in \mathbb{R}$.

Le discrimant de l'équation est $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$.

L'équation (2) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = -\cos\theta + i\sin\theta \ et \ z_2 = -\cos\theta - i\sin\theta.$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(1+4i)z-3+i=0$ (3).

Le discrimant de l'équation est $\Delta=(1+4i)^2-4(-3+i)=-3+4i$. D'aprés Exemple 2.10.1 les racines carrées de $-3+4i$ sont $\delta=1+2i$ et $\delta'=-1-2i$. Alors l'équation (3) admet deux solutions complexes distinctes $z_1=i$ et $z_2=1+3i$.

2.11 Exercices

Exercice 8. *Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$$z_1=3(2-i)^3,\ z_2=\frac{-4+3i}{3+4i},\ z_3=\frac{-4+3i}{3+4i}+\frac{2-6i}{3-4i},\ z_4=\frac{1+2i}{2i}+\frac{(3+6i)^2}{3-4i}.$$

Exercice 9. *Déterminer les nombres complexes z tels que :*

$$a)\ 2z-1+2i=-iz;\ b)\ 2z-1=\overline{z}-1;\ c)\ (z-2)(\overline{z}+i)=1;\ d)\ \frac{z-1}{z-i}=2i;$$

$$e)\ (z-2)(\overline{z}-i)\in\mathbb{R}\ (\textit{soit réel});\quad f)\ (z+i)(\overline{z}-2)\in i\mathbb{R}\ (\textit{soit imaginaire pur}).$$

Exercice 10. *Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique :*

$$z_1=-\sqrt{2},\ z_2=-i\sqrt{3},\ z_3=1-i,\ z_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i},\quad z_5=(1-i\sqrt{3})^{2023},$$

$$z_6=-\sin\theta+i\cos\theta,\ z_7=\cos\theta-i\sin\theta,\ z_8=1+\cos\theta+i\sin\theta,\ \textit{où}\ \theta\in[0,\pi[.$$

Exercice 11. *Ecrire sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants :*

$$z_1=-3i,\ z_2=-2\sqrt{3},\ z_3=(1-i)^{2022},\ z_4=\frac{1+i}{1-i}e^{\frac{\pi}{3}i},\ z_5=2\cos\theta-i2\sin\theta.$$

Exercice 12. *Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixes z telles que :*

$$a)\ \mathfrak{Re}(z^3)=2;\ b)\ \mathfrak{Re}\left(\frac{z-1}{z+2}\right)=0;\ c)\ \mathfrak{Im}\left(\frac{z-2}{z+1}\right)=0;\ d)\ (z+1)(z-2i)\in\mathbb{R},$$

$$e)\ |z-1|=2\ et\ arg(z)=\frac{\pi}{6};\ f)\ |z-1+i|=|z-2+4i|;\ g)\ \left|\frac{z-3+2i}{z-1+2i}\right|=1.$$

Exercice 13. *On considère les nombres complexes suivants :*

$$z_1=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-i\sqrt{2}),\ z_2=1-i\ et\ z_3=\frac{z_1}{z_2}.$$

1. *Calculer le module et l'argument de z_1 et de z_2, puis de z_3.*
2. *Ecrire z_3 sous la forme algébrique. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.*
3. *Calculer z_3^{2024}.*

Exercice 14. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

$(a) : z^2 = 3 + 4i$; $(b) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$; $(c) : z^4 = -1 + i\sqrt{3}$; $(d) : z^6 = 1$;

$(e) : 4z^2 + 8|z|2 - 3 = 0$; $(f) : z^2 + 4z + 6 = 0$; $(g) : iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$;

$(h) : z^2 - 2z\sin\theta + 2(1 + \cos\theta) = 0$; $(j) : z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)z + 2^{2\theta} = 0, -\pi < \theta < \pi$.

Exercice 15. *1. Trouver les racines carrées du nombre complexe $Z = 5 + 12i$.*

2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z - 1 - 3i = 0$ (1).*
3. *Montrer que l'équation : $z^3 - (2 + 3i)z + 1 + 3i = 0$ (2)*
   admet une racine réelle. Puis la résoudre.
4. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (2).*
5. *Soit A, B, C les points images des solutions de l'équation (2) dans le plan complexe. Déterminer le centre de gravité du triangle ABC.*

Exercice 16. *1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 + z + 1 = 0$, et en déduire les solutions de l'équation : $z^3 - 1 = 0$.*

2. Soit j la racine de partie complexe positive.

a) Calculer j^2 et $1 + j + j^2$.

b) Déterminer, selon les valeurs de l'entier naturel n, l'expression :

$$A_n = 1 + j^n + j^{2n}.$$

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.1 Définitions générales

3.1.1 Définition d'une suite

Définition 3.1.1. *Une suite (u_n) de nombres réels est une appliction de l'ensemble $\mathbb{N}$ ou d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $n \in \mathbb{N}$ associe un unique élément $u_n \in \mathbb{R}$, appelé terme général de la suite (u_n) (ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).*

Exemple 3.1.1. *1) La suite de terme général $u_n = \frac{n^2+5}{n}$ est une suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$. Les 3 premiers termes de cette suite sont :$u_1 = 6$, $u_2 = \frac{9}{2}$ et $u_3 = \frac{14}{3}$.*

2) La suite de terme général $v_n = \sqrt{n^2-4}$ est une suite réelle définie sur $I = \mathbb{N}^* - \{1\}$. Les 3 premiers termes de cette suite sont :$v_2 = 0$, $v_3 = \sqrt{5}$ et $v_4 = 2\sqrt{3}$.

3) Soit la suite $(w_n) = \{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, ...\}$. Le terme général de cette suite est $w_n = \dfrac{2}{2n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.1.2 Suites bornées

Définition 3.1.2. *Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est*

- *majorée, si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. On dit que M est un majorant.*
- *minorée, si $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. On dit que m est un minorant.*
- *bornée, si elle est majorée et minorée, c'est à dire, si*

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M.$$

Remarque 3.1.1. *Une suite (u_n) est bornée si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Exemple 3.1.1. • *Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2$, pour $n \in \mathbb{N}$. Cette suite est non bornée (est minorée par 0, mais non majorée).*

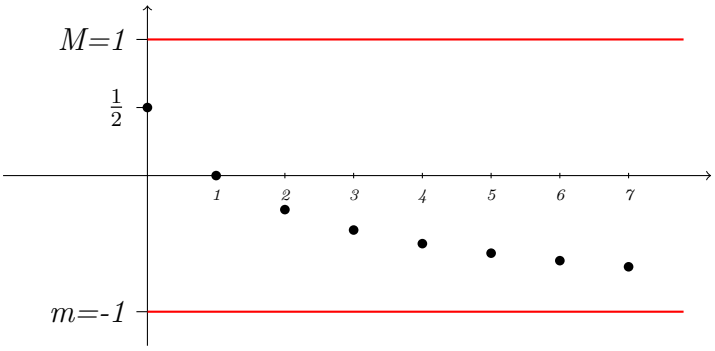
• *Soit la suite de terme général $u_n = (-3)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$. Cette suite est non bornée (n'est ni majorée, ni minorée).*

• *Soit la suite (u_n) définie par*

$$u_n = \frac{-n+1}{n+2},\ \textit{pour}\ n \in \mathbb{N}.$$

Cette suite est bornée car

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leq \frac{-n+1}{n+2} < 1.$$



3.1.3 Suites monotones

Définition 3.1.3. *Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est*

- *croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.*
- *strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$.*
- *décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.*
- *strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.*
- *monotone si elle est croissante ou décroissante.*
- *constante, si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.*
- *stationnaire, si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est à dire, si*

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p,\ u_n = u_p.$$

Remarque 3.1.2. *Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut :*

1. *Comparer u_n et u_{n+1} (par exemple on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.)*
2. *Comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, dans le cas où les termes u_n sont strictement positifs.*
3. *Utiliser les propriétés de la fonction f (étudier les variations de f), où $u_n = f(n)$.*

Exemple 3.1.2. 1. *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n}$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}$, *on a* $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. *Ainsi* $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$. *Donc la suite* (u_n) *est strictement décroissante.*

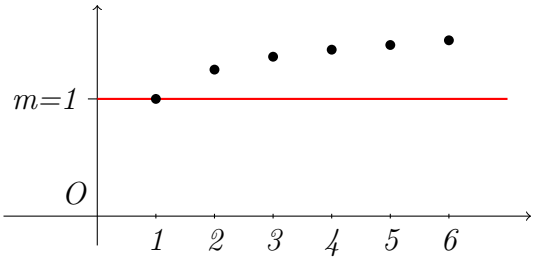
2. *La suite* (u_n) *définie par* $u_n = n^3$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *est strictement croissante, puisque* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 > 1$, *donc* $\forall n \geq 1$, *on a* $u_{n+1} > u_n$.

3. *La suite* (u_n) *définie par*

$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2}$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$

est strictement croissante, puisque

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0.$



3.2 Suites convergentes

Définition 3.2.1. *On dit qu'une suite réelle* (u_n) *converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *ou admet* ℓ *pour limite si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon),$$

c'est à dire : à partir d'un certain rang N, u_n *est proche d'aussi près que l'on veut de* ℓ. *On écrit alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, *où* $\ell \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.2.1. 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0.$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$ *(la réciproque est fausse).*

3. *Une suite* (u_n) *est divergente, si et seulement si la suite* (u_n) *n'est pas convergente, c'est à dire :* $\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N et |u_n - \ell| > \varepsilon)$.

Définition 3.2.2. 1. *On dit qu'une suite réelle* (u_n) *tend vers* $+\infty$ *si et seulement si* $\forall \mathcal{A} > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq \mathcal{A})$.

2. *On dit qu'une suite réelle* (u_n) *tend vers* $-\infty$ *si et seulement si*

$$\forall \mathcal{A} < 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \leq \mathcal{A}).$$

Exemple 3.2.1. 1. *Toute suite stationnaire est convergente.*

2. *En utilisant la définition de la limite, montrer que :*

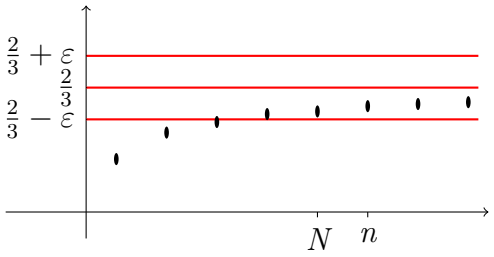
$$a) \lim_{n\to+\infty} e^{-2n+1} = 0, \qquad b) \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n+2} = \frac{2}{3}.$$

En effet,

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ |e^{-2n+1} - 0| = |e^{-2n+1}|$. *Soit* $\varepsilon > 0$, *il suffit que* $n \geq \frac{1-\ln \varepsilon}{2}$ *pour que* $|e^{-2n+1} - 0| \leq \varepsilon$. *On peut donc choisir* $N = \max\left(0, \left[\frac{1-\ln \varepsilon}{2}\right] + 1\right)$.

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{2n}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{4}{3(3n+2)}\right| \leq \frac{4}{9n}$.

Soit $\varepsilon > 0$, *il suffit que* $n \geq \frac{4}{9\varepsilon}$ *pour que* $\left|\frac{2n}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| \leq \varepsilon$. *On peut donc choisir* $N = \max\left(0, \left[\frac{4}{9\varepsilon}\right] + 1\right)$.



Théorème 3.2.1. *Si la suite* (u_n) *converge vers une limite* $\ell \in \mathbb{R}$, *cette limite* ℓ *est unique.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'une suite réelle (u_n) converge à la fois vers ℓ et vers ℓ' avec $\ell < \ell'$. Posons $\varepsilon = \dfrac{\left|\ell - \ell'\right|}{2}$, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow (\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon), \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell' \Rightarrow \left(\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Rightarrow \left|u_n - \ell'\right| \leq \varepsilon\right). \end{cases}$$

Notons $N_0 = \max(N_1, N_2)$, alors pour $n \geq N_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $\left|u_n - \ell'\right| < \varepsilon$. Alors

$$\left|\ell - \ell'\right| \leq |u_n - \ell| + \left|u_n - \ell'\right| < 2\varepsilon = \left|\ell - \ell'\right|,$$

on vient d'aboutir à l'inégalité $\left|\ell - \ell'\right| < \left|\ell - \ell'\right|$ qui est impossible, donc $\ell = \ell'$. □

Théorème 3.2.2. *Toute suite convergente est bornée (la réciproque est fausse).*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

On a $u_n = u_n + \ell - \ell \Rightarrow |u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell|, \quad n \geq N$.

Prenons $\varepsilon = 1$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$ on a $|u_n - \ell| \leq 1$, alors $\quad |u_n| \leq |\ell| + 1, \quad$ pour $n \geq N_0$.

Soit $M = \max\{|u_0|, |u_1|, .., |u_{N_0-1}|, |\ell| + 1\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \leq M$, donc par conséquent, la suite (u_n) est bornée. □

Remarque 3.2.2. 1) *Si la suite* (u_n) *est non bornée, alors elle est divergente (C'est le contraposée de Théorème 3.2.2).*

2) *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$. *On a* $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 1$, *mais la suite* (u_n) *est divergente.*

Proposition 3.2.1. 1) *Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée.*

2) *Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.*

Démonstration. 1) Soit (u_n) une suite tendant vers $+\infty$. On a

$$\forall \mathcal{A} > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \geq \mathcal{A}).$$

Prenons $\mathcal{A} = 1$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$ on a $u_n \geq 1$.
Soit $m = \inf\{u_0, u_1, .., u_{N_0}, 1\}$, on conclut pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq m$.
2) Se ramène à 1) en considérant $(-u_n)$. □

Théorème 3.2.3. (*Opérations sur les suites convergentes*) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ', et soit λ un réel, alors :*

1) *la suite $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.*
2) *la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.*
3) *la suite (λu_n) converge vers $\lambda\ell$.*
4) *la suite $(u_n.v_n)$ converge vers $\ell.\ell'$.*
5) *Si $\ell \neq 0$, et les termes u_n de la suite sont non nuls à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.*
6) *Si $\ell' \neq 0$, et les termes v_n de la suite sont non nuls à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.*

Démonstration. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'. On montre 1), 2) et 3).

1) Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq n_0$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Comme $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|$ alors $||u_n| - |\ell|| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $|u_n|$ tend vers $|\ell|$.

2) Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \left(\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\right), \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \Rightarrow \left(\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Rightarrow \left|v_n - \ell'\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\right). \end{cases}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$, on a donc pour $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \left|v_n - \ell'\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\right| = \left|(u_n - \ell) + (v_n - \ell')\right| \leq |u_n - \ell| + \left|v_n - \ell'\right| \leq \varepsilon,$$

donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell'$.

3) Soit $\varepsilon > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \left(\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{1+|\lambda|}\right)$.

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |\lambda|\,|u_n - \ell| = |\lambda u_n - \lambda \ell| \leq \frac{\varepsilon|\lambda|}{1+|\lambda|} \leq \varepsilon,$$

et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda \ell$.

□

Exemple 3.2.1. *Soit (u_n) une suite réelle convergent vers ℓ, alors*

- *la suite $u_n(1-u_n)$ converge vers $\ell(1-\ell)$.*
- *Si $\ell \neq 0$, la suitet $\dfrac{1}{u_n - 1}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell - 1}$.*

Proposition 3.2.2. *Soient (u_n) et (v_n) deux suite, telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite bornée et (v_n) convergent vers 0 alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.*

Démonstration. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe $M \in \mathbb{R}_*^+$, tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq n_0$ alors $|u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$, donc $|u_n v_n| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $(u_n v_n)$ tend vers 0. □

Exemple 3.2.2. 1) *Soit la suite de terme générale $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme la suite $((-1)^n)$ est bornée et la suite $(\frac{1}{n})$ tend vers 0, alors (u_n) tend vers 0.*

2) *Considérons la suite de terme général $u_n = \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -1 \leq \cos(n) \leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Proposition 3.2.3. *Soit (u_n) une suite réelle de termes strictement positifs, alors*

- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.*

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq n_0$ alors $u_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Donc $0 < \dfrac{1}{u_n} < \varepsilon$, ce qui montre que $\dfrac{1}{u_n}$ tend vers 0. On procède de la même façon dans le second cas. □

Remarque 3.2.3. (*Formes indéterminées*) *Quand on calcule des limites, les formes suivantes sont indéterminées :* $\dfrac{\infty}{\infty},\ \dfrac{0}{0},\ 0\times\infty,\ \infty-\infty.$

Exemple 3.2.3. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n^2-5n+7)$. *C'est une forme indéterminée du type* $(+\infty-\infty)$, *on a :*
   $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n^2-5n+7)=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(3-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2})=\lim\limits_{n\to+\infty}3n^2=+\infty.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{5n^2-23}{2n^3+2n-1}}$. *C'est une forme indéterminée du type* $(\frac{+\infty}{+\infty})$, *on a :*
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{5n^2-23}{2n^3+2n-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{5n^2}{2n^3}\frac{1-\frac{23}{5n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{2n}=0.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{4n^2+5n-2}-2n$. *C'est une forme indéterminée du type* $(+\infty-\infty)$, *on a :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{4n^2+5n-2}-2n &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+5n-2}-2n)(\sqrt{4n^2+5n-2}+2n)}{\sqrt{4n^2+5n-2}+2n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{5n-2}{\sqrt{4n^2+5n-2}+2n}=\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n^2+1}}{3n^2}$.
   C'est une forme indéterminée du type $(+\infty-\infty)/+\infty$, *on a :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n^2+1}}{3n^2} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n^2+1}\right)}{3n^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n^2+1})}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n-n^2}{3n^2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n^2+1})}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-n}{3n}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n^2+1}}=0.\end{aligned}$$

Théorème 3.2.4. (*Passage à la limite*) *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles convergentes telles que :* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\le v_n$. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty}u_n\le\lim_{n\to+\infty}v_n.$$

Théorème 3.2.5. (*théorème des gendarmes*) *Soient* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *trois suites réelles telles que :* $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n\le u_n\le w_n$.
Si les suites (v_n) *et* (w_n) *convergent vers* ℓ, *alors la suite* (u_n) *converge vers* ℓ.

Démonstration. On applique la définition de la limite vers ℓ pour les deux suites (v_n) et (w_n), pour tout $\varepsilon>0$,

$$\exists n_1\in\mathbb{N},\quad n\ge n_1\Rightarrow\ell-\varepsilon<v_n<\ell+\varepsilon.$$

$$\exists n_2\in\mathbb{N},\quad n\ge n_2\Rightarrow\ell-\varepsilon<w_n<\ell+\varepsilon.$$

En choisissant $n_3 = \max(n_1, n_2)$, pour $n \geq n_3$, on a

$$\ell - \varepsilon < v_n < u_n < w_n < \ell + \varepsilon,$$

ce qui démontre que la suite (u_n) converge vers ℓ. □

Exemple 3.2.4. 1) *Considérons la suite de terme général* $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}, n \geq 1$.

On a $v_n = -\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{\sin(n)}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2} = w_n$. *Comme les suites* (v_n) *et* (w_n) *convergent vers* 0, *alors la suite* (u_n) *converge vers* 0.

2) *Soit la suite de terme générale* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $\dfrac{-1}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Proposition 3.2.4. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites telles que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n$.

- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Théorème 3.2.6. 1) *Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.*

2) *Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.*

3) *Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers* $+\infty$.

4) *Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers* $-\infty$.

Exemple 3.2.2. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{n+k}$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$. *Cette suite est croissante car* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$.

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq n\dfrac{1}{n+1} \leq 1$, *donc* (u_n) *est majorée par* 1. *On conclut que* (u_n) *converge.*

3.3 Suites adjacentes

Définition 3.3.1. *Deux suites réelles* (u_n) *et* (v_n) *sont dites adjacentes si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. (u_n) *est croissante,* 2. (v_n) *est décroissante,* 3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Remarque 3.3.1. *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites adjacentes avec* (u_n) *croissante et* (v_n) *décroissante, alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.

Théorème 3.3.1. *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) soit croissante et (v_n) soit décroissante, alors (u_n) et (v_n) sont convergent vers la même limite. De plus, en notant ℓ cette limite commune, on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Démonstration. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$. La suite (w_n) est décroissante car $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$,
alors la suite $(v_n - u_n)$ minorée par 0, car $(v_n - u_n)$ tend vers 0, donc $v_n \geq u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a ainsi $u_0 \leq u_1 \leq .... \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq ... \leq v_0$.
La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 est convergent. La suite $(v_n)_n$ est décroissante et minorée par u_0 est convergent. En notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, or $\ell - \ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, d'où $\ell = \ell'$ et finalement :

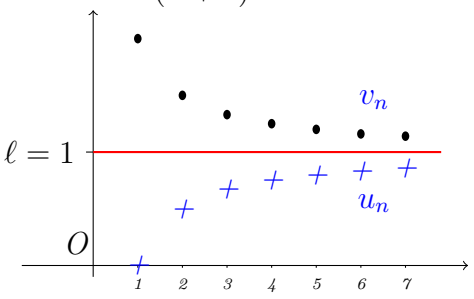
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

□

Exemple 3.3.1. *La suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est strictement décroissante puisque $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)} < 0$. La suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est croissante puisque $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$.*

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} = 0$.

Donc (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, ce qui impliquent qu'elles convergent vers la même limite $\ell = 1$.



Théorème 3.3.2. (*Théorème des segments emboîtés*)
Si $([a_n; b_n])$ est une suite décroissante de segments (c-à-d, $\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$) tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$. Alors, il existe un réel ℓ unique tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.

Démonstration. On a $\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$). On en déduit $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$. Puisque de plus, on suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$, on peut affirmer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers un même réel ℓ.
$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \ell \leq b_n$, alors $\ell \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.
Soit $\ell' \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \ell' \leq b_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (b_n - a_n) \geq |\ell' - \ell|$, d'où $\ell' = \ell$. □

3.4 Suites extraites

Définition 3.4.1. *Soit (u_n) une suite réelle et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ est appelée suite extraite ou sous-suite de (u_n).*

Remarque 3.4.1. *Comme l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(n) \geq n$.*

Exemple 3.4.1. 1. *Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).*

2. *Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (-2)^n, n \in \mathbb{N}$.*

a) *Si on considère $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\varphi(n) = 2n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $v_n = u_{\varphi(n)} = (-2)^{2n} = 2^{2n}$.*

b) *Si on considère $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\varphi(n) = 3n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $v_n = u_{\varphi(n)} = (-2)^{3n} = (-1)^n 2^{3n}$.*

Proposition 3.4.1. *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et à la même limite.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ. On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon),$$

Soit $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n), où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. On a : $\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(n) \geq n$. Donc

$$n \geq N \Rightarrow \varphi(n) \geq N \Rightarrow \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

La suite $(u_{\varphi(n)})$ converge donc vers ℓ. □

Remarque 3.4.2. *Si une suite (u_n) admet une sous-suite divergente, ou deux sous-suites qui convergent vers deux limites différentes, alors elle diverge.*

Exemple 3.4.1. *La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente car*

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = 1 \neq \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = -1.$$

Proposition 3.4.2. *Soit (u_n) une suite. Si les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.*

Théorème 3.4.1. (*Théorème de Bolzano-Weierstrass*)
Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Exemple 3.4.2. *On considère la suite* (u_n) *de terme général* $u_n = (-1)^n$ ((u_n) *est bornée*). *Alors on peut considérer les deux sous-suites* (u_{2n}) (*converge vers 1*) *et* (u_{2n+1}) (*converge vers -1*).

3.5 Suites de Cauchy

Définition 3.5.1. *Une suite réelle* (u_n) *est dite de Cauchy si elle vérifie la condition :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } m \geq N \Rightarrow |u_n - u_m| \leq \varepsilon).$$

Proposition 3.5.1. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy. On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } m \geq N \Rightarrow |u_n - u_m| \leq \varepsilon).$$

Prenons $\varepsilon = 1$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$ on a $|u_p - u_N| \leq 1$.
Donc $p \geq N$ on a $|u_p| < |u_N| + 1$, car $|u_p| - |u_N| \leq |u_p - u_N|$.
Soit $M = \max\{|u_0|, |u_1|, .., |u_{N-1}|, |u_N|+1\}$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M$, donc par conséquent, la suite (u_n) est bornée. □

Proposition 3.5.2. *Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Pour $p, q \geq n_\varepsilon$, on a

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_p - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Réciproquement, supposons que la suite (u_n) est de Cauchy. La suite (u_n) est bornée, par la proposition 3.5.1. D'aprés le théorème de Bolzano- Weierstrass, on peut extraite une sous-suite convergente (u_{n_k}) qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Nous allons vérifier que la suite (u_n) converge, elle aussi, vers ℓ. Donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$.

Puisque la suite (u_n) est de Cauchy il existe un entier n_1 tel que, pour $p, q \geq n_1$, on a $|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque la suite (u_{n_k}) converge vers ℓ, il existe un entier k_1 tel que, pour tout $k \geq k_1$, on a $|\ell - u_{n_k}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n_{k_1} \geq \max(n_1, k_1)$ et $N' = n_{k_1}$. Il est clair que $N' \geq n_1$. Pour chaque $n \geq N'$ nous avons :

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{N'}| + \left|\ell - u_{n_{k_1}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

□

3.6 Généralisation de la notion de la limite

Définition 3.6.1. *Un nombre a est valeur d'adhérence d'une suite (u_n) si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq N\ \Rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon.$$

Exemple 3.6.1. *La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ admet deux valeurs d'adhérence 1 et -1.*

Proposition 3.6.1. 1. *Le nombre a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement s'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.*

2. *Toute suite (u_n) convergente a une unique valeur d'adhérence. Cette unique valeur d'adhérence est la limite de la suite (u_n).*

3. *Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ admet au moins une valeur d'adhérence.*

Exemple 3.6.2. *Soit (u_n) la suite définie par*

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, & \text{pour } n = 3k, \\ -1 + \dfrac{1}{k^2}, & \text{pour } n = 3k+1, \\ 3, & \text{pour } n = 3k+2. \end{cases}$$

Cette suite est divergente mais les trois sous-suites (u_{3k}), (u_{3k+1}) et (u_{3k+2}) sont convergentes et on pour limites respectives $\dfrac{1}{5}$, -1 et 3. Les nombres -1, $\dfrac{1}{5}$ et 3 sont des valeurs d'adhérence de la suite (u_n).

- *La suite (u_n) est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \in \{\ell \in \mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$.*

Théorème 3.6.1. *Toute suite réelle admet une sous-suite convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

3.6.1 Limite inférieure et limite supérieure

Soit (u_n) une suite réelle. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sup\{u_k,\ k \geqslant n\} \quad et \quad V_n = \inf\{u_k,\ k \geqslant n\}.$$

Comme $\{u_k,\ k \geqslant n+1\} \subset \{u_k,\ k \geqslant n\}$, on a $U_{n+1} \leq U_n$ et $V_n \leq V_{n+1}$. On en déduit que la suite (V_n) est croissante dans $\overline{\mathbb{R}}$ et la suite (U_n) est décroissante dans $\overline{\mathbb{R}}$. Donc les deux suites (V_n) et (U_n) sont convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 3.6.2. *Soit (u_n) une suite réelle. On appelle limite supérieure (resp. inférieure) de la suite (u_n) la borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble de ses valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$. On notera :*

$$\begin{cases} \overline{\lim}\ u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n = \sup\{\ell \in \overline{\mathbb{R}},\ \ell \text{ valeur d'adhérence de } (u_n)\}, \\ (\text{resp. } \underline{\lim}\ u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n = \inf\{\ell \in \overline{\mathbb{R}},\ \ell \text{ valeur d'adhérence de } (u_n)\}). \end{cases}$$

Exemple 3.6.3. *La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ admet deux valeurs d'adhérence 1 et -1. Donc*

$$\overline{\lim} u_n = 1, \quad \underline{\lim} u_n = -1.$$

Remarque 3.6.1. *Soit (u_n) une suite réelle. On a*

1. $\begin{cases} \overline{\lim}\ u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{u_k,\ k \geq n\} = \inf\{U_n,\ n \in \mathbb{N}\}, \\ \underline{\lim}\ u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\{u_k,\ k \geq n\} = \sup\{V_n,\ n \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$
2. $\overline{\lim}\ u_n \geq \underline{\lim}\ u_n$.

Proposition 3.6.2. *Une suite réelle (u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si*

$$\overline{\lim}\ u_n = \underline{\lim}\ u_n = \ell.$$

Démonstration. Soit (u_n) une suite réelle.

Supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on a :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon),$$

pour tout $k \geq n \geq N$, on a $\varepsilon - \ell \leq u_k \leq \varepsilon + \ell$.

Par conséquent

$$\varepsilon - \ell \leq V_n = \inf\{u_k,\ k \geqslant n\} \leq u_n \leq U_n = \sup\{u_k,\ k \geqslant n\} \leq \varepsilon + \ell.$$

Donc,

$$\varepsilon - \ell \leq \underline{\lim}\ u_n \leq u_n \leq \overline{\lim}\ u_n.$$

Cet encadrement étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il entraîne :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \overline{\lim}\ u_n = \underline{\lim}\ u_n.$$

Réciproquement, Supposons que $\overline{\lim}\ u_n = \underline{\lim}\ u_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Par la définition de la borne supérieure et de la borne inférieure on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad V_n = \inf\{u_k,\ k \geqslant n\} \leq u_n \leq U_n = \sup\{u_k,\ k \geqslant n\}.$$

D'aprés le théorème des gendarmes (*d'encadrement*), on en déduit que la suite (u_n) converge vers ℓ. □

3.7 Comparaison de suites

Définition 3.7.1. (*Notations de Landau*) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*

1. *On dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad |u_n| \leqslant M|v_n|.$$

On écrit $u_n = O(v_n)$, (lire "u_n est un grand O de v_n").

2. *On dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0\ ,\quad |u_n| \leqslant \varepsilon|v_n|.$$

On écrit $u_n = o(v_n)$ ou encore $u_n \ll v_n$, (lire "u_n est un petit o de v_n").

3. *On dit que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0\ ,\quad |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon|v_n|.$$

On écrit $u_n \sim v_n$, (lire "u_n est équivalent à v_n").

Remarque 3.7.1. *Si $u_n \ll v_n$, on dit aussi :*
la suite (u_n) est infiniment petite devant la suite (v_n), ou encore la suite (v_n) est infiniment grande devant la suite (u_n).

Proposition 3.7.1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (v_n) non nuls, alors*

1. *la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est borné.*
2. *la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0.*
3. *la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1.*

Remarque 3.7.2. *Si la suite (v_n) non nuls. On a*

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$$

Exemple 3.7.1. 1) $n = o(n^2)$, $\sqrt{4n^2+1} = o(n^2)$.

2) $\sqrt{4n^2+1} = O(n)$, $n \sin n = O(n)$.

3) $n^2 + 1 \sim n^2$, $\dfrac{n}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n}$, $\sqrt{4n^2+1} \sim 2n$.

Remarque 3.7.3. *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.*

1) $u_n = O(1)$ *signifie que la suite (u_n) est bornée.*

2) $u_n = o(1)$ *(ou $u_n \ll 1$) signifie que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. *On dit, dans ce cas, que (u_n) est infiniment petite.*

3) $1 = o(v_n)$ *(ou $1 \ll v_n$) signifie que* $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. *On dit, dans ce cas, que (v_n) est infiniment grande.*

4) *Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$ et si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$.*

5) *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.*

6) *Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.*

7) *Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.*

Proposition 3.7.2. *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$ et $\lambda u_n = o(u_n)$.*
2. *Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$ et $\lambda u_n = O(u_n)$.*
3. *Si $u_n \sim \widehat{u}_n$ et $v_n \sim \widehat{v}_n$, alors $u_n.v_n \sim \widehat{u}_n.\widehat{v}_n$.*
4. *Si $u_n \sim v_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$, ${u_n}^\alpha \sim {v_n}^\alpha$.*
5. *Si $u_n \sim v_n$ et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lambda$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$.

Théorème 3.7.1. *Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors :*

1. $a^n = o(n!)$. 2. $n! = o(n^n)$. 3. $[\ln(n)]^\beta = o(n^\alpha)$. 4. $n^\alpha = o(a^n)$. 5. $n^\alpha = o(e^{\beta n})$.

Exemple 3.7.2. *Calculons la limite de la suite (u_n) definie par :*

1) $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})(n + \ln n)^2$.

On a $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ et $n + \ln n = n + o(n) \sim n$, donc $u_n \sim 1(n)^2 = n^2$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{3n+1}$.

Comme $3n+1 \sim 3n$, $n^2+n+1 \sim n^2$, *donc* $\sqrt{n^2+n+1} \sim n$.

D'où $u_n \sim \dfrac{n}{3n} = \dfrac{1}{2}$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

3) $u_n = \dfrac{2n^2+15}{4n^3+2n+3}$.

On a $2n^2+15 = 2n^2(1+\dfrac{15}{2n^2})$, *et* $4n^3+2n+3 = 4n^3(1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{4n^3})$.

Comme $\dfrac{15}{2n^2} \to 0$ *et* $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{4n^3} \to 0$, *on a* $2n^2+15 \sim 2n^2$ *et* $4n^3+2n+3 \sim 4n^3$.

On en déduit que $u_n \sim \dfrac{2n^2}{4n^3} = \dfrac{1}{n}$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Théorème 3.7.2. *Soient* $a > 1$, $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$. *On a :*

$$\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{a^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta(n)} \ll 1 \ll \ln^\beta(n) \ll n^\alpha \ll a^n \ll n!.$$

Exemple 3.7.3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

1). $1 \ll \sqrt{\ln n} \ll \ln(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll n!$ $(infiniment\ grands)$.

2). $\dfrac{1}{n!} \ll \dfrac{1}{2^n} \ll \dfrac{1}{n^2} \ll \dfrac{1}{n} \ll \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ll \dfrac{1}{\ln(n)} \ll \dfrac{1}{\sqrt{\ln n}} \ll 1$ $(infiniment\ petits)$.

3.8 Suites récurrentes

3.8.1 Suites récurrentes linéaires du premier ordre

3.8.1.1 Suites arithmétiques

Soit $r \in \mathbb{R}$. *On appelle suite arithmétique de raison* r *une suite* (u_n) *définie par :*

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Rappelons les résultats suivants :

1). $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n\ r$.

2). $\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)\ r$.

3). $\sum_{k=p}^{k=n} u_k = \dfrac{(n-p+1)}{2}(u_p+u_n)$, *pour* $p \le n \in \mathbb{N}$.

4). $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty, & si\ r > 0. \\ -\infty, & si\ r < 0. \\ u_0, & si\ r = 0. \end{cases}$

3.8.1.2 Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$. On appelle suite géométrique de raison q une suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q\ u_n.$$

Rappelons les résultats suivants :

1). $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\ q^n$.

2). $\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_n = u_p\ q^{n-p}$, *avec* $q \neq 0$.

3). $\forall p \leq n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=p}^{k=n} u_k = \begin{cases} u_p \dfrac{q^{n-p+1}-1}{q-1}, & si\ q \neq 1. \\ (n+1-p)\ u_p, & si\ q = 1. \end{cases}$

4). $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} \infty, & si\ q > 1. \\ u_0, & si\ q = 1. \\ 0, & si\ -1 < q < 1. \\ n'a\ pas\ de\ limite, & si\ q \leq -1. \end{cases}$

3.8.1.3 Suites arithmético-géométriques

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle suite arithmético-géométrique une suite (u_n) définie par une relation de récurrence affine du premier ordre de la forme :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\ u_n + b.$$

1). *Si $a = 0$, alors la suite (u_n) est stationnaire c'est à dire, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1,\ u_n = b$. La suite (u_n) converge vers b.*

2). *Si $a = 1$ et $b = 0$, alors la suite (u_n) est constante c'est à dire, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$. La suite (u_n) converge vers u_0.*

3). *Si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison b et de premier terme u_0.*

4). *Si $a \neq 1$ et $b = 0$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme u_0.*

5). *Si $a \neq 0, a \neq 1$ et $b \neq 0$, on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \alpha$, avec $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$. On a alors :*

$$v_{n+1} = au_n + b - \alpha = a(v_n + \alpha) + b - \alpha = av_n.$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - \alpha$. On a donc :

$$u_n = v_n + \alpha = a^n v_0 + \alpha = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha.$$

D'ou

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

Si $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-a}$.

3.8.2 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 3.8.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to I$ une fonction. On appelle suite récurrente (d'ordre 1) une suite réelle (u_n) définie par une relation de récurrence de la forme :* $\begin{cases} u_0 = x_0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

La suite (u_n) est bien définie, car on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) \in I$. Cette suite est appelé suite récurrente associé à f et u_0. La suite (u_n) s'écrit ainsi :

$$u_0, u_1 = f(u_0), u_2 = f(f(u_0)) = f \circ f(u_0), u_3 = f(f(f(u_0))) = f \circ f \circ f(u_0), \ldots$$

Exemple 3.8.1. *Soit la suite (u_n) définie par*

$$u_0 = 1 \text{ et } \quad u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n^3 + \frac{\sin^2(\pi u_n)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La suite (u_n) est une suite récurrente associé à f et $u_0 = 1$ où $\forall x \in I = [1, +\infty[$, on a $f(x) = \dfrac{3}{2}x^3 + \dfrac{\sin^2(\pi x)}{2}$ et $f(I) = [\frac{3}{2}, +\infty[\subset I$ (f est bien définie).

Proposition 3.8.1. *Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante, (u_n) une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :*

* *Si $f(u_0) - u_0 > 0$, alors (u_n) est une suite croissante.*
* *Si $f(u_0) - u_0 < 0$, alors (u_n) est une suite décroissante.*

Démonstration. Si $f(u_0) - u_0 > 0$, alors par récurrence, on obtient

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) > 0,$$

donc (u_n) est une suite croissante. On procède de la même façon dans le second cas. □

Exemple 3.8.2. *Soit la suite* (u_n) *définie par*

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}, \qquad u_0 = 3.$$

La suite (u_n) *est une suite récurrente associé à* f *et* $u_0 = 3$ *où* $\forall x \in D = [-1,\ +\infty[$, *on a* $f(x) = \sqrt{1+x}$. *La fonction* f *étant continue et strictement croissante sur* D $(f(D) \subset D)$, *comme* $f(u_0) - u_0 = -1 < 0$, *alors la suite* (u_n) *est décroissante.*

Théorème 3.8.1. *Soit* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue,* (u_n) *une suite récurrente définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$. *Si la suite* (u_n) *converge vers* $\ell \in D$, *cette limite vérifie* $\ell = f(\ell)$.

Exemple 3.8.1. *On considère la suite* (u_n) *définie par :*

$$u_0 \in [0,1] \qquad et \qquad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n+1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(1) *Raisonnons par récurrence sur* n *pour montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$.

Pour $n = 0 : u_0 \in [0,1]$ *donc* $0 \leq u_0 \leq 1$.

Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ *et montrons que* $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

$$0 \leq u_n \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} \leq 1,$$

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. *D'aprés le principe de récurrence, on a :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

(2) *Montrons que la suite* (u_n) *est monotone. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 + u_n + 1}{2(u_{n+1} + u_n)} = \frac{(1-u_n)(2u_n+1)}{2(u_{n+1}+u_n)} \geq 0,$$

donc la suite (u_n) *est croissante.*

(3) *Etudions la convergence de* (u_n).

La suite $(u_n)_n$ *est majorée par* 1 *et croissante donc elle converge et sa limite* ℓ *vérifie* $0 \leq \ell \leq 1$, *sa limite* ℓ *est une solution de l'équation* $\sqrt{\frac{\ell+1}{2}} = \ell$, *donc* $2l^2 - \ell - 1 = 0$, *d'où* $\ell = 1$.

3.8.3 Suites récurrentes linéaires du second ordre

Définition 3.8.2. *Une suite* (u_n) *est une suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants lorsqu'elle vérifie une relation de recurrence du type :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

où a *et* b *sont deux constantes réelles, avec* $b \neq 0$.

L'équation $r^2 = ar + b$ s'appelle équation caracteristique associée à la suite (u_n).

Théorème 3.8.2. *Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,\ où\ (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique associée : $r^2 = ar + b \quad (E)$.

1) *Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha(r_1)^n + \beta(r_2)^n$.*

2) *Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double r, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r^n + \beta n r^n = (\alpha + \beta n) r^n$.*

Exemple 3.8.2. *Déterrminer l'expression du terme générale de la suite (u_n) donnée par : $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (la suite de Fibonacci).*
Cette suite est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, son équation caractéristique associé est : $r^2 = r + 1 \quad (E)$.
Comme $\Delta = \sqrt{5} > 0$, donc (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2, tel que $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On a donc, d'aprés le théorème 3.8.2, qu'il existe α et β deux réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Les conditions initiales nous donnent la solution :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3.9 Exercices

Exercice 17. *Montrer que les suites $(u_n)_n$ definies par :*

$$1)\ u_n = \frac{3n-1}{n+2},\ \ 2)\ u_n = \frac{n\sin(n)}{2n+1+\cos(n)},\ \ 3)\ u_n = (-1)^n + \frac{3}{n},\ \ 4)\ u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}.$$

sont bornées.

Exercice 18. *Etudier la monotonie des suites $(u_n)_n$ definies par :*

$$1)\ u_n = n^2 - n,\ \ 2) u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^3}},\ \ 3)\ u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k},\ \ 4)\ u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2k-1}{2k}.$$

Exercice 19. *A l'aide de la définition de la limite d'une suite, démontrer les limites suivantes :*

$$1)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{2+(-1)^n}{n}=0,\quad 2)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2,\quad 3)\ \lim_{n\to+\infty}\ln(\ln n)=+\infty.$$

Exercice 20. *Etudier la nature de chacune des suites $(u_n)_n$ définies par :*

1. $u_n=n^2-3n+1$, *2.* $u_n=\sqrt{\frac{n^2+31}{n^3+2n}}$, *3.* $u_n=\sqrt{n^2+3n+2}-n$,

4. $u_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+1)}$, *5.* $u_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n}k$, *6.* $u_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{3^k}{3^{n+1}}$.

Exercice 21. *Trouver une suite simple équivalente à la suite $(u_n)_n$ dont on donne le terme général. En déduire si elle possède une limite.*

1. $u_n=\dfrac{n^2-3n+1}{n^3+n+1}$, *2.* $u_n=\sqrt{n^3+2n^2}-\sqrt{n^3+n}$, *3.* $u_n=\dfrac{3^n-2^n}{2^n+3^n}$,

4. $u_n=\dfrac{n!+n^n}{n^{n+1}+3^n}$, *5.* $u_n=\dfrac{\ln(n^2+n)}{\ln(n^2+3^n)}$, *6.* $u_n=\dfrac{1}{n}+2(-1)^n$.

Exercice 22. *En appliquant le critère de Cauchy, ètudier la nature des suites suivantes définies par :*

$$1).\ u_n=\cos(\frac{1}{n}),\ n\in\mathbb{N}^*,\ 2).\ u_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k},\ 3).\ u_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{(k+1)^2},\ 4.)\ u_n=\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{\ln(k)}.$$

Exercice 23. *Calculer* $\overline{\lim}\ u_n$ *et* $\underline{\lim}\ u_n$ *si :*

$$1.\ u_n=2-\frac{1}{n},\quad 2.\ u_n=\frac{1}{n}+\cos(\frac{n\pi}{3}),\quad 3.\ u_n=(-1)^n(3+\frac{2}{n}),\ 4.\ u_n=\frac{n(-1)^n+1}{2n}.$$

Exercice 24. ***1.*** *Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. Determiner les termes réels u_0,u_1,u_2,u_3 sachant que :* $u_0+u_1+u_2+u_3=5$ *et* $u_0.u_1.u_2.u_3=45$.
2. *Soit $(v_n)_n$ une suite géométrique de raison q. Determiner les termes v_0,v_1,v_2,v_3,v_4 strictement positifs, sachant que :* $v_0+v_4=\dfrac{51}{2}$ *et* $v_1+v_3=15$.

Exercice 25. *On considér la suite $(u_n)_n$ définie par :*

$$u_0=1\qquad et\qquad u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2,\quad n\in\mathbb{N},$$

et $(v_n)_n$ la suite définie par : $v_n=u_n+\alpha$, $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

(1) *Montrer que :* $\forall n\in\mathbb{N},\ -4\le u_n\le 1$.

(2) *Etudier le sens de variation de $(u_n)_n$. En déduire que $(u_n)_n$ converge.*

(3) *Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et trouver sa limite.*

(4) *Exprimer u_n en fonction de n. Calculer la limite de $(u_n)_n$.*

(5) *Calculer $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et en déduire $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.*

Exercice 26. *On définit les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par :*

$$x_0 = a,\ y_0 = b,\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n},\ n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < b < a.$$

(1) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < y_n < x_n$.*

(2) *Montrer que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont monotones.*

(3) *En déduire que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent vers la même limite.*

(4) *Calculer $u_n v_n$ en fonction de a et b.*

(5) *Déduire, les limites de $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$.*

Exercice 27. *On considér la suite (u_n) définie par :*

$$u_0 = u_1 = 1 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1},$$

et (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

(1) *Montrer que (u_n) vérifie la relation :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (u_n)^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n.$$

(2) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*

(3) *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.*

(4) *Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = 1 + \dfrac{1}{v_{n-1}}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq v_n \leq 2$.*

(5) *Montrer que la sous-suite (V_{2n}) est croissante et que la sous-suite (V_{2n+1}) est décroissante.*

(6) *Déduire de ce qui précède que les sous-suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont convergentes.*

(7) *Montrer que la suite (V_n) converge et calculer sa limite.*

Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle

4.1 Généralités sur les fonctions

4.1.1 Définition

Définition 4.1.1. *Soit E une partie de $\mathbb{R}$ (En général, E est un intervalle ou une réunion d'intervalles). On définit une fonction f de E dans $\mathbb{R}$ en associant à chaque réel x de E au plus un réel noté $f(x)$. On note :*

$$\begin{aligned} f: \ & E \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x). \end{aligned}$$

On dit que $f(x)$ est l'image de x par f et que x est un antécédent de $f(x)$.
Les éléments de E qui ont une image par f forment l'ensemble de définition de f, noté D_f.
L'ensemble de toutes les fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est noté $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.

Exemple 4.1.1. 1) *La fonction $f : x \mapsto f(x) = -2x^3 + 13$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $D_f = \mathbb{R}$.*
L'image $f(-1)$ de -1 par la fonction f vaut : $f(-1) = -2(-1)^3 + 13 = 15$

2) *La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 4 \geq 0$. Donc $D_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.*

Remarque 4.1.1. 1. *Une application f de E dans $\mathbb{R}$ est une fonction telle qu'à tout élément de E est associé un élément unique de $\mathbb{R}$. Une application f est*

donc est une fonction de $D_f = E$ dans $\mathbb{R}$.

Ou encore, une fonction f est une application de D_f dans $\mathbb{R}$.

2. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction.*

   - L'image de $A \subset D_f$ par f est l'ensemble : $f(A) = \{f(x);\ x \in A\}$.

   - L'image reciproque de $B \subset \mathbb{R}$ par f est l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f;\ f(x) \in B\}.$$

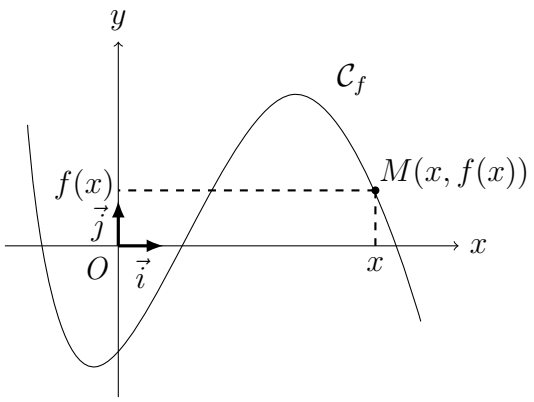
3. *Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. On appelle restriction de f à $A \subset D$, la fonction $f_{|A} : A \mapsto \mathbb{R}$:*

$$\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x).$$

   - Si g est une restriction de f à $A \subset D$, on dit que f est un prolongement de g à D.

4.1.2 Graphe d'une fonction réelle

Définition 4.1.2. *Le graphe ou courbe représentative d'une fonction $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble : $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in E\}$ formé des points M de coordonnées $(x, f(x))$ du plan muni d'un repère $\left(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Ainsi, dire que $M(x; y)$ appartient à cette courbe équivaut à dire que $x \in E$ et $y = f(x)$.*



4.1.3 Opérations sur les fonctions

Définition 4.1.3. (*Opérations algébriques*) *Soient f, $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *La fonction $f + g$ est la fonction définie sur D par :*

$$\forall x \in D,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- *La fonction λf est la fonction définie sur D par : $\forall x \in D,\ (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$.*

- *La fonction* $f \times g$ *est la fonction définie sur* D *par :*

$$\forall x \in D,\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

- *La fonction* $\dfrac{f}{g}$ *est la fonction définie sur* $D' = D \backslash \{x : g(x) = 0\}$ *par :*

$$\forall x \in D',\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Définition 4.1.4. (*Composition de fonctions*) *Soient* $f \in \mathcal{F}(D_f, \mathbb{R})$ *et* $g \in \mathcal{F}(D_g, \mathbb{R})$ *telles que* $f(D_f) \subseteq D_g$. *On définit la composée de* f *par* g, *notée* gof (*et que l'on lit* g *rond* f), *par :*

$$(gof)(x) = g(f(x)) \quad pour\ x \in D_f.$$

Exemple 4.1.1. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies par* $f(x) = x^2+1$, $g(x) = \sqrt{x}$. *On a* $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}_+$, $f(D_f) = [1, +\infty[\subset D_g = \mathbb{R}_+$ *et* $g(D_g) = \mathbb{R}_+ \subset D_f = \mathbb{R}$, *alors :*

$$\begin{cases} \forall x \in D_f, (gof)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2+1}, \\ \forall x \in D_g, (fog)(x) = (g(x))^2 + 1 = x + 1. \end{cases}$$

- *On a en général* $gof \neq fog$.

Définition 4.1.5. *Soit* $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, *on définit les fonctions* $|f|$, f^+ *et* f^- *par :*

1. $\forall x \in D,\ |f|(x) = |f(x)|$.
2. $\forall x \in D,\ f^+(x) = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x), & si\ f(x) \geq 0, \\ 0, & si\ f(x) < 0. \end{cases}$
3. $\forall x \in D,\ f^-(x) = \max(-f(x), 0) = \begin{cases} -f(x), & si\ f(x) \leq 0, \\ 0, & si\ f(x) > 0. \end{cases}$

On a alors $f = f^+ - f^-$ *et* $|f| = f^+ + f^-$ *sur* D.

Définition 4.1.6. *Soit* f, $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, *alors :*

- $f = g$ *sur* D *si* $\forall x \in D,\ f(x) = g(x)$.
- $f \leq g$ *sur* D *si* $\forall x \in D,\ f(x) \leq g(x)$.
- $f \leq g$ *sur* D *si* $\forall x \in D,\ f(x) < g(x)$.
- $f \geq 0$ *sur* D *si* $\forall x \in D,\ f(x) \geq 0$.
- f *est dite constante sur* D *si* $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ f(x) = \lambda$.
- f *est dite nulle sur* D *si* $\forall x \in D,\ f(x) = 0$.

4.1.4 Fonction paire, impaire, périodique

Définition 4.1.7. *(Parité) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a,a[$ ou $[-a,a]$ ou $a>0$). Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

i) f est impaire si $\forall x \in I, -x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Son graphe est symétrique par rapport à l'origine O (fig.1).

ii) f est paire si $\forall x \in I, -x \in I, f(-x) = f(x)$.

Son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) (fig.2).

Définition 4.1.8. *(Périodique) Soit $f: D \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel non nul. La fonction f est dite périodique de période T (ou T-périodique), si*

$$\forall x \in D,\ x+T \in D \text{ et } f(x+T) = f(x).$$

Son graphe est invariant par les translations de vecteurs $kT\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (fig.3).

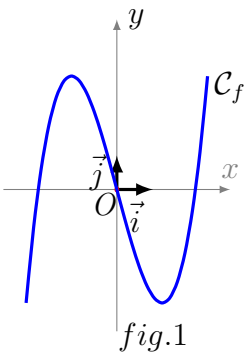


fig.1

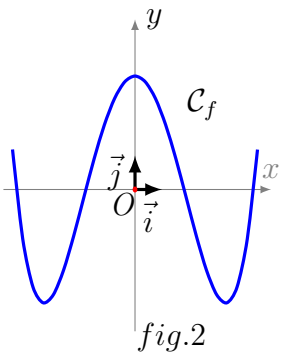


fig.2

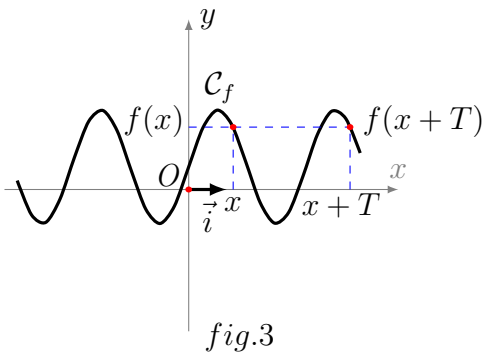


fig.3

Exemple 4.1.2. *i) La fonction définie sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est paire.*

ii) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ est impaire.

iii) La fonction sin *est impaire et 2π-périodique. La fonction* cos *est paire et 2π-périodique.*

4.1.5 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 4.1.9. *Soit $f: D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

a) f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \leq M$.

b) f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \geq m$.

c) f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée sur D, c'est-à-dire si $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : m \leq f(x) \leq M$.

Remarque 4.1.2. 1. *Si f est majorée, elle admet une borne supérieure (plus petit majorant), notée* $\sup_{x\in D} f(x)$.

2. *Si f est minorée, elle admet une borne inférieure (plus grand minorant), notée* $\inf_{x\in D} f(x)$.

3. *f est bornée sur D si et seulement si $|f|$ est majorée sur D.*

Exemple 4.1.2. 1. *Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont bornées.*

2. *La fonction $x \mapsto e^x$ est non bornée, mais elle est minorée par* 0.

4.1.6 Fonctions monotones

Définition 4.1.10. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

a) f est croissante sur D si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

b) f est strictement croissante sur D si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

c) f est décroissante sur D si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

d) f est strictement décroissante sur D si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

e) f est monotone (resp. strictement monotone) sur D si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D.

Exemple 4.1.3. *i) Les fonctions exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et logarithme* $\ln : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ *sont strictement croissantes.*

ii) La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ est strictement décroissante.

iii) La fonction valeur absolue $x \to |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Proposition 4.1.1. *Soient f, $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :*

- *Si f est monotone sur D, alors αf est monotone sur D.*
- *Si f et g ont même monotonie, alors $f + g$ est monotone de même monotonie.*
- *Si f et g sont positives croissantes, alors leur produit fg est positive croissante.*
- *Si f et g sont positives décroissantes, alors leur produit fg est positive décroissante.*
- *Si f et g ont même monotonie, alors gof (si elle existe), est croissante.*
- *Si f et g sont de monotonies contraires, alors gof (si elle existe), est décroissante.*

4.1.7 Maximum et minimum locaux

Définition 4.1.11. *Soient $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $x_0 \in D$. On dit que :*

1. *f admet un maximum global (resp. un minimum global) en x_0 si :*

$$\forall x \in D : \ f(x) \leq f(x_0) \quad (resp.\ f(x) \geq f(x_0)).$$

2. *f admet un maximum local (resp. un minimum local) en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 inclus dans D tel que :*

$$\forall x \in I : \ f(x) \leq f(x_0) \quad (resp.\ \ f(x) \geq f(x_0).)$$

5. *f admet un extremum (local ou global) en x_0 si f admet un maximum (local ou global) ou un minimum (local ou global) en x_0.*

Remarque 4.1.3. 1. *Tout extrémum global est un extrémum local.*

2. *f admet un maximum global en x_0 si et seulement si f est majorée sur D et $f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x)$.*
3. *f admet un minimum global en x_0 si et seulement si f est minorée sur D et $f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x)$.*
4. *f possède en x_0 un maximum global si et seulement si $-f$ possède en x_0 un minimum global.*

Exemple 4.1.3. 1. *La fonction carré $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ admet un minimum en 0 qui est $f(0) = 0$, (car on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0 = f(0)$).*

2. *La fonction $x \mapsto \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ admet un maximum local en 0 qui est $f(0) = 1$, (car on a : $\forall x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \subset \mathbb{R},\ \cos(x) \leq 1 = f(0)$).*

4.2 Limite d'une fonction

4.2.1 Définitions générales

Définition 4.2.1. (*Voisinages*)

1. *Soit $\mathcal{V}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un réel. On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de x_0 s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0, inclus dans $\mathcal{V}$.*

2. *Soient f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que :*

   a) f est définie au voisinage de x_0, si : $\exists \varepsilon > 0,\ ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\} \subset D$.

b) f est définie dans un voisinage à droite de x_0 (resp. à gauche de x_0) si :

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]x_0, x_0 + \varepsilon[\subset D\ (resp.\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x_0 - \varepsilon, x_0[\subset D).$$

c) f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\exists A > 0,\ ]A, +\infty[\subset D\ (resp.\ ]-\infty, A[\subset D).$$

Remarque 4.2.1. 1. *L'ensemble des voisinages de x_0 est noté $\mathcal{V}_{x_0}$.*

2. *Une fonction définie au voisinage de x_0 n'est pas nécéssairement définie en x_0.*

3. *Soit $\varepsilon > 0$, les intervalles $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ et $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ sont des voisinages de x_0.*

Exemple 4.2.1. 1) *Les fonctions suivantes sont définies au voisinage de $x_0 = 0$:*

$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \text{ et } D_f = \mathbb{R}^\star; \qquad h : x \mapsto \sqrt{1 - x^2} \text{ et } D_h = [-1, 1].$$

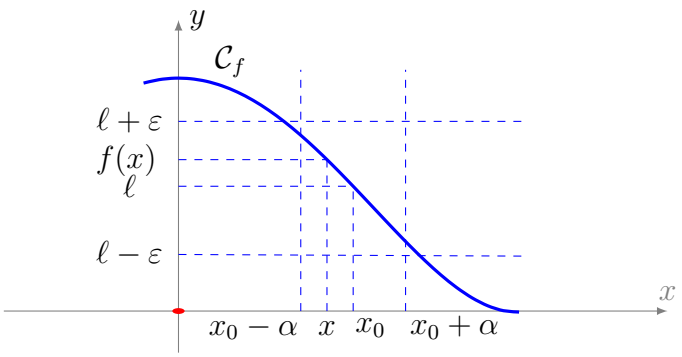
2) *la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est définie au voisinage de 1.*

3) *la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5)$ est définie au voisinage de $+\infty$.*

Définition 4.2.2. (*Limite finie d'une fonction en un point*)
Soit f une fonction définie au voisinage $\mathcal{V}$ de $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut être en x_0. On dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{V} :\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0.



Remarque 4.2.2. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0.$

2) $0 < |x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow (|x - x_0| < \alpha \text{ et } x - x_0 \neq 0) \Leftrightarrow (x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}).$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq \ell \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in \mathcal{V} :\ 0 < |x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon).$

4) *Pour étudier la limite d'une fonction f en x_0, il n'est pas nécessaire que f soit définie en x_0.*

Exemple 4.2.1. *f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 2$.*

Démontrons que : $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\alpha > 0$ tel que : $0 < |x-1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$.

On a $|f(x) - 3| = 5|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| \leq \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Il suffit donc de prendre $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{5}$. *Ainsi*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{5} > 0,\ 0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

Cela signifie que $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

Exemple 4.2.2. *Soit la fonction f définie par* $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{x^2 + 1}$.

Démontrons que $\lim_{x\to 2} f(x) = \dfrac{3}{5}$.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\alpha > 0$ tel que : $0 < |x-2| < \alpha \Rightarrow \left| f(x) - \dfrac{3}{5} \right| < \varepsilon$.

On a $\left| f(x) - \dfrac{3}{5} \right| = \dfrac{7|x+2||x-2|}{5(x^2+1)}$. *Considérons le voisinage $]1,3[$ du $x = 2$.*

Si $x \in]1,3[$, on a $-1 < x-2 < 1$, $3 < x+2 < 5$ et $2 < x^2+1 < 10$, donc

$|x-2| < 1$, $3 < |x+2| < 5$ *et* $2 < |x^2+1| < 10$.

Alors

$$\left| f(x) - \frac{3}{5} \right| = \frac{7|x+2||x-2|}{5(x^2+1)} < \frac{7 \times 5|x-2|}{5 \times 2} = \frac{7}{2}|x-2|.$$

Pour avoir $\left| f(x) - \dfrac{3}{5} \right| < \varepsilon$ *il suffit donc d'avoir les deux inégalités :*

$$|x-2| < 1 \text{ et } \frac{7}{2}|x-2| < \varepsilon.$$

Il suffit alors de prendre $\alpha = \min(1, \dfrac{2\varepsilon}{7}) > 0$ *pour que l'on ait*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha = \min(1, \frac{2\varepsilon}{7}),\ 0 < |x-2| < \frac{2\varepsilon}{7} \Rightarrow \left| f(x) - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon.$$

C'est à dire que $\lim_{x\to 2} f(x) = \dfrac{3}{5}$.

Proposition 4.2.1. (*Unicité de la limite*)

Si f admet une limite au point x_0, alors cette limite est unique.

Démonstration. On suppose que la fonction f, définie dans un voisinage V de x_0 sauf peut-être en x_0, admette deux limites ℓ_1 et ℓ_2 au point x_0. Soit $\varepsilon > 0$, alors par hypothèse on a

$$\begin{cases} \exists \alpha_1 > 0, \forall x \in V, |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ \exists \alpha_2 > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

On pose $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$, alors pour $0 < |x - x_0| < \alpha$, on a

$$|\ell_1 - \ell_2| = |(\ell_1 - f(x)) + (f(x) - \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, alors $|\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$ entraine que $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition 4.2.3. (*Limite à droite et limite à gauche*)

Soit f une fonction définie dans un voisinage à droite de x_0 (resp. à gauche de x_0), sauf peut être en x_0. On dit que f admet une limite à droite (resp. à gauche) ℓ en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \ell$ *(resp.* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = \ell$*),*

si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

(*resp.* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ 0 < x_0 - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$).

Exemple 4.2.3. *On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :*

$$f(x) = \sqrt{x - 1}.$$

f admet 0 comme limite à droite de 1. En effet, soit $\varepsilon > 0$, et on cherche $\alpha > 0$ tel que : $0 < x - 1 < \alpha \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$.

On a $|f(x) - 0| = \sqrt{x - 1} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < x - 1 \leq \varepsilon^2$.

Il suffit donc de prendre $\alpha = \varepsilon^2$. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha = \varepsilon^2 > 0,\ 0 < x - 1 < \varepsilon^2 \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Cela signifie que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

Remarque 4.2.3. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

2) *Si* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1 \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$ *alors f n'admet pas de limite en x_0.*

Exemple 4.2.4. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par :*

$$f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$*, mais f n'admet pas de limite en 0.*

Définition 4.2.4. (*Limite infinie d'une fonction en un point*)

Soit f une fonction définie au voisinage $\mathcal{V}$ de $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut être en x_0. On a :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{V},\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{V},\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$

Définition 4.2.5. (*Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini*)

Soit f une fonction définie dans un voisinage $\mathcal{V}$ de l'infini. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathcal{V},\ x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathcal{V},\ x < -A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathcal{V},\ x > B \Rightarrow f(x) > A.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathcal{V},\ x < -B \Rightarrow f(x) > A.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathcal{V},\ x > B \Rightarrow f(x) < -A.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in \mathcal{V},\ x < -B \Rightarrow f(x) < -A.$$

Exemple 4.2.5. *f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$.*

Démontrons que : $\lim_{x\to2} f(x) = +\infty$.

Soit $A > 0$. Il s'agit *de trouver $\alpha > 0$ tel que :*

$$0 < |x-2| < \alpha \Rightarrow f(x) > A.$$

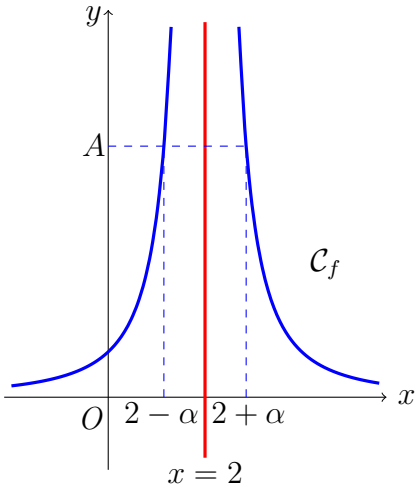
On a $f(x) > A \Leftrightarrow |x-2| \leq \sqrt{\dfrac{3}{A}}$.

Ainsi il suffit de prendre $\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{A}}$

pour que l'on ait

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha = \sqrt{\frac{3}{A}},\ 0 < |x-2| < \sqrt{\frac{3}{A}} \Rightarrow f(x) > A.$$

Cela signifie que $\lim_{x\to2} f(x) = +\infty$.



4.2.2 Théorèmes sur les limites

Proposition 4.2.2. *Si f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 (sauf peut être en x_0), alors il existe un voisinage V du point x_0 dans lequel f est bornée, c'est à dire :*

$$\exists V \in \mathcal{V}_{x_0},\ \exists M > 0,\ \forall x \in V,\ |f(x)| \leq M.$$

Démonstration. Par hypothèse f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, donc par définition on a : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
Prenons $\varepsilon = 1$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1$,
d'ou, $|f(x)| - |\ell| \leq |f(x) - \ell| < 1$, donc $|f(x)| \leq 1 + |\ell| = M$. Alors, il existe $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, sur lequel f est bornée. □

Proposition 4.2.3. (*Caractérisation sequentiell de la limite*)
Soient f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b]$, $x_0 \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, *si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que $u_n \neq x_0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.*

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[a,b]$ convergeant vers x_0. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in [a,b],\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - x_0| \leq \alpha$. On aura donc $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$. Donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.
Pour prouver la réciproque, nous allons prouver la contraposée :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \ell \Rightarrow (\exists (u_n) \subset I \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \ell).$$

Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \ell$, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in [a,b],\ 0 < |x - x_0| < \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon. \tag{4.1}$$

Prenons $\alpha = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. La relation (4.1) implique alors qu'il existe $u_n \in [a,b]$ tel que $|u_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x_0 et comme $|f(u_n) - \ell| > \varepsilon$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers ℓ. □

Remarque 4.2.4. *Pour démontrer qu'une fonction f n'a pas de limite lorsque x tend vers x_0, il suffit de fournir un exemple de deux suites (u_n) , (v_n) convergeant vers x_0 et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.*

Exemple 4.2.6. *f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par : $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.*
Démontrons que f n'admet pas de limite au point 0.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \frac{1}{2n} \quad et \quad v_n = \frac{1}{2n+1},\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^\star.$$

On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0, \\ f(u_n) = \cos\left(\dfrac{\pi}{u_n}\right) = \cos(2\pi n) = 1, \\ f(v_n) = \cos\left(\dfrac{\pi}{v_n}\right) = \cos(2n\pi + \pi) = -1, \end{cases}$$

alors, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = -1$.
Donc f n'admet pas de limite au point 0.

Proposition 4.2.4. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0), et vérifiant $f \leq g$ au voisinage de x_0. Alors*

1) *Si f et g possèdent respectivement ℓ_1 et ℓ_2 comme limites en x_0, alors*
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$.

2) *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

3) *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Théorème 4.2.1. (*Théorème des gendarmes*)

Soient f, g et h trois fonctions définies dans un voisinage V de x_0 (sauf peut être en x_0), et vérifiant : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, *pour tout* $x \in V$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Exemple 4.2.7. *f est la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On cherche $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. *On sait que :* $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$.

D'où, pour $x > 0$: $-x \leq x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x$.

Ou $\lim\limits_{x\to 0^+} -x = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$. *Donc, d'aprés le théorème des gendarmes :*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Proposition 4.2.5. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 (sauf peut être en x_0). Si f est bornée au voisinage de x_0 et si* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, *alors*

$$\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = 0.$$

4.2.3 Opérations sur les limites

Théorème 4.2.2. (*Opérations algébriques*)

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0), telle que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell'$, *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = \ell + \ell'$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda\ell$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} (fg)(x) = \ell\ \ell'$.

3) *Si* $\ell' \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g}(x) = \dfrac{1}{\ell'}$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

4) *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Théorème 4.2.3. *Soit* $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *une fonction croissante, alors :*

1) *Si f est majorée sur* $]a,b[$, *alors f admet une limite finie en b et* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup_{x\in]a,\ b[} f(x)$.

2) *Si f n'est pas majorée sur $]a,b[$ alors* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

Remarque 4.2.5. • *On désigne par l et l' deux réels et par f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0). Lorsque une fonction h est la somme, le produit ou le quotient de f et g, on peut, dans certains cas, exprimer la limite de h en x_0 à l'aide des limites en x_0 des fonctions f et g. Cés résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} (f\times g)(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} (\frac{f}{g})(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\ell\ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$, *si* $\ell' \neq 0$
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	∞
$\ell \neq 0$	∞	∞	∞	0
0	ℓ'	ℓ'	0	0, *si* $\ell' \neq 0$
0	0	0	0	*FI*
0	∞	∞	*FI*	0
∞	ℓ'	∞	∞, *si* $\ell' \neq 0$	∞
∞	0	∞	*FI*	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*FI*
$+\infty$	$-\infty$	*FI*	$-\infty$	*FI*
$-\infty$	$+\infty$	*FI*	$+\infty$	*FI*
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

Dans le tableau, "FI" signifie que l'on ne peut pas conclure directement, il s'agit d'une ***forme indéterminée****. Elle est du type :* $+\infty-\infty,\ 0\times\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0}$.

• *Rappel de quelques limites :*

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$, *si n est pair , et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$, *si n est impair.*

2) $\lim\limits_{x\to\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) = \lim\limits_{x\to\infty} a_n x^n$, *avec* $a_n \in \mathbb{R}^\star$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$, *avec* $a_n, b_m \in \mathbb{R}^\star$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$.

Théorème 4.2.4. (*Limite de fonctions composées*)

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0) et g définie au

voisinage de y_0 (sauf peut-être en y_0). Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x\to y_0} g(x) = \ell$, alors $g \circ f$ est définie au voisinage de x_0 et $\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \ell$.

Démonstration. Soit V_1 un voisinage de x_0 et soit V_2 un voisinage de y_0. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in V_1,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |(g\circ f)(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Par hypothèse, on a $\lim_{x\to y_0} g(x) = \ell$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in V_2,\ 0 < |x - y_0| < \alpha \Rightarrow |g(x) - \ell| \leq \varepsilon. \qquad (*)$$

Puis, comme $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in V_1,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - y_0| \leq \delta.$$

Comme, $f(x) \in V_2$, on a donc avec $(*)$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in V_1,\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \ell$. □

Exemple 4.2.2. *Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :*

(1) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x - 1)$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $(+\infty - \infty)$. On va multiplier par l'expression conjugué. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1} - x - 1 &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} + x(1+\frac{1}{x})} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x - 1) = -\frac{1}{2}$.

(2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}}{3x^2}$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $(+\infty - \infty)/+\infty$. On va multiplier par l'expression conjugué. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}}{3x^2} &= \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1}\right)}{3x^2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})} \\ &= \frac{x - x^2}{3x^2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1})} \\ &= \frac{1-x}{3x}\,\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}}{3x^2} = 0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)-2x^2}{\sin(2x)+x}$.

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$. *On sait que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\lambda x)}{\lambda x}=1$, *pour tout* $\lambda\in\mathbb{R}^*$, *alors*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-2x^2}{\sin(2x)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\dfrac{\sin(3x)}{3x}-2x}{2\dfrac{\sin(2x)}{2x}+1}=1.$$

4.3 Fonctions continues

4.3.1 Définitions générales

Définition 4.3.1. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0\in I$.

– *On dit que* f *est continue au point* $x_0\in I$ *si*

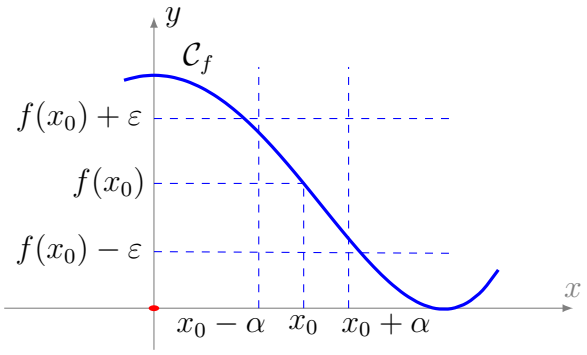
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in I,\quad |x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon,$$

c'est-à-dire si f *admet une limite en* $x_0\in I$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

– *On dit que* f *est continue sur* I *si* f *est continue en tout point* x_0 *de* I, *c'est-à-dire si :* $\forall x_0\in I,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in I,\ |x-x_0|<\alpha\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

– *L'ensemble des fonctions continues sur* I *est noté* $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe sans lever la main.



Exemple 4.3.1. f *est la fonction définie sur* $[1,+\infty[$ *par* $f(x)=\sqrt{x-1}$.

Montrons que f *est continue en* 2.

On a $f(2)=1$. *Soit* $\varepsilon>0$, *on cherche* $\alpha>0$ *tel que :*

$$|x-2|<\alpha\Rightarrow\left|\sqrt{x-1}-1\right|<\varepsilon.$$

Pour tout $x \in [1, +\infty[$ *on a* $\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \dfrac{|x-2|}{\sqrt{x-1}+1}$.

Si $x \geq 1$, *alors on a* $0 \leq \sqrt{x-1}$, $1 \leq \sqrt{x-1}+1$, *et* $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1} \leq 1$,

donc $\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \dfrac{|x-2|}{\sqrt{x-1}+1} \leq |x-2|$.

Il suffit donc de prendre $\alpha = \varepsilon$, *pour que l'on ait*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha = \varepsilon,\ \forall x \in [1, +\infty[,\ |x-2| < \varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt{x-1}-1\right| < \varepsilon.$$

Cela signifie que f *est continue en* 2 *et* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(2) = 1$.

Définition 4.3.2. (*Continuité à droite et à gauche*)

Soit f *une fonction définie sur un intervalle* I *et* $x_0 \in I$. *On dit que :*

– *La fonction* f *est continue à droite en* x_0, *si elle est définie à droite de* x_0 *et si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ \ 0 \leq x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

– *La fonction* f *est continue à gauche en* x_0, *si elle est définie à gauche de* x_0 *et si*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ \ 0 \leq x_0 - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Remarque 4.3.1. 1) *La fonction* f *est continue en* x_0 *si et seulement si* f *est continue à gauche et à droite du point* x_0. *C'est-à-dire*

$$(f \text{ est continue en } x_0) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right).$$

2) f *est continue sur l'intervalle fermé (ou segment)* $I = [a, b]$, $(a < b)$ *si elle est continue en tout point de* $]a, b[$, *et est continue à droite de* a *et à gauche de* b.

Exemple 4.3.1. – *La fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.

– *Les fonctions* $x \mapsto |x|$ *et* $x \mapsto x^n$, $(n \in \mathbb{N})$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.

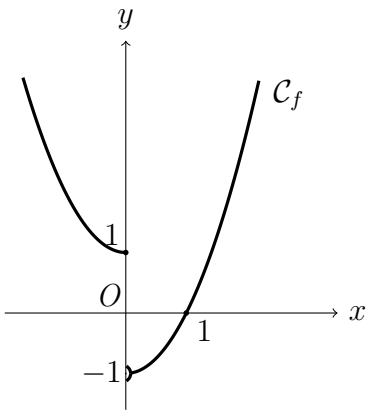
– *Les fonctions* $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$ *et* $x \mapsto e^x$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.

– *La fonction logarithme népérien* $x \mapsto \ln(x)$ *est continue sur* $]0, +\infty[$.

– *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^2 - \dfrac{x}{|x|}$, *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 1$.

Pour $x > 0$ *on a* $f(x) = x^2 - \dfrac{x}{x} = x^2 - 1$, *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 \neq f(0)$, *donc* f *n'est pas continue* à *droite de 0.*

Pour $x < 0$ *on a* $f(x) = x^2 - \dfrac{x}{-x} = x^2 + 1$, *et* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 = f(0)$, *donc* f *est continue* à *gauche de* 0. *Alors la fonction* f *n'est pas continue au point* 0.



4.3.2 Discontinuité de première espèce et de seconde espèce

Définition 4.3.3. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$.

- *On dit que* f *est discontinue en* $x_0 \in I$, *si* f *n'est pas continue en ce point, c'est-à-dire :* $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in I, \quad |x - x_0| < \alpha \quad et \quad |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$.
- *On dit que* x_0 *est un point de discontinuité de première espèce de* f, *si* f *est discontinue en* x_0, *et si les limites* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ *existent et sont distinctes. Le nombre* $s = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ *est appelé saut de la fonction* f *au point* x_0.
- *On dit que* x_0 *est un point de discontinuité de seconde espèce de* f, *si* f *est discontinue en* x_0, *et si l'une des limites* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ *n'existe pas (ou est infinie).*

Exemple 4.3.2. 1) *La fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si\ x > 0, \\ x & si\ x \leq 0, \end{cases}$$

admet 0 *comme point de discontinuité de première espèce.*

2) *La fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ x \neq 1, \\ 2 & si\ x = 1, \end{cases}$$

admet 1 *comme point de discontinuité de seconde espèce.*

Proposition 4.3.1. (*Caractérisation sequentielle de la continuité*)
Soient f *une fonction définie sur l'intervalle* I *et* $x_0 \in I$. *Alors*
la fonction f *est continue au point* x_0 *si et seulement si pour toute suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* I *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$, *on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x_0)$.

Exemple 4.3.2. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0, \end{cases}$$

n'est pas continue (est discontinue) en 0.

En effet, considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \quad et \quad v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}},\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^\star.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = 1$.
Alors, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0 \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = 1$, donc f n'admet pas de limite en 0.
Par suite, f n'est pas continue en 0. (On a donc 0 est un point de discontinuité de seconde espèce de f).

Théorème 4.3.1. (*Opérations sur les fonctions continues*)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $h : J \to \mathbb{R}$ des fonctions avec I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, telle que $f(I) \subset J$. Alors

1) *Si f et g deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$ (resp. sur I), alors les fonctions : $f+g$, αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), fg, $\dfrac{f}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) et $|f|$ sont continues en x_0 (resp. sur I).*

2) *Si h est continue en $y_0 = f(x_0) \in J$, alors la fonction composée $h \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 (resp. sur I).*

Exemple 4.3.3. – *Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.*

– *Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle où elle est définie.*

– *La fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \sin(x)}{x} & si\ x > 0, \\ 0 & si\ x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x < 0, \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. En effet,
$f : x \mapsto \dfrac{x - \sin(x)}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_-^\star$ et f est aussi continue en 0 car $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x - \sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$.

Définition 4.3.4. (*Prolongement par continuité*)

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, et f une fonction définie sur $I\backslash\{x_0\}$.

On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie ℓ en x_0. Alors la fonction $\widetilde{f}$ définie sur I par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in I et\ x \neq x_0, \\ \ell & si\ x = x_0, \end{cases}$$

est continue en x_0. $\widetilde{f}$ s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

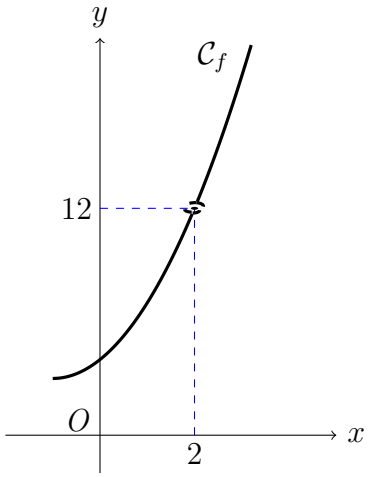
Exemple 4.3.4. *Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$.*

La fonction f est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ et pour $x \neq 2$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2+2x+4.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 12$, on peut prolonger f par continuité en 2. Donc le prolongement par continuité de f au point 2 est définie par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & si\ x \neq 2, \\ 12 & si\ x = 2. \end{cases}$$



4.3.3 Continuité uniforme

Définition 4.3.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 4.3.2. • *f n'est pas uniformément continue sur I si*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in I,\ |x-y| \leq \alpha \quad et \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

- *Dans La définition de la continuité α dépend de x et ε, mais dans la définition de la continuité uniforme α ne depend que ε.*
- *Toute fonction uniformément continue est continue. La réciproque est fausse.*

Exemple 4.3.5. 1) *La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1+\infty[$.*

En effet, soit $\varepsilon > 0$, pour tout $x, y \in [1, +\infty[$, on a $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$ et

$$|f(x) - f(y)| = \frac{\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \left|\sqrt{x} + \sqrt{y}\right|}{\left|\sqrt{x} + \sqrt{y}\right|} = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = 2\varepsilon$, pour que l'on ait

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha = 2\varepsilon,\ \forall x, y \in [1, +\infty[\,,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \varepsilon.$$

2) *La fonction $g : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrons que g n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, montrons que :*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \alpha \quad et \quad \left|x^2 - y^2\right| > \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = 1$ et $\alpha > 0$ quelconque. On considère $x = \frac{1}{2\alpha}$ et $y = x + \alpha$, alors on a $|x - y| = \alpha \leq \alpha$ et $|g(x) - g(y)| = |x^2 - y^2| = 1 + \alpha^2 > 1 = \varepsilon$.

Définition 4.3.6. (*Fonction lipschitzienne*)
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur l'intervalle I si

$$\exists k > 0,\ \forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

On dit aussi que f est lipschitzienne de rapport k ou k-lipschitzienne. Si $0 < k < 1$, on dit que f est contractante.

Exemple 4.3.6. *La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$ sur $[1, +\infty[$, car on a $\forall x, y \in [1, +\infty[$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \frac{1}{2}\,|x - y|\,.$*

Proposition 4.3.2. *Si f est une fonction lipschitzienne sur l'intervalle I, alors elle est uniformément continue sur I.*

Exemple 4.3.7. *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformement continue sur $[1, +\infty[$, car elle est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$ sur $[1, +\infty[$.*

4.3.4 Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé

Théorème 4.3.2. *Une fonction continue sur un intervalle fermé (ou segment) $[a, b]$ est uniformément continue sur cet intervalle.*

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Raisonnons par l'absurde, supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in [a, b]\,,\ |x - y| \leq \alpha \ \text{ et } \ |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Prenons un tel $\varepsilon > 0$, pour $\alpha = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, on peut donc chosir deux réels $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que : $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

Puisque les suites (x_n) et (y_n) sont bornées, d'aprés le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de ces suites deux sous-suites convergentes $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$.
Soit $\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$, on a $\beta \in [a,b]$ car $[a,b]$ est un intervalle fermé.
Comme $y_{\varphi(n)} - \beta = (y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}) + (x_{\varphi(n)} - \beta)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}) = 0$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = \beta$. La fonction f étant continue en β, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \big(f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})\big) = f(\beta) - f(\beta) = 0,$$

ce qui est en contradiction avec $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Exemple 4.3.8. *La fonction* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *est uniformément continue sur* $[a,1]$ *avec* $0 < a < 1$, *puisqu'elle est continue sur* $[a,1]$.

Théorème 4.3.3. *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $I = [a,b]$ $(a < b)$. *Si* $f(a)f(b) < 0$, *alors il existe au moins* $c \in]a,b[$ *tel que* $f(c) = 0$.

Démonstration. L'hypothèse $f(a)f(b) < 0$ signifiant que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, supposons que $f(b) < 0 < f(a)$. L'ensemble $F = \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car $a \in F$) et majorée par b, elle admet donc une borne supérieure $c = \sup F < b$. Montrons que $f(c) = 0$.
Raisonnons par l'absurde. Supposons que $f(c) \neq 0$, d'aprés la continuité de f il existe alors un intervalle $J =]c-\alpha, c+\alpha[$, où f conserve le signe de $f(c)$.

- Si $f(x) > 0$ dans J. On a $(c + \frac{\alpha}{2}) \in J$ et $f(c + \frac{\alpha}{2}) > 0$, alors $(c + \frac{\alpha}{2}) \in F$. D'où $c + \frac{\alpha}{2} \leq c = \sup F$, ce qui est impossible.
- Si $f(x) < 0$ dans J, on a alors $c = \sup F \leq c - \alpha$, ce qui est impossible. Ainsi $f(c) = 0$. Le cas $f(a) < 0 < f(b)$ se traite de la même manière.

□

Remarque 4.3.3. 1) *Si* $f(a)f(b) = 0$, *alors* $c = a$ *ou* $c = b$.

2) *Une fonction continue sur un intervalle et qui ne s'annule pas, garde un signe constant.*

3) *Le théorème peut être utilisé pour encadrer les solutions de l'equation* $f(x) = 0$.

4) *Graphiquement, les solutions de l'equation* $f(x) = 0$ *sont les abscisses des points d'intersection du graphe* $\mathcal{C}_f$ *de* f *avec l'axe* (Ox).

5) *Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.*

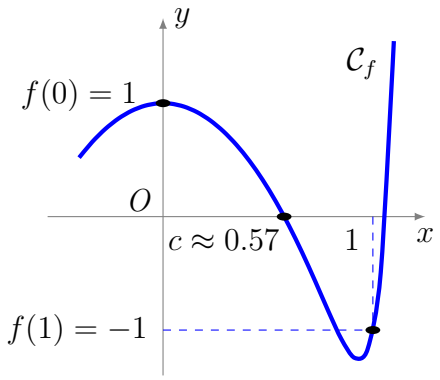
Exemple 4.3.9. *Montrons que l'equation* $x^{15}-3x^2+1=0$ *a au moins une solution.*

On a la fonction $f : x \mapsto x^{15} - 3x^2 + 1$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ *et* $f(1) = -1$, *donc*

$$f(0)f(1) < 0.$$

D'aprés le théorème (théorème 4.3.3*) ci-dessus, il existe au moins un réel* $c \in]0, 1[$ *tel que*

$$f(c) = 0.$$

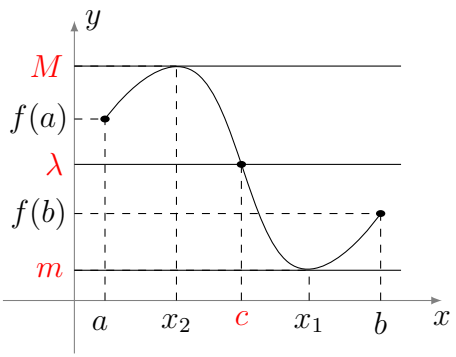


Théorème 4.3.4. (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit f *une fonction continue sur un intervalle* $I = [a, b]$ $(a < b)$. *Pour tout réel* λ *strictement compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe au moins* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = \lambda$.

Démonstration. Supposons $f(a) < f(b)$, soit donc $\lambda \in]f(a), f(b)[$.

Considérons la fonction $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - \lambda$. Elle est continue sur $[a, b]$ *et* $g(a) = f(a) - \lambda < 0 < g(b) = f(b) - \lambda$. D'aprés le théorème (théorème 4.3.3) ci-dessus, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$, autrement dit tel que $f(c) = \lambda$. Le cas $f(a) > f(b)$ se traite de la même manière. Le théorème est démontré.



□

Corollaire 4.3.1. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle* I. *Alors* $f(I)$ *est un intervalle.*

Démonstration. Posons $J = f(I)$ l'image de I par f. Pour montrer que J est un intervalle, il faut montrer que $\forall y_1, y_2 \in J,\ \forall y \in \mathbb{R},\ (y_1 \leq y \leq y_2 \implies y \in J)$. Soient $y_1 < y_2 \in J = f(I)$, Il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Soit $y \in]y_1, y_2[$, donc $f(x_1) < y < f(x_2)$. D'aprés le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe donc $x \in]x_1, x_2[\subset I$ tel que $y = f(x)$, et ainsi $y \in f(I)$. Il en résulte que $[y_1, y_2] \subset f(I)$, donc $f(I)$ est un intervalle. □

Théorème 4.3.5. (*Fonctions continues sur un segment*)

Soit f *une fonction continue sur un intervalle fermé (ou un segment)* $I = [a, b]$ $(a < b)$. *Alors* f *est bornée sur* $[a, b]$ *et elle atteint ses bornes, c'est-à-dire :*

$$\exists x_1, x_2 \in I = [a, b] : \quad f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Démonstration. Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$.

- Montrons que f est bornée sur I. En raisonnant par l'absurde, supposons le contraire, c'est à dire f non bornée sur $[a, b]$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $|f(x_n)| > n$. La suite (x_n), étant bornée, admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$, évidemment $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \overline{x} \in [a, b]$. On a alors
$$\lim_{n\to+\infty} | f\left(x_{\varphi(n)}\right) | = +\infty. \quad (\star)$$
Or, la fonction $|f|$ étant continue, on a nécessairement
$$\lim_{n\to+\infty} | f\left(x_{\varphi(n)}\right) | = \lim_{x\to\overline{x}} | f(x) | = |f(\overline{x})| < +\infty.$$
contrairement à $(\star)$. Donc f est bornée sur $[a, b]$.
- Montrons que f atteint ses bornes dans $[a, b]$. Soit $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Supposons que $\forall x \in [a, b] : f(x) < M$. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{M - f(x)}$ est alors continue et donc bornée sur $[a, b]$ (D'apres la premiere partie de la demonstration). Soit $G = \sup_{x\in[a,b]} g(x)$; on a évidemment $G > 0$ et $\forall x \in [a, b] : g(x) < G$, d'où $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq M - \frac{1}{G}$. ce qui contraire à l'hypothèse $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Démontrons analogue pour la borne inférieure.

Le théorème est démontré. □

Corollaire 4.3.2. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$ où $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ et $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$.*

Remarque 4.3.4. *Si f est une fonction continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (resp. $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$).*

4.4 Fonction réciproque continue

Rappels. *Soit $f : I \to J$ une fonction, oú I et J sont des intervalles dans $\mathbb{R}$.*

1) *On dit que*
   - *f est injective si $\forall x_1, x_2 \in I \;\; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;*
   - *f est surjective si $\forall y \in J \;\; \exists x \in I \;\; y = f(x)$;*
   - *f est bijective si f est à la fois injective et surjective.*
2) *Si f est une bijection alors f admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ telle que $f^{-1} \circ f = Id_I$ et $f \circ f^{-1} = Id_J$. Dans un repère orthonormé du plan, les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d' éqution $y = x$).*

Théorème 4.4.1. *Soit f une fonction monotone sur un intervalle I, alors f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration. Soit f une fonction monotone sur un I.
Si f est continue sur I, alors $J = f(I)$ est un intervalle (d'aprés corollaire 4.3.1 du théorème des valeurs intermédiaires).
Maintenant supposons f croissante (le cas f décroissante se traite de la même manière) telle que $f(I)$ est un intervalle. Montrons que f est continue.
Supposons le cotraire, et soit $x_0 \in I$ un point de discontinuité de f. Comme f est croissante, alors

$$f(x_0) < \lim_{x \to x_0^+} f(x), \text{ ou } \lim_{x \to x_0^-} f(x) < f(x_0).$$

Si, $f(x_0) < \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. Dans ce cas on a

$$]f(x_0), \lim_{x \to x_0^+} f(x)[\cap f(I) = \emptyset. \qquad (\star)$$

f étant croissante sur $x \in I$, alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ si } x \leq x_0 \text{ et } f(x) \geq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ si } x > x_0.$$

Fixons un point $x_1 \in I, x_1 > x_0$. On a $f(x_0) \in f(I)$ et $f(x_1) \in f(I)$.
Comme $f(I)$ étant un intervalle, alors $[f(x_0), f(x_1)] \subset f(I)$, ce qui contredit $(\star)$ car

$$]f(x_0), \lim_{x \to x_0^+} f(x)[\subset]f(x_0), f(x_1)[.$$

De façons analogue, on traitera le cas $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) < f(x_0)$ ainsi que le cas où f est décroissante. Le théorème est démontré. □

Théorème 4.4.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors f est injective sur I si et seulement si elle est strictement monotone.*

Démonstration. Soit f une fonction continue sur I.
Il est clair que toute fonction strictement monotone est injective. Soit maintenant f continue et injective, montrons qu'elle est strictement monotone. Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas strictement monotone. Alors il existe trois points $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ tels que :

$$f(x_2) < f(x_1) \quad \text{et} \quad f(x_2) < f(x_3), \qquad (\star)$$

$$\text{ou bien} \qquad f(x_2) > f(x_1) \quad \text{et} \quad f(x_2) > f(x_3). \qquad (\star\star)$$

Supposons $(\star)$ vérifiée, par exemple. Si $f(x_1) < f(x_3)$, alors $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$. Par conséquent, en vertu du théorème des valeurs intérmédiaires, la valeur $f(x_1)$ sera atteinte encore dans l'intervalle $]x_2, x_3[$ (qui ne contient pas x_1), contrairement à l'injectivité de f. Raisonnement analogue si $f(x_1) > f(x_3)$. On étudiera de la même manière le cas $(\star\star)$. Le théorème est démontré. □

Théorème 4.4.3. (*Fonction réciproque continue*)
Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors

1. *f induit une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J et strictement monotone de même sens que f sur J.*

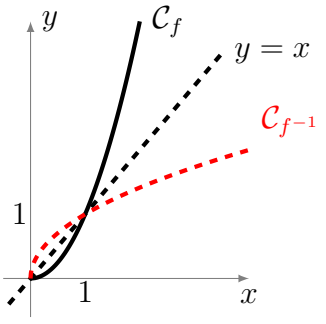
Démonstration.

1. I étant un intervalle et f continue, l'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle. Par définition, f est une surjection de I dans J. Puisque f est strictement monotone, f est injective et donc bijective de I dans J.
2. Montrons que la bijection f^{-1} à le même sens de variation que f, en effet, supposons que f est strictement croissante et soient $y_1, y_2 \in J$ tels que $y_1 < y_2$. Posons $x_1 = f^{-1}(y_1) \in I$ et $x_2 = f^{-1}(y_2) \in I$. Alors $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Si on avait $x_1 > x_2$ alors on aurait $y_1 > y_2$ ce qui est contradictoire (car f est strictement croissante), donc $x_1 < x_2$ c'est-à-dire f^{-1} est strictement croissante sur J. (Le cas f strictement décroissante se traite de la même manière).
   Il nous reste à montrer que la bijection réciproque f^{-1} est continue sur J. En effet, puisque f^{-1} est strictement monotone et $f^{-1}(f(I)) = I$ est un intervalle, donc est continue sur J d'aprés Ie théorème 4.4.1.

□

Exemple 4.4.1. *Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^2$.*

On a f est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. D'aprés le théorème précédent, donc f est une bijection. Sa bijection réciproque, $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ est donc continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.



4.5 Comparaison locale des fonctions

4.5.1 Comparaison au voisinage d'un point

Définition 4.5.1. *Soit f, g deux fonctions définies dans un voisinage du point x_0, sauf peut être, en x_0.*

- *On dit que f est négligeable devant g (ou, g est prépondérante devant f) en x_0, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|].$$

On note alors $f \underset{x_0}{\ll} g$ (notation de Hardy) ou $f = \circ(g)$ (notation de Landau).

- *On dit que f est dominée par g en x_0, si*

$$\exists k > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq k|g(x)|].$$

On note alors $f \underset{x_0}{\preceq} g$ (notation de Hardy) ou $f = O(g)$ (notation de Landau).

- *On dit que f est équivalente à la fonction g en x_0, si*

$$f - g = \circ(f).$$

On note alors $f \sim g$ au voisinage de x_0.

Remarque 4.5.1. *– Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, alors :*

$$1.\ f = \circ(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad 2.\ f = O(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \sup \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty.$$

– Si f et g ne s'annulent pas dans un voisinage de x_0, alors :

$$f \sim g \text{ en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

– Si $g = 1$, alors :

- $f = \circ(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$
- $f = O(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \sup |f(x)| < \infty$ (f *est bornée dans un voisinage de* x_0).

Exemple 4.5.1. *Pour $x \to 0$, on a : $x^2 = \circ(x)$, $\frac{1}{x} = \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \circ(x)$, $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = O(x)$, $x \sin(x) = O(x^2)$, $\sin(x) \sim x$, $\ln(x+1) \sim x$.*
Pour $x \to +\infty$, on a

$$\sin(x) = O(1), \quad x^2 = O\left(x^3\right), \quad x \sin(x) = O(x), \quad \frac{1}{x^2} = \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

Proposition 4.5.1. *Soient Soient f, g, φ, ϕ des fonctions définies dans un voisinage du point x_0, sauf peut être, en x_0, λ un réel fixé.*

1. $f = \circ(g) \Rightarrow f = O(g)$.
2. $(f = \circ(\varphi) \ et \ g = \circ(\varphi)) \Rightarrow \lambda f + g = \circ(\varphi)$.
3. $(f = O(\varphi) \ et \ g = O(\varphi)) \Rightarrow \lambda f + g = O(\varphi)$.
4. $(f = \circ(\varphi) \ et \ g = O(\varphi)) \Rightarrow f + g = O(\varphi)$.
5. $(f = \circ(g) \ et \ g = O(\varphi)) \Rightarrow f = \circ(\varphi)$.
6. $f = \circ(g) \Rightarrow f + g \sim g$.
7. $f \sim g \Leftrightarrow (f - g = \circ(g)) \Leftrightarrow (g - f = \circ(f))$.
8. $f \sim g \Rightarrow (f = O(g) \ et \ g = O(f))$.
9. $f \sim g \Rightarrow (\dfrac{1}{f} \sim \dfrac{1}{g} \ et \ f^n \sim g^n, \ n \in \mathbb{N}^*)$.
10. $(f \sim \varphi \ et \ g \sim \phi) \Rightarrow (fg \sim \varphi\phi \ et \ \frac{f}{g} \sim \frac{\varphi}{\phi})$.
11. $(f \sim g \ et \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
12. $(e^f \sim e^g \ en \ x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = 0$.
13. *Soit* $f > 0$ *et* $g > 0$ *au voisinage de* x_0 (*sauf peut être, en* x_0). *Si* $f \sim g$ *en* x_0, *et* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, *alors* $\ln \circ f \sim \ln \circ g$ *en* x_0.

Démonstration. 1) Si $f = \circ(g)$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = 0$, d'où $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de x_0.

5) Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = 0$ et $\dfrac{g}{\varphi}$ est bornée au voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{\varphi}(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x) . \dfrac{g}{\varphi}(x) = 0$.

8) Si $f \sim g$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g}{f}(x) = 1$, donc $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{g}{f}$ sont bornées au voisinage de x_0.

10) Si $f \sim \varphi \ et \ g \sim \phi$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{\varphi}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g}{\phi}(x) = 1$, donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{fg}{\varphi\phi}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f}{\varphi}(x) . \frac{g}{\phi}(x) = 1, \ et \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f}{g}(x)}{\frac{\varphi}{\phi}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f}{\varphi}(x)}{\frac{g}{\phi}(x)} = 1.$$

Alors, $fg \sim \varphi\phi \ et \ \frac{f}{g} \sim \frac{\varphi}{\phi}$.

12) Il suffit de remarquer $\dfrac{e^f}{e^g} = e^{f-g}$.

13) Pour $\ell \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on a : $\lim\limits_{x \to x_0} \ln(f(x)) = \ln(\ell) \neq 0$, et $\lim\limits_{x \to x_0} \ln(g(x)) = \ln(\ell) \neq 0$, donc $\ln(f(x)) \sim \ln(\ell)$ et $\ln(g(x)) \sim \ln(\ell)$ en x_0. Alors,

$$\ln(f(x)) \sim \ln(g(x)) \ en \ x_0.$$

□

4.5.2 Exemples (Croissances comparées)

- *Au voisinage de* 0, *on a :*

  1.) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > \beta,\ x^\alpha = \circ(x^\beta)$. 2.) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta < 0,\ |\ln(x)|^\alpha = \circ(x^\beta)$.

- *Au voisinage de* $+\infty$, *on a :*

  1.) $\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\ x^\alpha = \circ(e^{\beta x})$. 2.) $\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\ (\ln(x))^\alpha = \circ(x^\beta)$.

  3.) $\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x^\alpha = \circ(a^x)$.

- *Au voisinage de* $-\infty$, *on a :*

  1.) $\forall a > 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ a^x = \circ(|x|^\alpha)$. 2.) $\forall \alpha > 0,\ \forall \beta < 0,\ e^{\alpha x} = \circ(|x|^\beta)$.

4.5.3 Équivalents usuels

Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors $f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)(x - x_0)$ en x_0. On en déduit :

1) $\ln(x+1) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, *si* $\alpha \neq 0, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, *en* 0.

2) $\sin(x) \sim x$, $\tan(x) \sim x$, $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$, $\mathrm{Arcsin}(x) \sim x$, $\mathrm{Arctan}(x) \sim x$, *en* 0.

3) $\mathrm{sh}(x) \sim x$, $\mathrm{th}(x) \sim x$, $\mathrm{ch}(x) - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$, *en* 0.

D'aprés Proposition 4.5.1 (7.)*, les équivalences précédentes peuvent s'exprimer sous la forme :*

1) $\ln(x+1) = x + \circ(x)$, $e^x = 1 + x + \circ(x)$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \circ(x)$, *en* 0.

2) $\sin(x) = x + \circ(x)$, $\tan(x) = x + \circ(x)$, $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$, $\mathrm{Arcsin}(x) = x + \circ(x)$, $\mathrm{Arctan}(x) = x + \circ(x)$, *en* 0.

3) $\mathrm{sh}(x) = x + \circ(x)$, $\mathrm{th}(x) = x + \circ(x)$, $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$, *en* 0.

- Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leq n$, et P la fonction polynôme définie pour tout réel x par : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_{m+1}x^{m+1} + a_m x^m$. Alors

$$P(x) \sim a_n x^n \text{ au voisinage de } +\infty, \quad \text{et} \quad P(x) \sim a_m x^m \text{ au voisinage de } 0.$$

Pour $P(x) = 2x^5 - 5x^3 + 5x^2 - 3x$, on a $P(x) \sim -3x$ au voisinage de 0, *et $P(x) \sim 2x^5$ au voisinage de $\pm\infty$.*

Exemple 4.5.1. *A l'aide des équivalences, calculer les limites suivantes*

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Au voisinage de 0, *on a :* $\ln(1+x^2)\sim x^2$ *et* $\tan\left(\frac{x}{2}\right)\sim\frac{x}{2}$, *alors* $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\sim 2x$, *et donc*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\text{Arctan}(x)}{3(\ln(1+x))^2}$.

Au voisinage de 0, *on a :* $\arctan(x)\sim x$ *et* $\ln(1+x)\sim x$, *alors* $\dfrac{x\text{Arctan}(x)}{3(\ln(1+x))^2}\sim\dfrac{1}{3}$, *et donc*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\text{Arctan}(x)}{3(\ln(1+x))^2}=\frac{1}{3}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Au voisinage de 0, *on a* $e^x\sim 1+x$, *alors au voisinage de* $+\infty$, *on a* $e^{\frac{1}{x}}\sim 1+\dfrac{1}{x}$, *d'où* $x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\sim 1$, *et donc*

$$\lim_{x\to+\infty}2x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=2.$$

4.6 Exercices

Exercice 28. *Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\frac{2x+3}{|x|-11},\ g(x)=\frac{\ln(x)}{\sqrt{\sin(x)}},\quad h(x)=\begin{cases}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x^2}}}{2+\sin(x)}, & si\ x>0,\\ \dfrac{x}{x-1}, & si\ x\le 0.\end{cases}$$

$$i(x)=\ln(\frac{x+3}{x-2}),\ j(x)=\frac{3x-4}{\sqrt{x^2-2x+1}-2}.$$

Exercice 29. 1). *Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\frac{2}{x-1},\quad g(x)=\frac{x^2+1}{x},\quad h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad i(x)=\sqrt{2x-1}.$$

2). *Etudier la parité des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\frac{x^2+1}{|x|},\ g(x)=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2},\ h(x)=\sqrt{x^2-4},\ j(x)=\sin(x)-\cos(x).$$

Exercice 30. *En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que :*

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)=3$, 2. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3}{x^2-1}=+\infty$, 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-5}{x^2+3}=4$.

Exercice 31. *Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x(x^2-1)(x+11)$, 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{x^2+2x-1}$, 3. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x-2}{x^2-4}$, 4. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-x$, 6. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$, 7. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x-2}-\sqrt{x^2-3x+3})$.

8. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-4)\sqrt{x+1}}{x-2}$, 9. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, 10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{(x-1)^2}$, 11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}$.

Exercice 32. *En utilisant les fonctions équivalentes, calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)}$, 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos(x)-1}-1}{x^2}$, 4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin^2(x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$.

Exercice 33. *Etudier la continuité de f sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.*

1. $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1, & x>1, \\ |x|-1, & x\le 1. \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x}, & x>0, \\ 2-x^2 \ell n\left(\dfrac{x+1}{x}\right), & x<0, \\ 2, & x=0. \end{cases}$ 4. $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x>0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

Exercice 34. *Peut-on prolonger f par continuité en x_0?.*

1. $f(x) = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $x_0 = 0$, 2. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$, $x_0 = 1$,

3. $f(x) = \dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{\frac{\pi}{4}-x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$, 4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$, $x_0 = 0$.

Exercice 35. *Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes dans les intervalles donnés :*

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \ge 0$. 2. $f(x) = x^2$, $-2 \le x \le 2$. 3. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

4. $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$, $-1 \le x \le 1$. 5. $f(x) = \ln(x), 0 < x \le 1$.

Exercice 36. *Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 3ae^{x+1} - x, & si\ x<0, \\ 2, & si\ x=0, \\ \dfrac{\sin(bx)}{x}, & si\ x>0. \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 5

Fonctions dérivables

5.1 Fonction dérivable

5.1.1 Dérivée d'une fonction en un point

Définition 5.1.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et x_0 un point de I. On dit que f est dérivable au point x_0 si la limite $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée dérivée de f en x_0, et notée $f'(x_0)$. Ainsi*

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Si l'on pose $x-x_0=h$, on a alors :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Remarque 5.1.1. 1) *Posons $\varepsilon(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$. On obtient alors :*

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x),\ \text{avec}\ \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0,$$

ou encore

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h),\ \text{avec}\ \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0.$$

2) *Si f est dérivable en x_0, $f(x_0)+hf'(x_0)$ est une valeur approchée de $f(a+h)$ à $h\varepsilon(h)$ prés, on écrit alors parfois : $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$.*

3) *Le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (resp., $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$) s'appelle le taux d'accroissement de f entre x_0 et x (resp., entre x_0 et x_0+h).*

Définition 5.1.2. *f est dérivable sur I, si f est dérivable en tout point x de I. On appelle fonction dérivée de f sur I, la fonction $x \mapsto f'(x)$, et se note f' ou $\dfrac{df}{dx}$ ou encore y', si $y = f(x)$.*

Exemple 5.1.1. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 3x_0^2$. En effet,*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2 \in \mathbb{R},$$

donc $f'(x_0) = 3x_0^2$.

5.1.2 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 5.1.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $x_0 \in I$.*

- *On dit que f est dérivable à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est appelée dérivée à droite de f en x_0, et notée $f'_d(x_0)$.*
- *On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Cette limite est appelée dérivée à gauche de f en x_0, et notée $f'_g(x_0)$.*

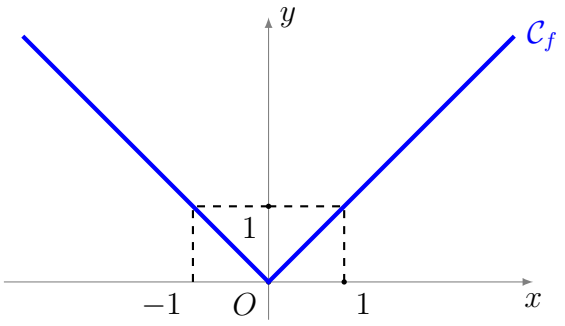
Proposition 5.1.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $x_0 \in I$. Pour que f soit dérivable en x_0, si et seulement si que f soit dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$. On a alors $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Exemple 5.1.2. *La fonction $f : x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ a au point 0 une dérivée à droite $f'_d(0) = 1$ et une dérivée à gauche $f'_g(0) = -1$. En effet,*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 = f'_d(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1 = f'_g(0)$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.



On dit que le point $O(0, f(0))$ de $\mathcal{C}_f$ est un point anguleux de $\mathcal{C}_f$ lorsque $\mathcal{C}_f$ admet en O deux demi-tangentes non-parallèles d'équations : $y = -x$ et $y = x$.

Proposition 5.1.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Démonstration. Si f est dérivable au point x_0, alors il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, on déduit alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, et donc f est continue en x_0. □

Remarque 5.1.2. 1) *Si f a une dérivée à droite $f'_d(x_0)$ (resp., à gauche $f'_g(x_0)$), f est continue à droite (resp., à gauche) au point x_0.*

2) *La réciproque de cette proposition est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue à droite au point 0 mais n'est pas dérivable à droite en ce point.*

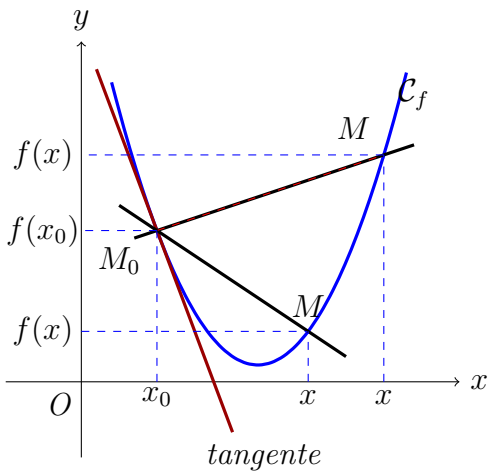
5.1.3 Interprétation géométrique de la dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et x_0 un point de I. Soient $\mathcal{C}_f$ sa présentation graphique et (Δ) la droite passant par $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$. Le coefficient directeur de (Δ) est $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, ce coefficient directeur n'est autre que le taux d'accroissement de f entre x_0 et x. Cela étant dire que f admet une dérivée $f'(x_0)$ au point x_0, c'est dire que (Δ) tend vers une position limite quand M tend vers M_0, autrement dit que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente dont le coefficient directeur est précisément $f'(x_0)$. Cette tangente a pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en x_0, mais $\mathcal{C}_f$ admet au point M_0 une tangente parallèle à (Oy).

Si f admet une dérivée à droite $f'_d(x_0)$ et une dérivée à gauche $f'_g(x_0)$, le graphe $\mathcal{C}_f$ admet en M_0 deux demi-tangentes. Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, $\mathcal{C}_f$ présente alors un point anguleux en M_0.



5.2 Opérations sur les fonctions dérivables

5.2.1 Opérations algébriques

Théorème 5.2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Si les fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en x_0. Alors*

1) *$f+g$ est dérivable en x_0 et on a $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*

2) *$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, αf est dérivable en x_0 et on a $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.*

3) *fg est dérivable en x_0 et on a $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.*

4) *Si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et on a $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.*

5) *Si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Démonstration. 1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$.

Donc, $f+g$ est dérivable en x_0 et on a $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0} = \alpha \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Donc, αf est dérivable en x_0 et on a $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{fg(x) - fg(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)$.

Donc, fg est dérivable en x_0 et on a $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{-1}{g(x)\, g(x_0)} . \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$.

Donc, $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et on a $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

5) Se déduit de 3) et 4), et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f.\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0).\frac{1}{g(x_0)} + -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} f(x_0).$$

Donc, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

□

5.2.2 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 5.2.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(I)$, et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0) \in J$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0)).$$

Démonstration. On suppose que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in J$, on a donc :

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\left(f'(x_0) + \varepsilon_1(x)\right), \text{ avec } \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0, \\ g(y) - g(y_0) = (y - y_0)\left(g'(y_0) + \varepsilon_2(y)\right), \text{ avec } \lim\limits_{y \to y_0} \varepsilon_2(y) = 0 \text{ et } y \in f(I). \end{cases}$$

En remarquant que $y - y_0 = f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\left(f'(x_0) + \varepsilon_1(x)\right)$, on a alors

$$g \circ f(x) - g \circ f(x_0) = (x - x_0)\left(f'(x_0) + \varepsilon_1(x)\right)\left(g'(f(x_0)) + \varepsilon_2(f(x))\right),$$

ou encore $g \circ f(x) - g \circ f(x_0) = (x - x_0)\left(f'(x_0)\, g'(f(x_0)) + \varepsilon(x)\right)$,

où ε est définie par : $\varepsilon(x) = g'(f(x_0))\,\varepsilon_1(x) + f'(x_0)\,\varepsilon_2(f(x)) + \varepsilon_1(x)\,\varepsilon_2(f(x))$.

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_2(f(x)) = 0$, on déduit $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ceci revient à

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0)).$$

□

5.2.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 5.2.3. *Soit f une fonction continue et strictement monotone de l'intervalle I dans l'intervalle $J = f(I)$. On sait que la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}.$$

Démonstration. Pour tout $y \in f(I)\backslash\{f(x_0)\}$, on a :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Cherche la limite , lorsque $y \to y_0$, de la fonction $g : y \mapsto \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$, revient à chercher la limite, lorsque $x \to x_0$, de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$. Puisque f est dérivable en $x_0 \in I$, que $f'(x_0) \neq 0$, et que $\lim\limits_{y \to f(x_0)} f^{-1}(y) = x_0$, on obtient par composition des limites :

$$\lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ceci montre que f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et que $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

5.2.4 Dérivées des fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des résultats obtenus directement ou à l'aide des théorèmes de dérivation. Le tableau de droite est celui des dérivées de composées usuelles, où f représente une fonction continue et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Fonctions	*Dérivées*
$\lambda \in \mathbb{R}$	0
x^n	$nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \neq 0$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},\ n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$-\dfrac{1}{x^2},\ x \in \mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in \mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}_+^*$
e^x	$e^x,\ x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x),\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b),\ x \in \mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b),\ x \in \mathbb{R}$

Fonctions	*Dérivées*
f^n	$nf'f^{n-1}$
$\dfrac{1}{f^n} = f^{-n}$	$\dfrac{-nf'}{f^{n+1}}$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\ln(f)$	$\dfrac{f'}{f}$
e^f	$f'e^f$
$\sin(f)$	$f'\cos(f)$
$\cos(f)$	$-f'\sin(f)$
$\tan(f)$	$f'(1+\tan^2(f))$

5.2.5 Primitives d'une fonction

Définition 5.2.1. *Soit deux fonctions f et F, définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si, F est une fonction dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.*

Exemple 5.2.1. *La fonction $F : x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $I =]0, +\infty[$ puisque $\forall x \in I =]0, +\infty[,\ F'(x) = \dfrac{1}{x} = f(x)$.*
La fonction $G : x \mapsto \ln(x) + 3$ est aussi une primitive de f sur I.

Remarque 5.2.1. 1) *Si F est une primitive de f sur I, alors toute primitive de f sur I s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.*

2) *L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $F + c$ où F est une primitive de f sur I et $c \in \mathbb{R}$. On le note $\int f(x)\,dx$, alors on écrit $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.*

3) *Toute fonction continue f sur un intervalle I, admet des primitives sur cet intervalle. Si $x_0 \in I$, l'unique primitive de la fonction continue f sur I qui s'annule en x_0 est la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.*

4) *Si F est une primitive quelconque de la fonction f continue sur I, on a donc $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(x_0)$. Par exemple $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x), x > 0$.*

5.3 Fonctions différentiables

5.3.1 Différentielle d'une fonction en un point

Définition 5.3.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. On dit que f est différentiable en x_0, s'il existe une application $d_{x_0}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : h \mapsto \varepsilon(h)$ définie sur un intervalle J de centre zéro telles que :*

$$\forall h \in J,\ (x_0 + h) \in I,\ f(x_0 + h) = f(x_0) + d_{x_0}f(h) + h\varepsilon(h),$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Ou encore telles que :

$$\forall h \in J,\ (x_0 + h) \in I,\ f(x_0 + h) = f(x_0) + d_{x_0}f(h) + \circ(h).$$

L'application $d_{x_0}f$ est alors une application linéaire unique. Elle est appelée différentielle de f en x_0 ou encore fonction linéaire tangente à f en x_0.

Remarque 5.3.1. 1) *f est différentiable sur I, si f est différentiable en tout point de I.*

2) *La fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dérivable en* x_0 *s'il existe une application linéaire* $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et une fonction* $\varepsilon : h \mapsto \varepsilon(h)$ *définie sur un intervalle* J *de centre zéro telles que :* $\forall h \in J,\ (x_0 + h) \in I,\ f(x_0 + h) = f(x_0) + \varphi_{x_0}(h) + h\varepsilon(h)$, *avec* $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, *et on a donc* $\varphi_{x_0}(h) = hf'(x_0)$.

3) f *est différentiable en* x_0, *si et seulement si* f *est dérivable en* x_0, *et on a* $d_{x_0}f(h) = f'(x_0)h$.

4) *Dans le cas où* $f(x) = I_d(x) = x$ ($f = I_d$ *est l'identité de* $\mathbb{R}$), f *est différentiable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) = 1$, *d'où* $d_{x_0}I_d(h) = 1.h = h$ *ne dépend pas de* x_0, *on la note* dx. *Donc* $\forall h \in \mathbb{R},\ dx(h) = d_x I_d(h) = h$.

5) *Si* f *est dérivable en* $x_0 \in I$, *alors* $\forall h \in \mathbb{R},\ d_{x_0}f(h) = f'(x_0)dx(h)$, *d'où*

$$d_{x_0}f = f'(x_0)dx. \qquad (1)$$

De plus, si on remplace x_0 *par* x *dans* $f'(x_0)$, *la formule* (1) *peut être mise sous la forme :* $df = f'(x)dx$.
La formule ci-dessus peut s'écrire $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ (*rapport des différentielles de* f *et de* x *pour désigner* $f'(x)$).

Exemple 5.3.1. 1) *Toute application constante* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est différentiable et sa différentielle est l'application nulle, c'est-à-dire* $d_x f = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

2) *Toute application linéaire* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est différentiable et sa différentielle est l'application constante égale à* f, *c'est-à-dire* $d_x f = f$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

5.3.2 Opérations sur les différentielles

Les théorèmes suivants découlent des Théorèmes 5.2.1 et 5.2.2 respectivement.

Théorème 5.3.1. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Si les fonctions* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *sont différentiables en* x_0. *Alors*

1) $f + g$ *est différentiable en* x_0 *et on a* $d_{x_0}(f + g) = d_{x_0}f + d_{x_0}g$.

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, αf *est différentiable en* x_0 *et on a* $d_{x_0}(\alpha f) = \alpha d_{x_0}f$.

3) fg *est différentiable en* x_0 *et on a* $d_{x_0}(f.g) = f(x_0)\, d_{x_0}g + g(x_0)\, d_{x_0}f$.

4) *Si* $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ *est différentiable en* x_0 *et on a* $d_{x_0}\left(\dfrac{1}{g}\right) = -\dfrac{d_{x_0}g}{g^2(x_0)}$.

5) *Si* $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ *est différentiable en* x_0 *et on a*

$$d_{x_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(x_0)\, d_{x_0}f - f(x_0)\, d_{x_0}g}{g^2(x_0)}.$$

Théorème 5.3.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(I)$, et $x_0 \in I$. Si f est différentiable en x_0 et g différentiable en $f(x_0) \in J$, alors la fonction composée $g \circ f$ est différentiable en x_0 et*

$$d_{x_0}(g \circ f) = d_{f(x_0)}g \circ d_{x_0}f = d_{f(x_0)}g\,(d_{x_0}f).$$

Exemple 5.3.2. *Déterminons la différentielle de la fonction f définie par :*

1) $f(x) = x^3 - 2x + 5$. *On a f est différentiable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2$, d'où la différentielle de f est $df = (3x^2 - 2)dx$.*

2) $f(x) = \sqrt{1 + e^{2x}} - \sin^2(x) + 3$. *On a f est différentiable sur $\mathbb{R}$ et la différentielle de f est $df = (\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}} - 2\sin(x)\cos(x))dx$.*

5.4 Théorème de Rolle et des accroissements finis

5.4.1 Théorème de Fermat

Théorème 5.4.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et $x_0 \in I$. Si f admet un extremum local (un maximum local ou un minimum local) en x_0 et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Supposons, qu'il s'agisse d'un maximum local en x_0.

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ f(x) \leq f(x_0).$$

L'existence de $f'(x_0)$ entraîne l'existence et l'égalité des dérivées à droite et à gauche $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$. Pour tout $x \in I$, on a alors :

$$\begin{cases} \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0[,\ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,\ \text{d'ou}\ \ f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \\ \forall x \in]x_0, x_0 + \alpha[,\ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,\ \text{d'où}\ \ f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \end{cases}$$

on déduit $f'_g(x_0) = f'(x_0) \geq 0$, et $f'_d(x_0) = f'(x_0) \leq 0$.
d'où, $f'(x_0) = 0$.
Le cas d'un minimum local se traite de maniére similaire. □

Remarque 5.4.1. 1) *La tangente au graphe $\mathcal{C}_f$ de f au point $(x_0, f(x_0))$ est horizontale.*

2) *une fonction peut admettre un extremum en un point x_0 sans être dérivable en ce point, par exemple la fonction $f : x \mapsto |x-1|$ adamet un extremum (un minimum) local en 1 ($\exists \alpha > 0,\ \forall x \in]1-\alpha, 1+\alpha[,\ f(x) \geq 0 = f(1)$), mais f n'est pas dérivable en 1 ($f'_g(1) = -1$ et $f'_d(1) = 1$).*

3) *La réciproque de ce théorème est fausse, si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$, on ne peut pas déduire que f admet un extremum local en x_0. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 3x^2 > 0$, $f'(0) = 0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais f n'admet pas d'extremum en 0.*

4) *Dans ce théorème, il est essentiel que x_0 ne soit pas une borne de l'intervalle I. Par exemple, la fonction f définie sur $I = [0;1]$ par $f(x) = x^2+1$ est dérivable sur I et $\forall x \in]0;1[,\ f'(x) = 2x > 0$, on a donc f est strictement croissante sur I et $f(I) = [f(0); f(1)] = [1;2]$. Alors f admet un maximum sur I en 1 avec $f'(1) = 2 \neq 0$.*

5) *Quand $f'(x_0) = 0$ on dit que x_0 est un point critique de f.*

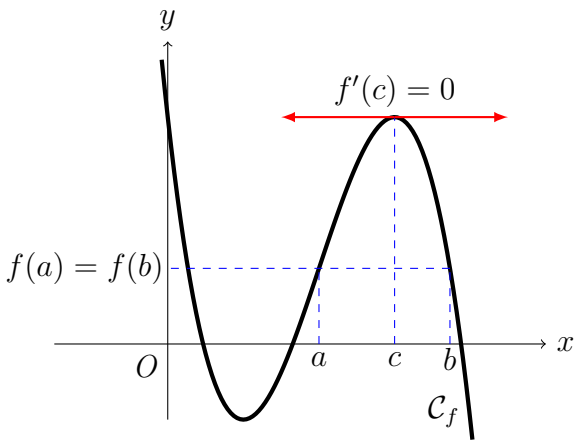
5.4.2 Théorème de Rolle

Théorème 5.4.2. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Puisque f est continue sur le segement $[a,b]$, f est bornée et atteint ses bornes $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ et $f([a,b]) = [m,M]$.
- Si $m = M$, f est constante sur $[a,b]$, donc $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$.
- Si $m < M$. Supposons $f(a) \neq M$, alors $f(b) \neq M$ car on a $f(a) = f(b)$. Or il existe $c \in]a,b[$, tel que $f(c) = M$. D'où,

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in]c-\alpha, c+\alpha[,\ f(x) \leq f(c).$$

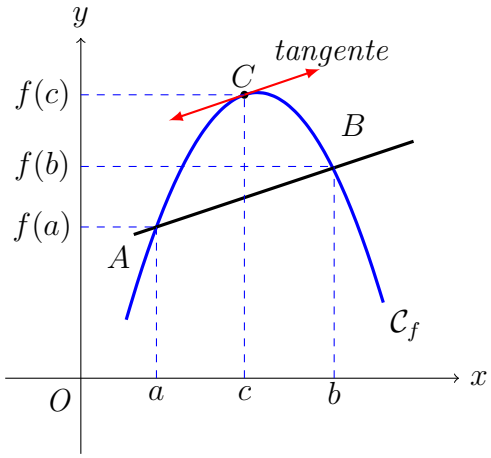
Donc f est dérivable et admet extremum local (un maximum (local)) en c, d'aprés le théorème de Fermat précédent, $f'(c) = 0$.
Si $f(a) = M$ alors $f(a) \neq m$ (et donc $f(b) \neq m$) et le même raisonnement s'applique avec le minimum (local). □



Graphiquement, il existe au moins un point du graphe $\mathcal{C}_f$ de f où la tangente est horizontale.

5.4.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 5.4.3. (*Égalité des accroissements finis*)
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.



Graphiquement, ce théorème signifie que la tangente en $C(c, f(c))$ à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Démonstration. Considérons la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'aprés le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. C'est-à-dire

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ce qui s'écrit $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

Théorème 5.4.4. (*Inégalité des accroissements finis*)
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

(1) *S'il existe deux réels m et M tels que : $\forall x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

(2) *S'il existe une constante K telle que : $\forall x \in]a, b[$, $\left|f'(x)\right| \leq K$, alors*

$$\forall x, y \in [a, b], \ \left|f(x) - f(y)\right| \leq K|x-y| \quad (f \text{ est } K\text{-lipschitzienne sur } [a, b]).$$

Démonstration. (1) En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[a, b]$, on obtient l'existence d'un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$. D'où

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Comme $m \leq f'(c) \leq M$, on déduit

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M.$$

Alors on obtient, $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
(2) Fixons $(x, y) \in ([a, b])^2$, tel que $x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[x, y]$, on voit qu'il existe d'un nombre $c \in]x, y[$ tel que :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} = f'(c),$$

et comme $\left|f'(c)\right| \leq K$, alors $\left|f(x) - f(y)\right| \leq K|x-y|$. □

Exemple 5.4.1. *Montrons que $\forall x \geq 0, \ \sin(x) \leq x$.*
Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sin(x)$. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x) = \cos(x)$, et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin'(x)| \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis (Théorème 5.4.4 (2)) s'écrit alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|.$$

Si $y = 0$, alors on obtient $|\sin(x)| \leq |x|$.
Ainsi pour tout $x \geq 0$, on a $\sin(x) \leq x$.

Théorème 5.4.5. (*Théorème des accroissements finis généralisés*)
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Si g' ne s'annule pas sur $[a, b]$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. Considérons la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a,b]\,,\ \varphi(x) = \frac{1}{g(b)-g(a)}\left[(g(b)-g(a))\,f(x) - (f(b)-f(a))\,g(x)\right].$$

Puisque $g'(x) \neq 0$, pour tout $x \in [a,b]$, on déduit $g(a) \neq g(b)$.
Il est clair que la fonction φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et que $\varphi(a) = \varphi(b)$. En appliquant le théorème de Rolle à φ sur $[a,b]$, on obtient l'existence d'un nombre $c \in]a,b[$ tel que

$$\varphi'(c) = \frac{1}{g(b)-g(a)}\left[(g(b)-g(a))\,f'(c) - (f(b)-f(a))\,g'(c)\right] = 0.$$

ce qui s'écrit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

Proposition 5.4.1. (*Règle de l'Hôspital*)
Soit $x_0 \in [a,b]$ et soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si f et g sont dérivables sur $]a,b[\setminus\{x_0\}$ et si $g'(x) \neq 0$, pour tout $x \in]a,b[\setminus\{x_0\}$. Alors

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \ell.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que $x > x_0$. En appliquant le théorème des accroissements finis généralisés sur $[x_0,x]$, on obtient l'existence d'un nombre $c_x \in]x_0,x[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Si $x \to x_0$, alors $c_x \to x_0$, par suite $\lim\limits_{c_x\to x_0}\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \ell$, autrement dit

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \ell.$$

Nous faisons de même avec $x < x_0$. □

Exemple 5.4.2. *Calculons* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^3)}{x^6}$.
C'est la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Posons $f(x) = 1-\cos(x^3)$ et $g(x) = x^6$. les fonctions f et g sont dérivables, on a donc $f'(x) = 3x^2\sin(x^3)$, $g'(x) = 6x^5$ et

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{2x^3} = \frac{1}{2},$$

d'après la règle de l'Hôspital, on obtient

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^3)}{x^6} = \frac{1}{2}.$$

5.4.4 Sens de variation d'une fonction dérivable

Définition 5.4.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que :*

- *f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$,*
- *f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$,*
- *f est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$,*
- *f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$,*
- *f est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$.*

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème des accroissements finis.

Corollaire 5.4.1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :*

1. $(\forall x \in I,\ f'(x) = 0) \Leftrightarrow (f$ *est constante sur* $I)$,
2. $(\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow (f$ *est croissante sur* $I)$,
3. $(\forall x \in I,\ f'(x) > 0) \Rightarrow (f$ *est strictement croissante sur* $I)$,
4. $(\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0) \Leftrightarrow (f$ *est décroissante sur* $I)$,
5. $(\forall x \in I,\ f'(x) < 0) \Rightarrow (f$ *est strictement décroissante sur* $I)$.

Exemple 5.4.3. *Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2(x+2)}{x+1}$.*
La fonction f est une fonction rationnelle définie est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
On a $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{x(x^2+5x+4)}{(x+1)^2}$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Comme $(\forall x \in \mathcal{D}_f, x^2 + 5x + 4 > 0$ et $(x+1)^2 > 0)$, f' est du signe de x, donc $f'(x) > 0$, si $x \in]0, +\infty[$ et $f'(x) < 0$, si $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$.
D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, 0]$, et elle est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Résumons le signe de f' et les variations de f dans un tableau, appelé tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	$+\infty$

5.5 Dérivées d'ordre supérieur

5.5.1 Dérivées successives

Définition 5.5.1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa dérivée (on dira que $f' = f^{(1)}$ est la dérivée d'ordre 1 ou dérivée première de f).*
- Si la fonction f' est aussi dérivable sur I, elle admet à son tour une fonction dérivée, appelée dérivée seconde (ou dèrivée d'ordre 2) de f, notée $f'' = (f')' = f^{(2)}$.
On définit les dérivées successives de f par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée d'ordre n (ou dérivée n-ième) de f notée $f^{(n)}$ où $\dfrac{d^n f}{dx^n}$, est la dérivée de $f^{(n-1)}$.
- Par convention on pose $f^{(0)} = f$, et on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.
- On dit que f est n fois dérivable si sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe.
- On dit que f est indéfiniment dérivable sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable.

Exemple 5.5.1. *Les fonctions* sin *et* cos *sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) \quad et \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

5.5.2 Classe d'une Fonction

Définition 5.5.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.*

- *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ si elle est continue sur I.*
- *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ou n fois continument dérivable si elle est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue sur I.*
- *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle indéfiniment dérivable sur I (c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I).*

- L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est noté $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Exemple 5.5.2. 1) *Les fonctions* sin, cos *et* exp *sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

2) *La fonction $x \mapsto |x-1|$ définie sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, car n'est pas dérivable en $x = 1$.*

Théorème 5.5.1. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors :*

1) *$\lambda f + g$ est n fois dérivable sur I et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$.*

2) *fg est n fois dérivable sur I et* $\left(f\cdot g\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}$ (*Formule de Leibniz*), *où* $\binom{n}{k}=\mathcal{C}_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

5.5.3 Formule de Taylor

Théorème 5.5.2. (*Formule de Taylor*)

Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions vérifiant les conditions suivantes :

1) $f\in\mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$, $f^{(n)}$ *dérivable sur* $]a,b[$,

2) $g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, g *est dérivable sur* $]a,b[$ *et* $\forall x\in]a,b[,\ g^{'}(x)\neq 0$.

Soit $x_0\in[a,b]$. Alors $\forall x\in[a,b],\ x\neq x_0$, on a

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)(x_0)}}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(g(x)-g(x_0))}{n!g'(c)},\qquad(5.1)$$

et c est un point compris strictement entre x_0 et x. L'éxpression (5.1) *est dite formule de Taylor avec reste généralisé* $R_n(x_0,x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(g(x)-g(x_0))}{n!g'(c)}$.

Démonstration. Supposons $x>x_0$. Considérons la fonction $\varphi:[x_0,x]\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}$.

φ est continue sur $[x_0,x]$ et admet sur $]x_0,x[$ une dérivée

$$\varphi'(t)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k-f^{(k)}(t)k(x-t)^{k-1}}{k!}=-\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis généralisés sur $[x_0,x]$, on obtient l'existence d'un nombre $c\in]x_0,x[$ tel que

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{\varphi^{'}(c)}{g^{'}(c)}.$$

L'affirmation du théorème en résulte aussitôt. Démonstration analogue pour $x<x_0$, en remplaçant $(x-x_0)$ par $|x-x_0|$ dans le second membre. □

Théorème 5.5.3. (*Formule de Taylor-Young*)

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction et $x_0\in[a,b]$. Supposons que $f\in\mathcal{C}^{n-1}([a,b],\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(x_0)$ existe $(fini)$. Alors $\forall x\in[a,b]$,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\circ((x-x_0)^n),$$

ou encore $\forall x\in[a,b]$,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0),$$

où $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x-x_0)=0$. *Cette égalité est appelée formule de Taylor avec reste de Young. Cas particulier, en faisant $x_0=0$, on obtient la formule de MacLaurin à l'ordre n avec reste de Young*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\circ(x^n).$$

Exemple 5.5.3. *On sait que*

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N},\ \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}k\right),\ \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}k\right)$ *et* $(e^x)^{(k)} = e^x$.

En appliquant la formulle de Taylor-Young (la formule de MacLaurin) en $x_0 = 0$, *on obtient :*

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1}),$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n).$$

5.6 Extrémum local d'une fonction dérivable

Une condition nécessaire d'existence d'un extrémum pour les fonctions dérivables est donnée par le théorème de Fermat (Théorème 5.4.1). Les deux résultats suivants donnent des conditions suffisantes pour l'existence d'un extrémum local.

Proposition 5.6.1. *Soit* f *une fonction dérivable sur un intervalle ouvert* I, *et* $x_0 \in I$. *Si* $f'(x_0) = 0$ *et si* f' *change de signe en* x_0, *alors* f *admet un extremum local en* x_0.

Démonstration. Supposons que f' est strictement négative avant x_0 et strictement positive aprés x_0, c'est-à-dire

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0[\cap I,\ f'(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]x_0, x_0 + \alpha[\cap I,\ f'(x) > 0.$$

Comme $f'(x_0) = 0$, on a donc

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0[\cap I,\ f'(x) \leq 0 \text{ et } \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha[\cap I,\ f'(x) \geq 0.$$

Ainsi f est décroissante sur $]x_0 - \alpha, x_0] \cap I$ et croissante sur $[x_0, x_0 + \alpha[\cap I$, d'où

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0] \cap I,\ f(x) \geq f(x_0) \text{ et } \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha[\cap I,\ f(x) \geq f(x_0).$$

Donc $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I,\ f(x) \geq f(x_0)$, ceci montre que f admet un minimum local en x_0. Le cas où f' est strictement positive avant x_0 et strictement négative aprés x_0 se traite de manière similaire. □

Remarque 5.6.1. 1) *Si* f *est croissante (resp. décroissante) avant* x_0 *et décroissante (resp. croissante) après* x_0, *alors* f *admet un maximum local (resp. minimum local) en* x_0.

2) *Si* f' *existe et si* $f'(x_0) = 0$, *mais* f' *ne change pas signe autour de ce point, alors* f *n'admet pas d'extremum en* x_0. *Par exemple, la fonction* $f : x \mapsto x^3$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et on a* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) > 0,\ \ f'(0) = 0$, *on a alors* f' *ne change pas de signe et la fonction* f *n'admet pas d'extremum en* 0.

Proposition 5.6.2. *Soit* f *une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert* I *et* f'' *continue sur* I ($f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$). *Soit* $x_0 \in I$, *si* $f'(x_0) = 0$ *et si* $f''(x_0) \neq 0$, *alors* f *admet un extremum local en* x_0 (*c'est un maximum local si* $f''(x_0) < 0$ *et c'est un minimum local si* $f''(x_0) > 0$).

Démonstration. La fonction f vérifie les hypothèses du Théorème 5.5.3. En appliquant La formule de Taylor-Young au voisinage de x_0, on obtient :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x - x_0),$$

où $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$. Puisque $f'(x_0) = 0$, on déduit

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^2 \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x - x_0) \right).$$

Ainsi pour $x \to x_0$ (pour $|x - x_0|$ assez petit), on a $f(x) - f(x_0)$ est du signe de $(x - x_0)^2 f''(x_0)$.

Supposons que $f''(x_0) > 0$. Alors

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in (]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[) \cap I,\ f(x) - f(x_0) > 0,$$

d'où $\quad \exists \alpha > 0,\ \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I,\ f(x) \geq f(x_0).$

Donc f admet un minimum local en x_0. Le cas où $f''(x_0) < 0$ se démontre de même. □

Remarque 5.6.2. *Les extrémums d'une fonction réelle* f *définie sur* $I = [a, b] \subset \mathcal{D}_f$ *sont à rechercher parmi :* 1) *les extrémités de* I (*c'est-à-dire les bornes* a *et* b).
2) *les points de l'intérieur de* I *où* f *est dérivable et la dérivée s'annule* (*c'est-à-dire les points critiques*). 3) *les points de* I *où la fonction* f *n'est pas dérivable.*

Exemple 5.6.1. *Dèterminer les extrémums de la fonction* f *définie par*

1) $f(x) = (2x - 1)e^{-2x}$.

La fonction f *est dérivable sur* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, *et on a* $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 4(-x+1)e^{-2x}$.
f' *est du signe de* $-x + 1$, *d'ou* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f'(x) < 0$, *si* $x \in]1, +\infty[$ *et* $f'(x) > 0$, *si* $x \in]-\infty, 1[$ (f' *s'annule en changeant de signe en* $x = 1$).
D'aprés la Proposition 5.6.1, f *admet un maximum en 1, égal à* $f(1) = e^{-2}$.

2) $f(x) = 2x^2 \ln(x) - 3x^2$.

f *est deux fois dérivable sur* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$, *on a* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 4x(\ln(x) - 1)$

et $f''(x) = \ln(x)$. *D'où* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ *et* $f''(e) = 1 > 0$. *D'aprés la Proposition 5.6.2,* f *admet un minimum en* e, *égal à* $f(e) = -e^2$.

5.7 Convexité d'une courbe

5.7.1 Partie convexe du plan

Définition 5.7.1. *Une partie* $\mathcal{C}$ *du plan* $\mathcal{P}$ *est dite convexe si, dés qu'elle contient deux points* A *et* B, *elle contient le segment* $[AB]$. *C'est-à-dire :*

$$\mathcal{C} \text{ convexe} \Leftrightarrow \forall (A, B) \in \mathcal{C}^2,\ [AB] \subset \mathcal{C}.$$

Par exemple les segments, les demi-droites et les demi-plans sont convexes.

5.7.2 Fonction convexe

Définition 5.7.2. *Une fonction* f *définie sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *est dite convexe sur* I *si elle vérifie :*

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall \lambda \in [0;1],\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Remarque 5.7.1. *Si* $(-f)$ *est convexe, on dit que* f *est concave, c'est-à-dire :*

$$\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall \lambda \in [0;1],\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

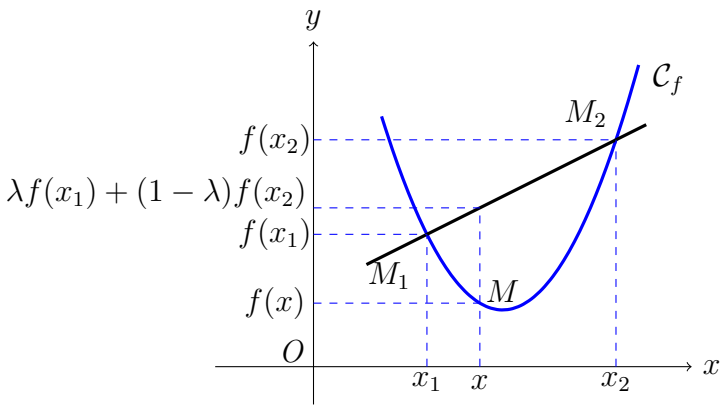
Exemple 5.7.1. 1. *La fonction* $x \mapsto |x|$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$, *car*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ |\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| \leq \lambda |x_1| + (1-\lambda)|x_2| \text{ pour } \lambda \in [0;1].$$

2. *La fonction* $x \mapsto \alpha x + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *est à la fois convexe et concave sur* $\mathbb{R}$, *car*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \alpha\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) + \beta = \lambda\left(\alpha x_1 + \beta\right) + (1-\lambda)\left(\alpha x_2 + \beta\right) \text{ pour } \lambda \in [0;1].$$

Interprétation graphique. *Une fonction* f *définie sur un intervalle* I *est convexe si pour tout couple de points* $(M_1(x_1, f(x_1)), M_2(x_2, f(x_2)))$ *de son graphe* $\mathcal{C}_f$, *tout point* $M(x, f(x))$ *du* $\mathcal{C}_f$ *d'abscisse comprise entre celles de* M_1 *et* M_2, *est en dessous du segement* M_1M_2.



La fonction f est convexe sur I si la partie du plan située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ est convexe. Autrement dit, f est convexe sur I si tout arc de sa courbe représentative est situé en dessous de la corde (segement) correspondante.

Théorème 5.7.1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. f est convexe (resp, concave) sur I si, et seulement si, sa dérivée f' est croissante (resp, décroissante) sur I.*

Corollaire 5.7.1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. f est convexe (resp, concave) sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive (resp, négative) sur I.*

Exemple 5.7.2. *Les fonctions $f : x \mapsto x^2+5x+3$ et $g : x \mapsto e^x$ sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 2 \geq 0$ et $g''(x) = e^x \geq 0$.*

Théorème 5.7.2. *La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f convexe dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.*

Démonstration. L'équation de la tangente (Δ) en $x_0 \in I$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Démontrer la propriété énoncée revient à démontrer :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Posons, $\forall x \in I,\ g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$, la fonction g est dérivable sur I et $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Puisque f' est croissante sur I, il en résulte que :

$$\begin{cases} \forall x \geq x_0,\ g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \geq g'(x_0) = 0, \\ \forall x \leq x_0,\ g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \leq g'(x_0) = 0. \end{cases}$$

On en déduit que g admet un minimum en x_0 avec $g(x_0) = 0$.

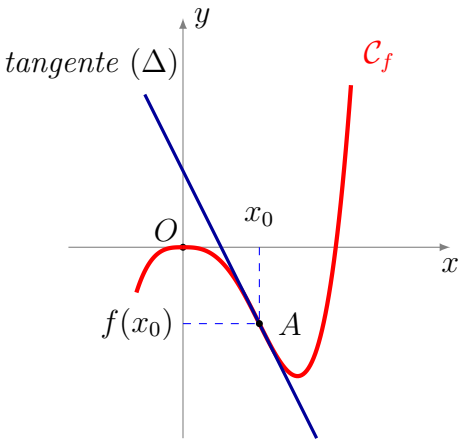
D'où $\forall x \in I,\ g(x) \geq 0$ (g est positive sur I), c'est-à-dire :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \qquad \square$$

Remarque 5.7.2. *La fonction f est concave sur I si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de chacune de ses tangentes.*

5.7.3 Point d'inflexion

Définition 5.7.3. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet un point d'inflexion en A d'abscisse x_0 si $\mathcal{C}_f$ change de convexité en ce point. Cela signifie que la fonction f change de convexité en x_0, c'est-à-dire f est convexe d'un côté de x_0 et concave de l'autre.*
Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet un point d'inflexion en A, si $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente (Δ) au point A.

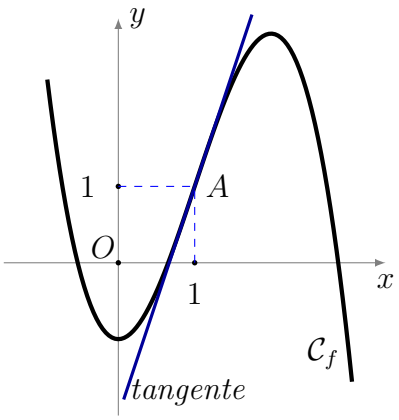


Proposition 5.7.1. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet un point d'inflexion en $A(x_0, f(x_0))$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_0.*

Exemple 5.7.3. *Soient la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Il est clair que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -3x^2 + 6x$ et $f''(x) = -6x + 6 = 6(1 - x)$, de plus*

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1,\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ et } f(1) = 1.$$

D'où f'' s'annule en changeant de signe en $x = 1$, donc f est concave sur $[1, +\infty[$ et convexe sur $]-\infty, 1]$. Il en résulte que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $A(1, 1)$.



5.8 Asymptote d'une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ et $\mathcal{C}_f$ son courbe représentative dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour tout $x \in I$, on notera $M(x, f(x))$ le point de coordonnées $(x, f(x))$, appartenant à $\mathcal{C}_f$. On a $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$.

5.8.1 Définitions

Définition 5.8.1. (*Branche infinie*)
On dit que $\mathcal{C}_f$ présente une branche infinie en $x_0 \in I$, si $\lim\limits_{x \to x_0} \|\overrightarrow{OM}\| = +\infty$.
C'est-à-dire si l'une au moins des coordonnées $(x, f(x))$ tend vers ∞ quand x tend vers x_0, on a donc l'un des cas suivants : $\lim\limits_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Définition 5.8.2. (*Direction asymptotique*)
On dit que (D) est une direction asymptotique de $\mathcal{C}_f$ en x_0, si la courbe $\mathcal{C}_f$ prèsente une branche infinie en x_0 et si la droite (OM) joigant l'origine au point $M(x, f(x))$ à une position limite (D) quand x tend vers x_0.

Définition 5.8.3. (*Droite asymptote*)
On dit que la droite (Δ) est une droite asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en x_0, si la distance d'un point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ à la droite (Δ) tend vers 0 quand x tend vers x_0, c'est-à-dire (Δ) une droite qui approxime cette branche infinie.

5.8.2 Recherche des asymptotes

Les branches infinies de correspondent aux cas suivants :

1. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, *alors la droite d'équation* $x = x_0$ *est une asymptote verticale à* $\mathcal{C}_f$.

2. *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, *alors la droite d'équation* $y = \ell$ *est une asymptote horizontale à* $\mathcal{C}_f$ *en* $\pm\infty$.

3. *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, *on étudie* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

   i) *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ *et* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$, *alors la droite* (Δ) *d'équation* $y = ax + b$ *est une asymptote oblique à* $\mathcal{C}_f$ *en* $\pm\infty$.

   ii) *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, *alors la courbe* $\mathcal{C}_f$ *présente une branche parabolique horizontale (de direction asymptotique l'axe des abscisses* (Ox)*).*

   iii) *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, *alors la courbe* $\mathcal{C}_f$ *présente une branche parabolique verticale (de direction asymptotique l'axe des ordonnées* (Oy)*).*

   iv) *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ *et* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, *alors la courbe* $\mathcal{C}_f$ *présente une branche parabolique de direction asymptotique* $y = ax$.

Remarque 5.8.1. 1) *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, *alors la droite* (Δ) *d'équation* $y = ax + b$ *est une asymptote oblique à* $\mathcal{C}_f$ *au voisinage de* $\pm\infty$, *et on a :*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b.$$

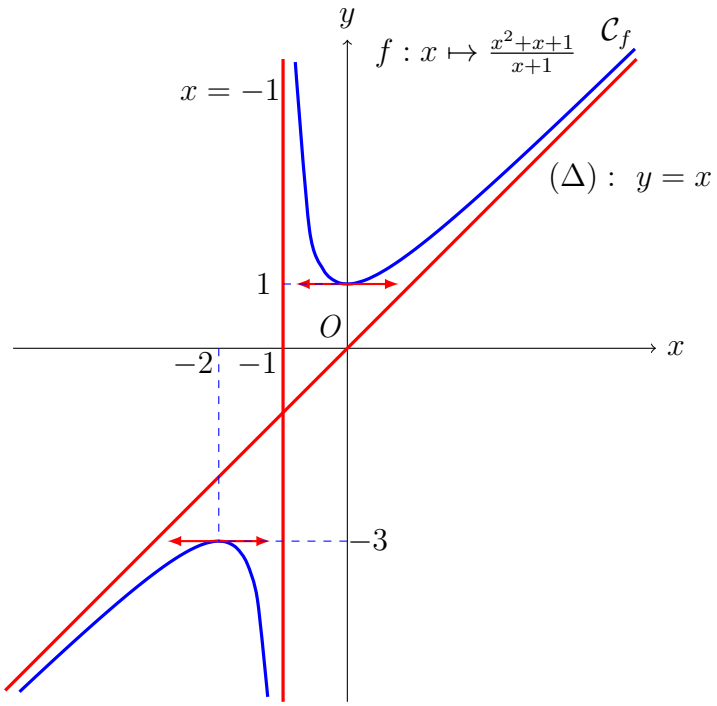
Ce cas se présente que $f(x)$ *peut se mettre sous la forme* $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ *avec* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$. *La position de* $\mathcal{C}_f$ *par rapport à* (Δ) *est donnée par le signe de* $\varphi(x) = f(x) - (ax + b)$.

2) *On dit que la courbe* $\mathcal{C}_g$ *d'équation* $y = g(x)$ *est une courbe asymptotique à* $\mathcal{C}_f$ *en* $\pm\infty$, *si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. *Par exemple, posons* $f(x) = e^{x+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$. *Comme* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - e^{x+1}) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$, *alors la courbe* $\mathcal{C}_g$ *d'équation* $y = e^{x+1}$ *est une courbe asymptotique à* $\mathcal{C}_f$ *en* $\pm\infty$.

Exemple 5.8.1. *Cherchons les asymptotes à* $\mathcal{C}_f$ *la courbe représentative de la fonction* f *définie par :*

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. *On a la fonction* f *est définie sur* $\mathcal{D}_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$.
   On déduit la droite d'équation $y = 2$ *est une asymptote horizontale à* $\mathcal{C}_f$ *et la droite d'équation* $x = 3$ *est une asymptote verticale à* $\mathcal{C}_f$.

2. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. *La fonction* f *est définie sur* $\mathcal{D}_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$. *Comme* $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \pm\infty$, *alors la droite d'équation* $x = -1$ *est une asymptote verticale à* $\mathcal{C}_f$. *Pour les infinis, on a* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$. *On conclut que la droite d'équation* $y = x$ *est asymptote oblique à* $\mathcal{C}_f$.



5.9 Construction du graphe d'une fonction

Soit f *une fonction et* $\mathcal{C}_f$ *sa courbe représentative dans un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *Pour tracer le graphe* $\mathcal{C}_f$, *on peut adopter le plan d'étude suivant :*

1) *On détermine le domaine de définition* $\mathcal{D}_f$ *et on étudie éventuellement la continuité. On réduira le domaine d'étude de* f *(inclus dans* $\mathcal{D}_f$*) en étudiant la parité et (ou) la périodicité de* f *et les symétries éventuelles de* $\mathcal{C}_f$.

2) *On calcule les limites aux bornes du* $\mathcal{D}_f$ *(ou du domaine d'étude) et on détermine, s'il y a lieu, les différentes asymptotes (verticales, horizontales et obliques), dans le cas d'une asymptote oblique, on devra indiquer sa position par rapport à* $\mathcal{C}_f$.

3) *On calcule la dérivée* f' *et on étudie le sens de variation de la fonction* f. *On rassemble les résultats précédents (*$\mathcal{D}_f$ *ou le domaine d'étude, limites, signe de*

f', sens de variation de f, les extrémums) dans le tableau de variation.

4) *On étudie les points remarquables : points d'intersection avec les axes de coordonnees, points à tangente horizontale ou verticale, extrema éventuels, anguleux, points d'inflexion...etc.*

5) *On construit le graphe $\mathcal{C}_f$ de f en indiquant les points remarquables avec leur tangentes, les asymptotes.*

Exemple 5.9.1. *On construit le graphe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie par :*

$$f : x \mapsto \cos^2(x)\sin(2x).$$

• *La fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et on a*

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = \cos^2(x+\pi)\sin(2x+2\pi) = \cos^2(x)\sin(2x) = f(x),$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \cos^2(-x)\sin(-2x) = -\cos^2(x)\sin(2x) = -f(x).$

• *La fonction f est périodique de période π, donc on peut réduire son domaine d'étude à un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus f est une fonction impaire, il suffit de l'étudier sur la partie positive de $\mathcal{D}_f$ c'est-à-dire sur $[0, +\infty[\cap\mathcal{D}_f$. Comme f est impaire et périodique de période π, on l'étudier donc sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Soit $\mathcal{C}_1$ la représentative graphique de f sur I, $\mathcal{C}_2$ la symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'origine des axes, alors $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ est la représentative graphique de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ qui est un intervalle d'amplitude π, les autres parties de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ se déduisent de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ par les translations de vecteurs $k\pi\overrightarrow{i}\,(k\pi, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*

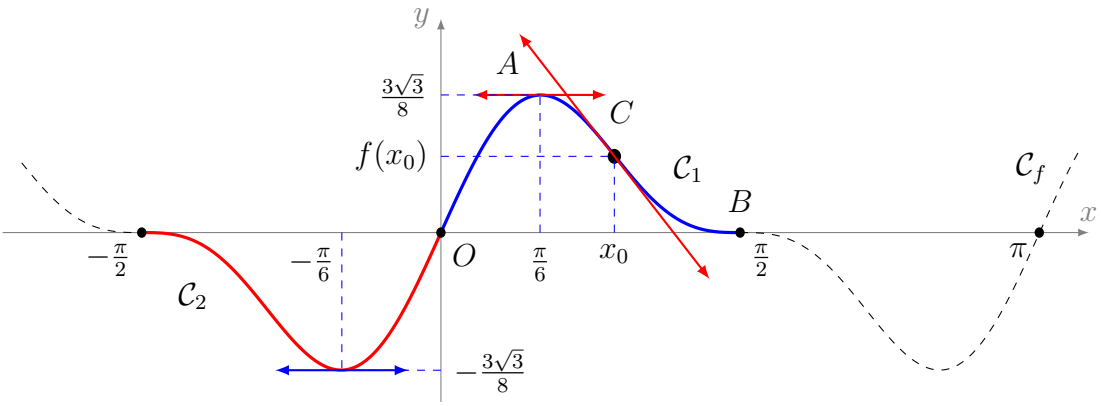
• *La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\cos(x)\sin(x)\sin(2x) + 2\cos(2x)\cos^2(x) \\ &= -2\cos(x)\sin(x)(2\sin(x)\cos(x)) + 2(\sin^2(x) - \cos^2(x))\cos^2(x) \\ &= 2(1+2\sin(x))(1-2\sin(x))\cos^2(x). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\cos(x) = 0$ ou $1 - 2\sin(x) = 0)$, d'où $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\} \subset I$. Comme $(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \cos^2(x) > 0$ et $1 + 2\sin(x) > 0)$, f' est du signe de $(1 - 2\sin(x))$. Donc f' s'annule en changeant de signe en $x = \frac{\pi}{6}$, on en déduit $f'(x) > 0$, si $x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$ et $f'(x) < 0$, si $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.
On a $f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, le tableau de variation de f sur I est donc :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	2	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	0

• *Comme* $f'(\frac{\pi}{6}) = 0$ *et* $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, *la courbe* $\mathcal{C}_f$ *admet des tangentes parallèles à l'axe* (Ox) *aux points* $A(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{8})$ *et* $B(\frac{\pi}{2}, 0)$. *La fonction* f *est deux fois dérivable sur* I *et on a* $f''(x) = -4\sin(x)\cos(x)(1 + 4\cos(2x))$.
Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, *on a* $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 0.91$, *d'où* f'' *s'annule en changeant de signe en* $x_0 \approx 0.91$. *Donc* $\mathcal{C}_f$ *admet un point d'inflexion* $C(0.91, f(0.91))$. *La courbe* $\mathcal{C}_f$ *prend l'allure suivante*



Exemple 5.9.2. *Étudier les variations et construire le graphique* $\mathcal{C}_f$ *de la fonction* f *définie par :*

$$f : x \mapsto \frac{-2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}.$$

• f *est définie* $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, *donc* f *est définie et continue sur* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.
• *Pour tout* x *de* $\mathcal{D}_f$, *on a* $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$.
• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$. *Comme* $\lim\limits_{x\to-1}(-2x^2 - 2x + 1) = 3$ *et* $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)^2 = 0^+$, *on a donc* $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$.
• *La courbe* $\mathcal{C}_f$ *admet une asymptote verticale d'équation* $x = -1$ *et une asymptote horizontale* (Δ) *d'équation* $y = -2$. *Pour étudier la position relative entre l'asymptote* (Δ) *et la courbe* $\mathcal{C}_f$, *on étudie le signe de la différence* $f(x) - (-2) = \dfrac{2x+3}{(x+1)^2}$. *Puisque* $(\forall x \in \mathcal{D}_f, (x+1)^2 > 0)$, *on a* $f(x) - (-2)$ *est du signe de* $2x + 3$ *sur* $\mathcal{D}_f$. *On conclut que* $\mathcal{C}_f$ *coupe l'asymptote* (Δ) *au*

point $F\left(-\frac{3}{2},-2\right)$*, la courbe* $\mathcal{C}_f$ *est au dessus de* (Δ) *sur* $]-\frac{3}{2},-1[\cup]-1,+\infty[$ *et elle est en dessous sur* $]-\infty,-\frac{3}{2}[$.

• *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathcal{D}_f$ *et pour tout* $x\in\mathcal{D}_f$*, on a*

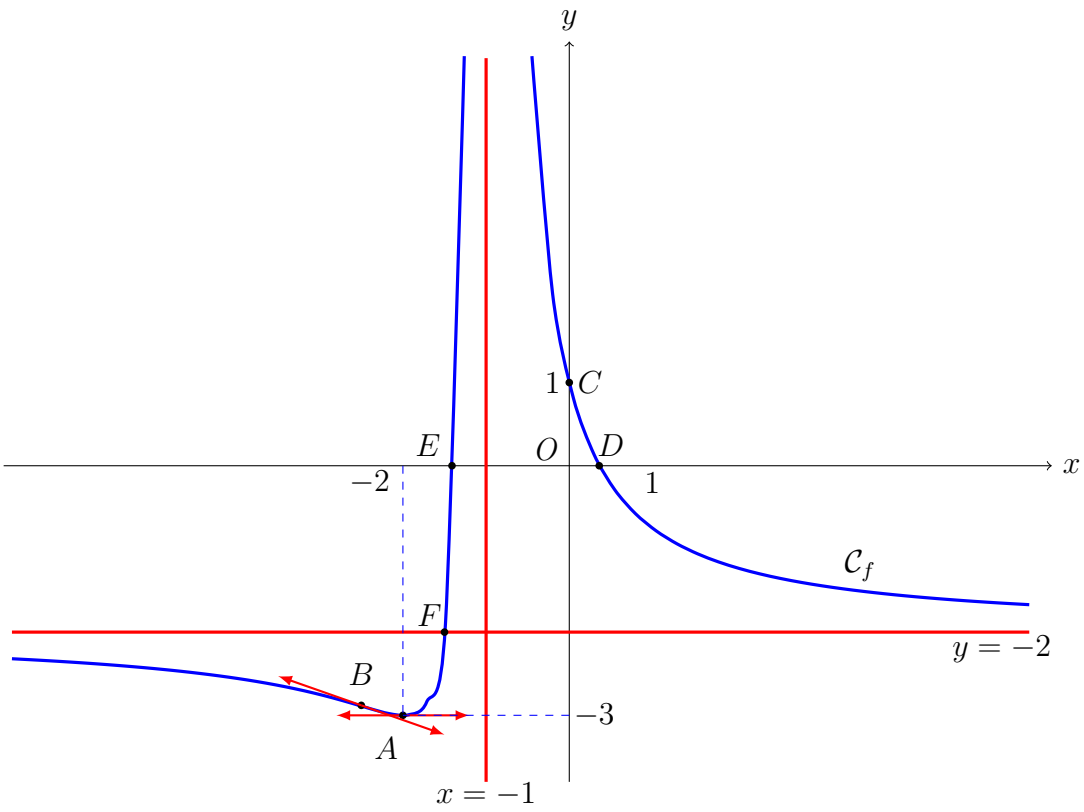
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-4x-2)(x+1)^2-2(x+1)(-2x^2-2x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-2(x+2)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-2(x+2)}{(x+1)^3}, \end{aligned}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$ *et* $f(-2)=-3$*. Comme* $(\forall x\in\mathcal{D}_f,(x+1)^4>0)$*,* f' *est du signe de* $-2(x+2)(x+1)$*, on en déduit* $f'(x)>0$*, si* $x\in]-2,-1[$*, et* $f'(x)<0$*, si* $x\in]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[$*. Le tableau de variation de* f *sur* $\mathcal{D}_f$ *est donc :*

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	-2	↘	-3	↗	‖ $+\infty$	↘	-2

• *Comme* $f'(-2)=0$*, la courbe* $\mathcal{C}_f$ *admet une tangente parallèle à l'axe* (Ox) *au point* $A(-2,-3)$ *qui correspond au minimum de* f*. La fonction* f *est deux fois dérivable sur* $\mathcal{D}_f$*, on a* $f''(x)=\dfrac{2(2x+5)}{(x+1)^4}$ *et* $f''(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{-5}{2}$.
f'' *s'annule en changeant de signe en* $x_0=\frac{-5}{2}$*, la fonction* f *est donc convexe sur* $]-\infty,\frac{-5}{2}]$ *et concave sur* $[\frac{-5}{2},-1[$ *et sur* $]-1,+\infty[$*. La courbe* $\mathcal{C}_f$ *admet un point d'inflexion* $B\left(\frac{-5}{2},f\left(\frac{-5}{2}\right)\right)$*, la tangente en ce point est la droite d'équation* $y=\frac{-2}{27}(4x+49)$.

• *La courbe* $\mathcal{C}_f$ *coupe l'axe* (Oy) *au point* $C(0,1)$ *et l'axe* (Ox) *aux points* $D(\frac{\sqrt{3}-1}{2},0)$ *et* $E(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},0)$*. La courbe* $\mathcal{C}_f$ *prend l'allure suivante*



5.10 Exercices

Exercice 37. *Etudier la dérivabilité de la fonction f en $x_0 = 0$ si :*

1. $f(x) = x^2 - |x| + 1$.
2. $f(x) = \sqrt{1 - \cos(2x)}$.
3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Exercice 38. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & si\ x \leq -2, \\ x^2 + 1, & si\ -2 < x \leq 1, \\ \dfrac{bx}{x+1}, & si\ x > 1. \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(1)$.

Exercice 39. 1). *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+1}, \quad g(x) = \frac{e^{x^2} + 1}{x - 2}, \quad h(x) = \ln(e^{2x} + e^x - 2).$$

2). *Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \ g(x) = \frac{1}{1 - x^2}, \ h(x) = e^x \sin(x), \ h(x) = \sin^2(x).$$

Exercice 40. *Appliquer la règle de L'Hôpital, pour déterminer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\cos(x)}{x^3}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin(x)}$, 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)}$, 4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos(x)}$.

Exercice 41. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :*

$$f(x)=\frac{x^2+3x+6}{x-2},$$

et sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

1. *Trouvez les réels a, b et c tels que : $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\},\quad f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.*
2. *Etudier les variations de la fonction f.*
3. *Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Quelles conclusions graphiques en tirez-vou ?.*
4. *Montrez que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f a une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ et précisez la position de $(\mathcal{D})$ par raport à $(\mathcal{C}_f)$.*
5. *Montrez que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un centre de symétrie.*
6. *Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse -2 et préciser sa position relative à $(\mathcal{C}_f)$.*
7. *Tracez soigneusement $(\mathcal{T})$, $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}_f)$.*

Exercice 42. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$, et sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.*

1. *Etudier les variations de la fonction f.*
2. *Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Quelles conclusions graphiques en tirez-vou ?.*
3. *Drésser le tableau de variation de f. Vérifier que $f([2;3])\subseteq[2;3]$.*
4. *Montrez que le point $G(0,1)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.*
5. *Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.*
6. *Tracez $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{C}_f)$.*

Chapitre 6

Fonctions élémentaires

6.1 Fonctions logarithmes et exponentielles

6.1.1 Fonction logarithme népérien

Définition 6.1.1. *On appelle logarithme népérien et on note* ln*, l'unique primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $]0, +\infty[$*, qui s'annule en* 1 $(\ln(1) = 0)$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt$.

Par definition, la fonction ln *est derivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.
On a donc, la fonction ln *est définie, continue, indéfiniment dérivable et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$*, par conséquent on obtient, pour tous réels strictement positifs a et b :*

1. $(\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b)$ *et* $(\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b)$.
2. $(0 < a \leq 1 \Leftrightarrow \ln(a) \leq 0)$ *et* $(a \geq 1 \Leftrightarrow \ln(a) \geq 0)$.

Proposition 6.1.1. 1) $\forall x, y > 0, \ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2) $\forall x, y > 0, \ \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$ *et* $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
3) $\forall n \in \mathbb{Q}, \forall x > 0, \ \ln(x^n) = n \ln(x)$.
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0^+$.
5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1} = 1$ *ou encore* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

Démonstration. 1) Si l'on fixe un nombre $y > 0$, alors la fonction $f : x \mapsto \ln(xy)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f'(x) = \dfrac{y}{yx} = \dfrac{1}{x} = \ln'(x)$.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \ln(x) + \lambda$.
En faisant $x = 1$, on a $\lambda = f(1) = \ln(y)$. D'où :

$$\forall x, y > 0,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Remarquons que cette relation s'étend par récurrence à un nombre fini quelconque de nombres positifs $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\ln(x_1 x_2 ... x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + ... + \ln(x_n).$$

2)En posant $x = \dfrac{1}{y}$ pour $y > 0$, on obtient $\ln(1) = \ln(y) + \ln\left(\dfrac{1}{y}\right)$, donc

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y).$$

Comme $\dfrac{x}{y} = x\dfrac{1}{y}$, donc, d'aprés 1) et 2)

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

3)En particulier si $x = x_1 = x_2 = ... = x_n$, on a d'aprés 1)

$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x).$$

Si $y = \sqrt[n]{x},\ x > 0$, alors $y^n = x$, d'où $n\ln(y) = \ln(x)$, donc

$$\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln(x).$$

En appliquant cette relation à $x^{\frac{p}{q}}$, p et q étant deux entiers strictement positifs, on aura

$$\ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{1}{q}\ln\left(x^p\right) = \frac{p}{q}\ln(x).$$

On a donc démontré la relation $\ln(x^r) = r\ln(x)$ pour $r = \frac{p}{q} > 0$. Le cas $r < 0$, s'y ramène en posant $r' = -r > 0$:

$$\ln\left(x^r\right) = \ln\left(\frac{1}{x^{r'}}\right) = -\ln\left(x^{r'}\right) = -r'\ln(x) = r\ln(x).$$

4)Puisque la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, celle-ci admet une limite finie ou infinie en $+\infty$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(2) = +\infty$, la limite de ln en $+\infty$ ne peut donc être que $+\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
En posant $y = \dfrac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} -\ln(y) = -\infty$.
Pour $t \geq 1$ on a ($\sqrt{t} \leq t$ *et* $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$), et pour $x \geq 1$ on a donc

$$0 \leq \int_1^x \frac{1}{t}dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt.$$

Alors, $0 \leq \ln(x) \leq 2(\sqrt{x}-1) \leq 2\sqrt{x}$, d'où $0 \leq \dfrac{\ln(x)}{x} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Le théorème des gendarmes entraîne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0^+$.

5) ln est dérivable en 1 et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$, par conséquent,

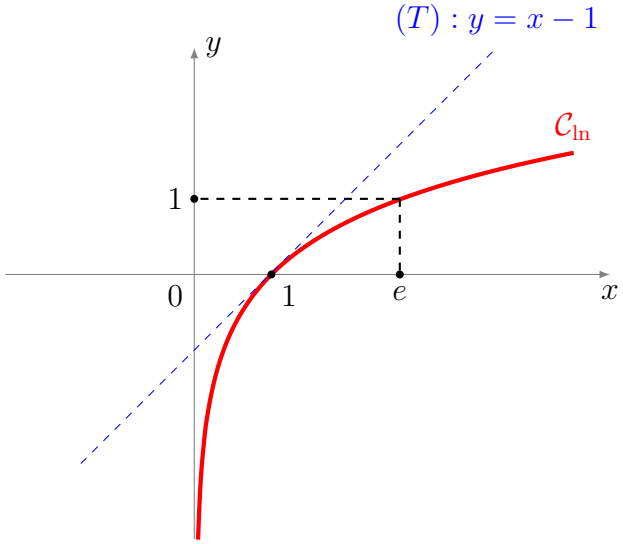
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$

La deuxième limite est une conséquence de la première qui découle, elle aussi, de la définition de la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ au point $x = 0$, s'écrit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

□

Courbe représentative :



- *La fonction* ln *réalise une bijection de* $]0,+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$.
- *Il existe une seule valeur telle* $\ln(x) = 1$, *qu'on notera* e ($\ln(e) = 1$ *et* $e \simeq 2,718$).
- *La courbe a pour tangente au point d'abscisse* $x = 1$ *la droite* (T) *:* $y = x - 1$.
- *La fonction* ln *ayant une dérivée décroissante, car* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ (*on dit qu'elle est concave*), *sa courbe representative est en dessous de sa tangente en tout point, en particulier au point* $x = 1$ *et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

Proposition 6.1.2. *Soit* u *une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle* I. *La fonction* $x \mapsto \ln[u(x)]$ *est dérivable sur* I, *et pour toux* $x \in I$, *on a :*

$$(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

6.1.2 Fonction exponentielle de base e

Définition 6.1.2. *On appelle fonction exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *la bijection réciproque de La fonction logarithme népérien* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.
On a donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y)$.
En particulier : $\exp(0) = 1$ *et* $\exp(1) = e$.

Les propriétés suivantes se déduisent de celles relatives au logarithme :
-$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x$, *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(\ln(x)) = x$.
- *La fonction* exp *est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp(x))' = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x).$$

- *Pour tous réels* x *et* y, *on a :*

$$\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y = \ln(exp(x + y)),$$

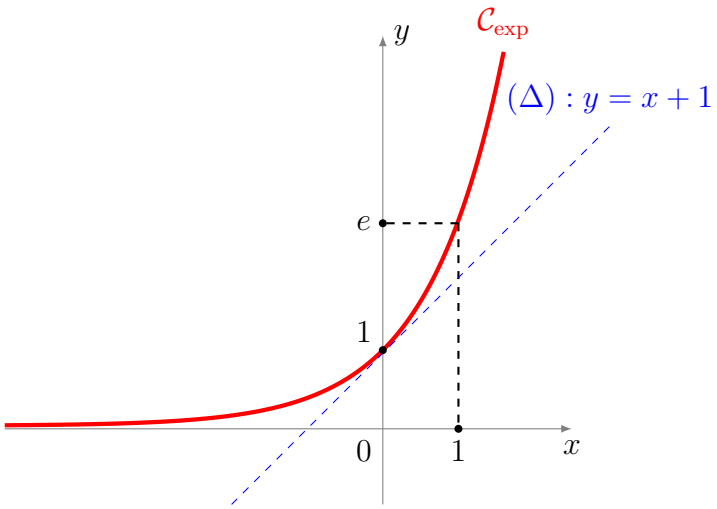
d'où, $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
On en déduit :

- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

-*Pour* $x = 1$, *on a* $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$.
On convient d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = e^x$, *La fonction* exp *est appelée exponentielle de base e. Avec cette notation, on a donc :*

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y),\ e^0 = 1$ *et* $e^1 = e$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (e^x)' = e^x > 0$ *et* $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$, *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln(x)} = x$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x e^y,\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ *et* $e^{rx} = (e^x)^r$, *pour* $r \in \mathbb{Q}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Courbe représentative *:*
- *Dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction* exp *et celle de la fonction* ln *sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*
- *La courbe a pour tangente au point d'abscisse* $x = 0$ *la droite* (Δ) *:* $y = x + 1$.



6.1.3 Fonction logarithme de base quelconque

Définition 6.1.3. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. On appelle logarithme en base a, la fonction* $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, *définie par :*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

En particulier : $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$ *et* $\log_e = \ln$.

- Les propriétés suivantes se déduisent aisément de celles du logarithme népérien :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall r \in \mathbb{Q}, \ \log_a(x^r) = r \log_a(x)$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \log_b(x) = \log_b(a). \log_a(x)$.
- *la fonction* $\log_a$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et :*

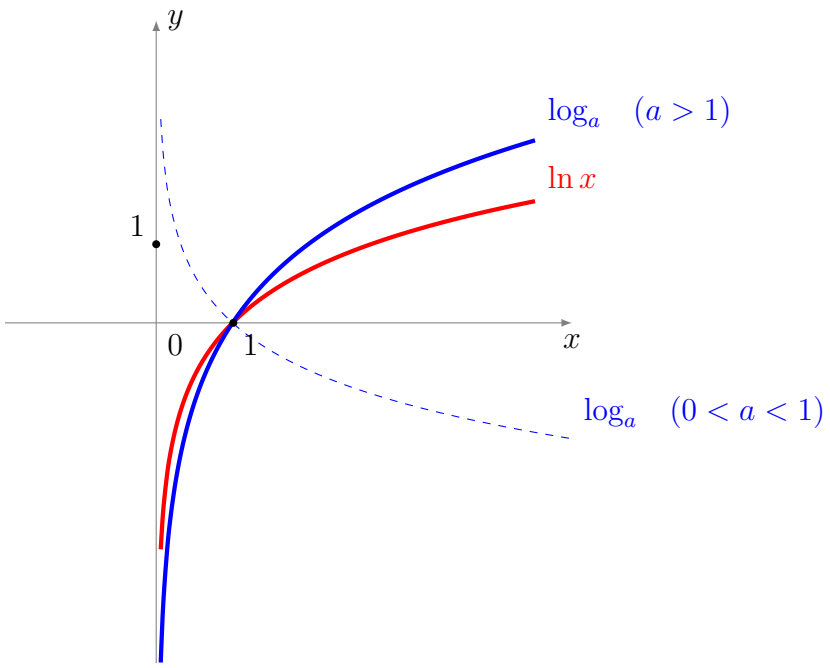
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ (\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

- Si $a > 1$, la fonction $\log_a$ *est strictement croissante, et si $0 < a < 1$, la fonction* $\log_a$ *est strictement décroissante.*

Cas particulier *(logarithme décimal)*

- Dans le cas $a = 10$, la fonction $\log_{10}$ *s'appelle fonction logarithme décimal et se note* log. *On a donc* $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, $\log(10^n) = n$, *et :*

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} \ln(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ y = \log(x) \Leftrightarrow x = 10^y$.



6.1.4 Fonction exponentielle de base quelconque

Si $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, la fonction $\log_a$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 6.1.4. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. On appelle exponentielle de base a, et on note $\exp_a$, la fonction réciproque de $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.*
On a donc,

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\log_a(\exp_a(x)) = x$, *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp_a(\log_a(x)) = x$.
- $\exp_e = \exp$, $\exp_a(0) = 1$ *et* $\exp_a(1) = a$.

Proposition 6.1.3.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \exp_a(x) = e^{x \ln(a)}.$$

Démonstration. On a : $\log_a(\exp_a(x)) = x \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(\exp_a(x))}{\ln(a)}$.
Il en résulte que $\ln(\exp_a(x)) = x \ln(a)$, et par conséquent : $\exp_a(x) = e^{x \ln(a)}$. □

- Les propriétés suivantes se déduisent aisément de celles la fonction exponentielle :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$.
- $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exp_a(-y) = \dfrac{1}{\exp_a(y)}$.

- *la fonction* $\exp_a$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp_a)'(x) = \ln(a)(\exp_a(x)).$$

Remarque 6.1.1. *Pour* $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ *et* $x \in \mathbb{Q}$, *on a :* $\ln(a^x) = x\ln(a)$ *et* $\ln(\exp_a(x)) = x\ln(a)$, *d'où* $a^x = \exp_a(x)$.

On peut donc prolonger la notation a^x *au cas* $x \in \mathbb{R}$ *par :* $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = \exp_a(x)$, *et ainsi,*

$$a^x = e^{x\ln(a)}.$$

Lorsque $a = 1$, *on a* $e^{x\ln(1)} = 1$, *et on pose donc par convention* $\forall x \in \mathbb{R} :\ 1^x = 1$.

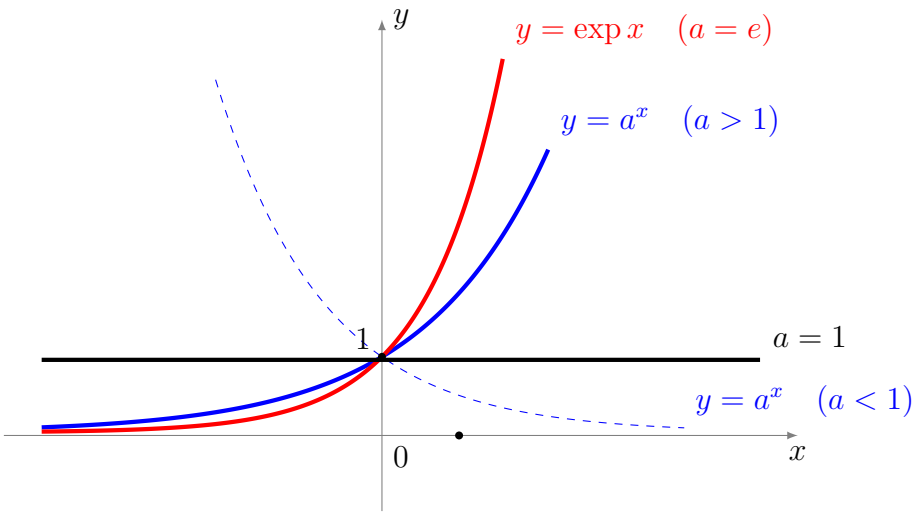
Avec la notation a^x, *on obtient :*

- $a^0 = 1,\ a^1 = a,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ a^x = e^{x\ln(a)},\ \ln(a^x) = x\ln(a)$, *et* $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\quad a^{x+y} = a^x a^y,\ a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ *et* $(a^x)^y = a^{xy}$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},\ (ab)^x = a^x b^x,\ (\dfrac{a}{b})^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp_a)'(x) = (a^x)' = \ln(a)(a^x)$.

- *La fonction* $\exp_a$ *est strictement monotone (croissante pour* $a > 1$, *et décroissante pour* $0 < a < 1$).

Courbe représentative *:*

- *Les courbes représentatives des fonctions exponentielles* $\exp_a$ *et* $\exp_{\frac{1}{a}}$ *(de bases* a *et* $\dfrac{1}{a}$*) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées* $(y'y)$.



6.1.5 Fonctions puissances

Définition 6.1.5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle puissance d'exposant α, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

-Pour $\alpha \geq 0$, on prolonge par continuité la fonction f_α en $x = 0$:

$$f_\alpha(0) = 0^\alpha = \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \lim_{x \to 0^+} e^{\alpha \ln(x)} = 0 \text{ si } \alpha > 0, \text{ et } f_0(0) = 1.$$

- La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (f_\alpha)'(x) = (x^\alpha)'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

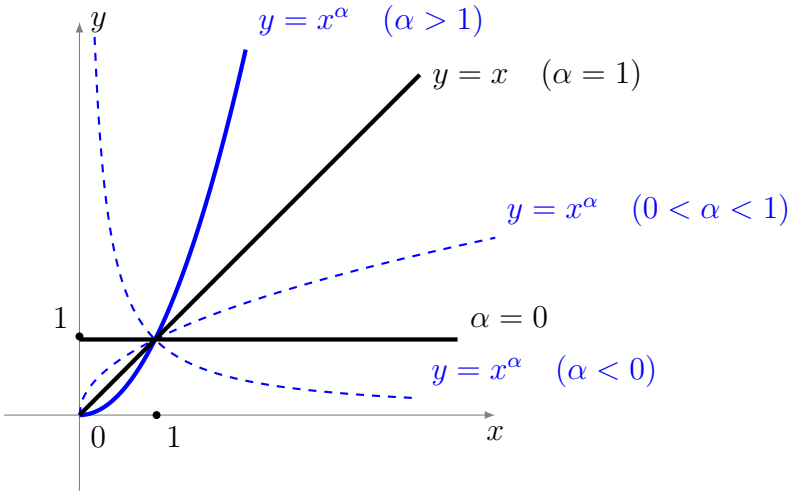
- La fonction f_α est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha = 0$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha > 0$, et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha < 0$.

Il résulte de $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (f_\alpha)''(x) = (x^\alpha)''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2}$, que la fonction f_α est convexe lorsque $\alpha \geq 1$, concave lorsque $0 \leq \alpha \leq 1$.

Proposition 6.1.4.

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0.$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \lim_{x \to 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0.$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a > 1,\ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty.$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall a > 1,\ \lim_{x \to -\infty} a^x |x|^\alpha = 0.$

Courbe représentative *:*



6.2 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

6.2.1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Définition 6.2.1. *On appelle La fonction :*

cosinus hyperbolique, notée ch, *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

sinus hyperbolique, notée sh, *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Proposition 6.2.1.

1) *Les fonction* ch, sh *sont indéfiniment dérivables dans* $\mathbb{R}$, *et l'on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x),\ \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x).$$

2) *La fonction* sh *est impaire et la fonction* ch *est paire. On a :*

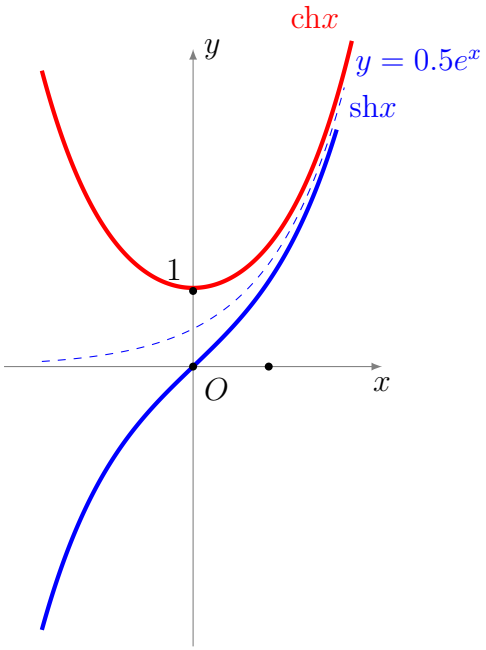
$$\operatorname{ch}(0) = 1,\ \operatorname{sh}(0) = 0,\ \textit{et}\ \forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x) > 0.$$

3) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$ch(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x,\ \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^x,\ \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$

4) *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y),$$
$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)\operatorname{ch}(x).$$



6.2.2 Fonctions tangente et cotangente hyperboliques

Définition 6.2.2. *On appelle La fonction :*

tangente hyperbolique, notée th *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\text{th}\,(x) = \frac{\text{sh}\,(x)}{\text{ch}\,(x)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

cotangente hyperbolique, notée coth *est définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :*

$$\coth\,(x) = \frac{1}{\text{th}\,(x)} = \frac{\text{ch}\,(x)}{\text{sh}\,(x)} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

Proposition 6.2.2.

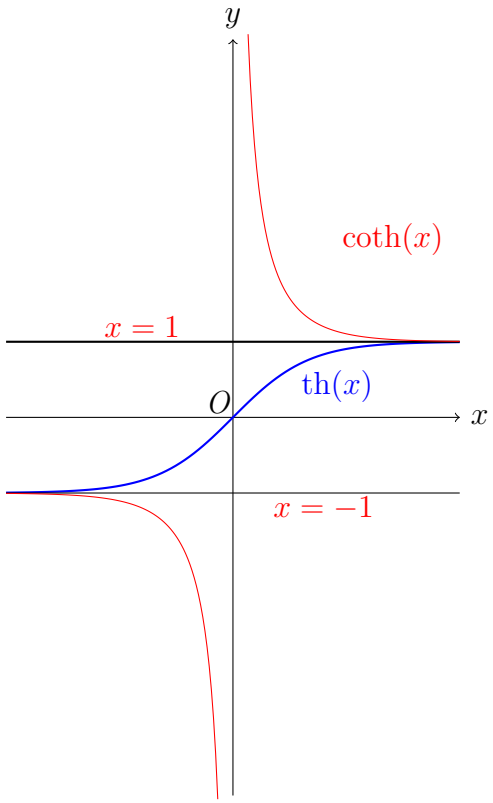
1) *Les fonction* th *et* coth *sont impaires.*

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ 1-\text{th}^2\,(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2\,(x)}.$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \text{th}\,(x+y) = \dfrac{\text{th}\,(x)+\text{th}\,(y)}{1+\text{th}\,(x)\,\text{th}\,(y)}.$

4) *Les fonction* th *et* coth *sont indéfiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^*$ *respectivement,*

$$\textit{et } \text{th}'\,(x) = \frac{1}{\text{ch}^2\,(x)} = 1-\text{th}^2\,(x)\,,\quad \coth'\,(x) = -\frac{1}{\text{sh}^2\,(x)} = 1-\coth^2\,(x)\,.$$



6.2.3 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{sh}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{sh}(x) = +\infty$. *C'est donc une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *La bijection réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et notée* Argsh. *On a :*

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (y = \text{Argsh}(x) \Leftrightarrow x = \text{sh}(y))$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{sh}\left(\text{Argsh}\left(x\right)\right) = x$ *et* $\text{Argsh}\left(\text{sh}\left(x\right)\right) = x$.

La fonction sh *étant dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{sh}^{'}\left(x\right) = \text{ch}\left(x\right) \geq 1$, Argsh *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

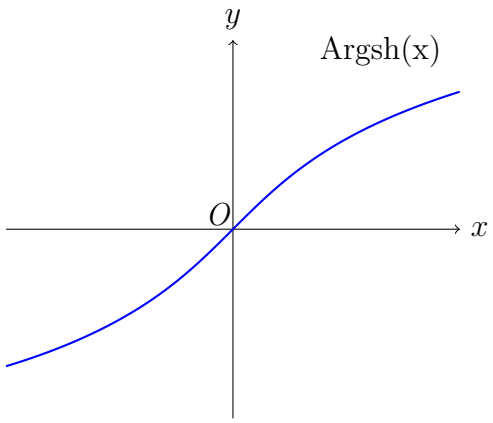
$$\left(\text{Argsh}\left(x\right)\right)^{'} = \frac{1}{\text{sh}^{'}\left(\text{Argsh}\left(x\right)\right)} = \frac{1}{\text{ch}\left(\text{Argsh}\left(x\right)\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

$$y = \text{Argsh}(x) \Leftrightarrow x = \text{sh}(y) \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^{y} - 1 = 0.$$

Comme $e^{y} > 0$, *on obtient* $e^{y} = x + \sqrt{x^2+1}$. *Ainsi :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Argsh}\left(x\right) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$



Fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\text{ch}(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$. *C'est donc une bijection de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $[1, +\infty[$. *La bijection réciproque de* $[1, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *est appelée argument cosinus hyperbolique et notée* Argch. *On a :*

$\forall (x, y) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R}_+,\ (y = \text{Argch}(x) \Leftrightarrow x = \text{ch}(y))$.

$\forall x \geq 1,\ \text{ch}\left(\text{Argch}\left(x\right)\right) = x$ *et* $\forall x \geq 0,\ \text{Argch}\left(\text{ch}\left(x\right)\right) = x$.

La fonction ch *étant dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *et que* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \text{ch}^{'}\left(x\right) = \text{sh}\left(x\right) \geq 0$, Argsh *est dérivable sur* $]1, +\infty[$ *et :*

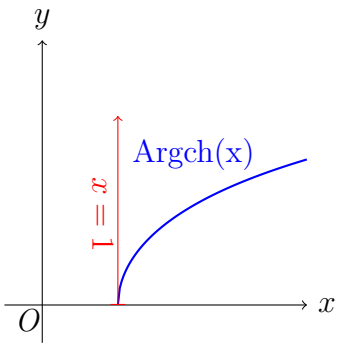
$$\forall x \in]1, +\infty[,\ \left(\text{Argch}\left(x\right)\right)^{'} = \frac{1}{\text{ch}^{'}\left(\text{Argch}\left(x\right)\right)} = \frac{1}{\text{sh}\left(\text{Argch}\left(x\right)\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[\times [0, +\infty[$, *on a :*

$$y = \text{Argch}(x) \Leftrightarrow x = \text{ch}(y) \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^{y} + 1 = 0.$$

Comme $e^y \geq 1$, *on obtient* $e^y = x + \sqrt{x^2-1}$. *Ainsi :*

$$\forall x \in [1, +\infty[, \text{Argch}\,(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$



Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction tangente hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$. *C'est donc une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-1,1[$. *L'application réciproque est appelée argument tangente hyperbolique et est notée* Argth.

On a :

$\forall (x,y) \in]-1,1[\times\mathbb{R},\ (y = \text{Argth}(x) \Leftrightarrow x = \text{th}(y))$.

$\forall \in]-1,1[,\ \text{th}\,(\text{Argth}\,(x)) = x$ *et* $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Argth}\,(\text{th}\,(x)) = x$.

La fonction th *étant dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) > 0$, Argth *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et :*

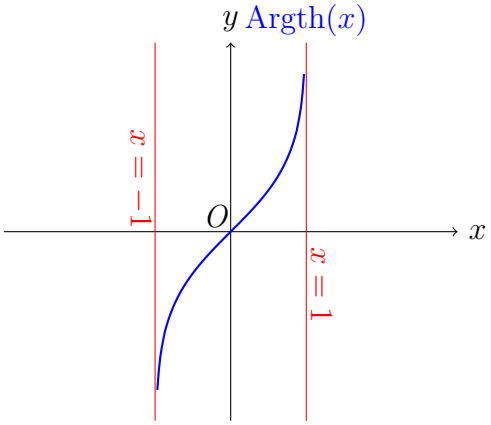
$$\forall x \in]-1,1[,\ (\text{Argth}\,(x))' = \frac{1}{\text{th}'(\text{Argth}\,(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Pour tout $(x,y) \in]-1,1[\times\mathbb{R}$, *on a :*

$$y = \text{Argth}(x) \Leftrightarrow x = \text{th}(y) \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}).$$

D'où

$$\forall x \in]-1,1[,\ \text{Argth}\,(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$



Fonction argument cotangente hyperbolique

La fonction cotangente hyperbolique est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\coth(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\coth(x)=1$, $\lim\limits_{x\to0}\coth(x)=\infty$. *C'est donc une bijection de* $\mathbb{R}^*$ *dans* $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. *L'application réciproque est appelée argument cotangente hyperbolique et est notée* Argcoth. *On a :*

$$\forall(x,y)\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\times\mathbb{R}^*,\ (y=\text{Argcoth}(x)\Leftrightarrow x=\coth(y)).$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\ [-1,1],\ \coth\left(\text{Argcoth}\left(x\right)\right)=x\ \text{ et }\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \text{Argcoth}\left(\coth\left(x\right)\right)=x.$$

La fonction coth *étant dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et que* $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \coth'(x)=-\frac{1}{\text{sh}^2(x)}<0$, Argcoth *est dérivable sur* $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ *et :*

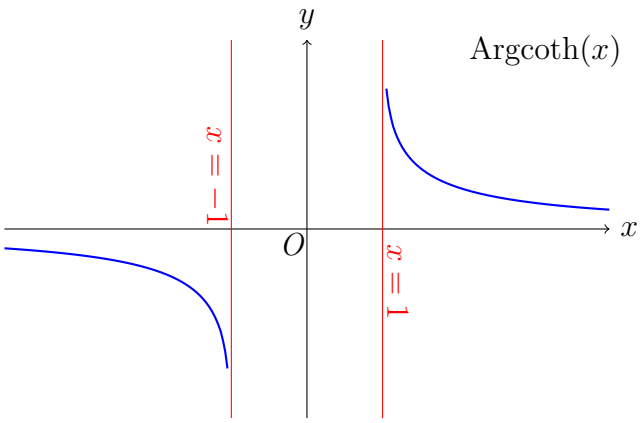
$$\forall x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ \left(\text{Argcoth}\left(x\right)\right)'=\frac{1}{\coth'\left(\text{Argcoth}\left(x\right)\right)}=\frac{1}{1-x^2}.$$

Pour tout $(x,y)\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\times\mathbb{R}^*$, *on a :*

$$y=\text{Argcoth}(x)\Leftrightarrow x=\coth(y)\Leftrightarrow e^{2y}=\frac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1}).$$

D'où

$$\forall x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ \text{Argcoth}\left(x\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$



6.3 Fonctions circulaires réciproques

6.3.1 Fonction Arc sinus

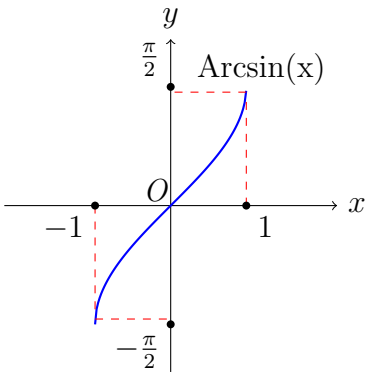
La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, *et* $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$, $\sin(\frac{\pi}{2})=1$. *C'est donc une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *dans* $[-1,1]$. *La bijection réciproque est appelée Arc sinus et est notée Arcsin. On a :*

$$\forall(x,y)\in[-1,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ (y=Arcsin(x)\Leftrightarrow x=\sin(y)).$$

$\forall x \in [-1,1],\ \sin(Arcsin(x)) = x,\ \ et\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ Arcsin(\sin(x)) = x.$

La fonction sin *étant dérivable sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *et que* $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$, *Arcsin est dérivable sur* $]-1,1[$ *et :*

$$\forall x \in]-1,1[,\ Arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(Arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(Arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



6.3.2 Fonction Arc cosinus

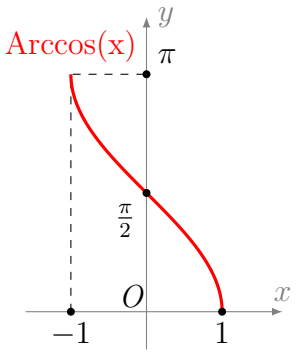
La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$, *et* $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$. *C'est donc une bijection de* $[0,\pi]$ *dans* $[-1,1]$. *La bijection réciproque est appelée Arc cosinus et est notée Arccos. On a :*

$\forall (x,y) \in [-1,1] \times [0,\pi],\ (y = Arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)).$

$\forall x \in [-1,1],\ \cos(Arccos(x)) = x,\ \ et\ \forall x \in [0,\pi],\ Arccos(\cos(x)) = x.$

La fonction cos *étant dérivable sur* $[0,\pi]$ *et que* $\forall x \in]0,\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$, *Arccos est dérivable sur* $]-1,1[$ *et :*

$$\forall x \in]-1,1[,\ Arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(Arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(Arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



6.3.3 Fonction Arc tangente

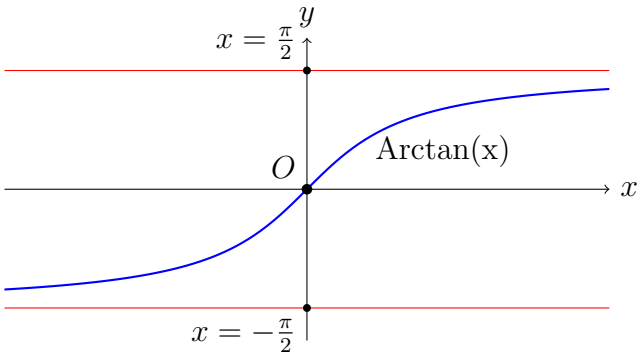
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, *et* $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)=+\infty$. *C'est donc une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *dans* $\mathbb{R}$. *La bijection réciproque est appelée Arc tangente et est notée Arctan. On a :*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ (y=\text{Arctan}(x)\Leftrightarrow x=\tan(y)).$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \tan\left(\text{Arctan}\left(x\right)\right)=x,\ \ et\ \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \text{Arctan}\left(\tan\left(x\right)\right)=x.$$

La fonction tan *étant dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *et que* $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x)=1+\tan^2(x)\neq 0$, Arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \text{Arctan}'\left(x\right)=\frac{1}{\tan'(\text{Arctan}\left(x\right))}=\frac{1}{1+x^2}.$$



Exemple 6.3.1. *Simplifions les expressions suivantes :*

1. $ch(\arg shx)$ *et* $th(\arg shx)$.

   On a $ch^2(x)-sh^2(x)=1$, *alors* $ch^2(\arg shx)=sh^2(\arg shx)+1=x^2+1$.

   Comme $ch(x)\geq 0$, *alors*

   $$ch(\arg shx)=\sqrt{x^2+1}\ \ et\ th(\arg shx)=\frac{sh(\arg shx)}{ch(\arg shx)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. $sh(2\arg shx)$.

   On a $ch^2(x)-sh^2(x)=1$, *alors* $sh^2(\arg chx)=ch^2(\arg chx)-1=x^2-1$.

   Comme $\arg ch(x)\geq 0$, *alors* $sh(\arg chx)\geq 0$. *Donc* $sh(\arg chx)=\sqrt{x^2-1}$.

3. $ch(2\arg chx)$.

   On a $ch(2x)=2ch^2(x)-1$, *alors*

   $$ch(2\arg chx)=2ch^2(\arg chx)-1=2x^2-1.$$

6.4 Exercices

Exercice 43. *Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\frac{x+3}{e^{2x}-1},\ g(x)=\frac{\ln(x-2)}{\sqrt{\ln(x)-1}},\quad h(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{1+\sin(2x)}, & si\ x>0,\\ \dfrac{x}{\ln(x+1)}, & si\ x\leq 0.\end{cases}$$

$$i(x)=\arccos(\frac{2x}{x-1}),\ j(x)=\frac{5x-1}{\sqrt{e^{2x}-3e^x+2}}.$$

Exercice 44. 1). *Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :*

$$f(x)=ch(x-1),\ g(x)=\arg sh(4x^3+3x),\ h(x)=\ln(\frac{e^x-1}{x}).$$

2). *Etudier la parité des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\arcsin(\frac{1}{sh(x)}),\ g(x)=\arg th(\frac{2x}{x^2+4}),\ h(x)=\arctan(sh(x)).$$

Exercice 45. *Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(ch(x)))$, 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-sh(x)}{ch(x)}$, 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-2ch(x)}{x-2}$, 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan(x)}{x^3}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\tanh(\frac{1}{x})$, 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ch(x)-\cos(x)}{x^2}$, 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)}$.

Exercice 46. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\ln(ch(x))+\frac{1}{2ch^2(x)},\ g(x)=ch(2x)-2sh(x),\ h(x)=arctg(th(x)).$$

$$i(x)=\frac{ch(x)}{sh^2(x)}-\ln(\coth(\tfrac{x}{2})),\ j(x)=arctg(sh(x)),\ k(x)=arcos(3sh(x)-4).$$

Exercice 47. *Donner une expression plus simple des expressions suivantes :*

1. $f(x)=\sin(\arccos(x))$, 2. $f(x)=\cos(\arcsin(x))$, 3. $f(x)=\sin(\arctan(x))$.
4. $f(x)=\arg th\sqrt{\dfrac{ch(x)-1}{ch(x)+1}}$, 5. $f(x)=\arg sh(2x\sqrt{1+x^2})$, 6. $f(x)=\arg th(\dfrac{1-x^2}{1+x^2})$.
7. $\sum_{k=0}^{k=n} ch(kx)=1+ch(x)+ch(2x)+ch(3x)+...+ch(nx),\ n\in\mathbb{N}$.
8. $\sum_{k=1}^{k=n} k\ ch(kx)=ch(x)+2ch(2x)+3ch(3x)+...+n\ ch(nx),\ n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 48. *Montrer que :*

1. $\forall x\in[-1,1],\arcsin(x)+\arcsin(-x)=0$ *et* $\arcsin(x)+\arccos(x)=\dfrac{\pi}{2}$.
2. $\forall x\in[0,1],\arcsin(x)+\arcsin(\sqrt{1-x^2})=\dfrac{\pi}{2}$.
3. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})=\dfrac{\pi}{2}$.
4. $\forall x\in\mathbb{R},\arcsin(th(x))=\arctan(sh(x))$.
5. $\prod_{k=1}^{k=n} ch(\dfrac{x}{2^k})=ch(\dfrac{x}{2}).ch(\dfrac{x}{2^2}).ch(\dfrac{x}{2^3})...ch(\dfrac{x}{2^n})=\dfrac{sh(x)}{2^n sh(\dfrac{x}{2^n})},\ n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 49. *A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que :*

1. $\forall x > 0, \dfrac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. $\forall x \geq 0, x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.
3. $\forall x > 0, \dfrac{x}{1+x^2} < \arctan(x) \leq x$.

Exercice 50. *Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :*

1. $f(x) = x + 2\ln(ch(x))$.
2. $f(x) = \arg th(\dfrac{2x}{x^2+1})$.
3. $f(x) = 1 + \dfrac{2 + sh(x)}{ch(x) - 1}$.

Exercice 51. *Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{ch(x)}\right)$, et sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.*

1. *Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.*
3. *Calculer $f'(x)$ et déterminer sur quel ensemble f est dérivable.*
4. *Drésser le tableau de variation de f, puis tracer son graphe $(\mathcal{C}_f)$.*

Bibliographie

[1] K. Allab, Eléments d'analyse, fonction d'une variable réelle, Alger, 1984.

[2] E. Azoulay, Problèmes corrigés de mthématiques - 2 éd, Paris :Dunod, 2002.

[3] C. Baba-Hamed et K. Benhabib, Analyse I : Rappel de Cours et Exercices avec Solutions, O.P.U. Alger, 1988.

[4] R.G. Bartle et D.R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, Wiley, 1992.

[5] Y. Bougrov et S. Nikolski, Cours de Mathtiques Supeures, Editions Mir, Moscou, 1983.

[6] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo et F. Boschet, Cours d'analyse, Librairie Armand Colin, Paris, 1976.

[7] A. Hitta, Cours Algèbre et Analyse 1*, Université 8 Mai 1945-Guelma,* 2008.

[8] J. Pi. Lecoutre et P. Pilibossian, Analyse Tome 1*, Elsevier Masson,* 1994.

[9] J. Pi. Lecoutre et P. Pilibossian, Analyse TD, Dunod, Paris, 2008.

[10] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudi Cours de Mathtiques, Tome 2, Edition Dunod , 1978.

[11] J.M. Monier, Analyse PCSI-PTSI, Dunod, Paris, 2003.

[12] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Tome 1, Editions Mir, Moscou, 1980.

[13] J. Rivaud, Exercices d'analyse, Tome 1*, Vuibert,* 1971.

[14] P. Thuillier et J. C. Belloc, Mathématique, Analyse 1*. Masson,* 1990.