Faculté des M. I. **Calcul Différentiel et Optimisation**

Master : I. A. D. **Corrigé Contrôle N° 1**

Exercice N° 1. (4 pts)

Soit la fonction $f(x, y) = (x^2 + y^2)\cos(xy)$

1. Justifier l'existance des dérivées partielles de f.
2. Calculer les dérivées partielles de f.

Exercice N° 1. corrigé

1. la fonction f est une somme et produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^2$ donc ses dérivées partielles existent.
2. Calculons les dérivées partielles de f :

$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xcos(xy) - y(x^2 + y^2)sin(xy) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2ycos(xy) - xy(x^2 + y^2)sin(xy) \end{cases} \tag{1}$$

Exercice N° 2. (4 pts)

Soit la fonction $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$

1. Calculer les dérivées partielles de f au point $(x; y) = (1; 2)$.
2. Calculer la différentielle de f.

Exercice N° 2. corrigé

1. Calculons les dérivées partielles de f au point $(x; y) = (1; 2)$.

$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(1;2)}{\partial x} = -2 \\ \\ \frac{\partial f(1;2)}{\partial y} = -4 \end{cases} \tag{2}$$

2. Calculons la différentielle de f.

$$df = -2xdx - 2ydy$$

Exercice N° 3. (6 pts)

Soit la fonction $f(x, y) = x^2y + 2xy^3$

1. Calculer les dérivées partielles de f au point $(x; y) = (1; 2)$.
2. Donner l'expression de la dérivée directionnelle de f au point $(x; y) = (1; 2)$ dans la direction du vecteur $u = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Exercice N° 3. corrigé

1. Calculons les dérivées partielles de f.

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2y^3 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6xy^2 \end{cases} \tag{3}$$

Les dérivées partielles de f au point $(1;2)$ seront :

$$\nabla f(1;2) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 20 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 25 \end{cases} \tag{4}$$

2. Donnons l'expression de la dérivée directionnelle de f au point $(x;y) = (1;2)$ dans la direction du vecteur $u = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}$.

La dérivée directionnelle de f au point $(1;2)$ est dans la direction du vecteur $u = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}$ est :

$$\frac{df}{ds}\,|_{u,(1;2)} = 20\frac{1}{\sqrt{10}} + 25\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{95}{\sqrt{10}}$$

Exercice N° 4. (6 pts)

Soit la fonction $f(x,y) = 100(y - x^2)^2 + (1-x)^2$

1. Calculer les points critiques de f.
2. Calculer les valeurs propres de la matrice hessienne.
3. f est-elle convexe ?
4. f possède-elle un minimum ou un maximum global ?

Exercice N° 4. corrigé

1. Calculer les points critiques de f.

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 400x^3 - 400xy + 2x - 2 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -200x^2 + 200y \end{cases} \tag{5}$$

Calcul des points critiques :

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 400x^3 - 400xy + 2x - 2 = 0 \\ \\ -200x^2 + 200y = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad x = 1\ ;\ y = x^2 \quad \Rightarrow \quad (x^*, y^*) = (1;1)$$

2. Calculer les valeurs propres de la matrice hessienne.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1200x^2 - 400y + 2 & -400x \\ -400x & 200 \end{pmatrix}$$

Pour calculer les valeurs propres de la matrice hessienne, il faut calculer le polynôme caractéristique associé à $H_f(x,y)$ au point critique $(x^*, y^*) = (1;1)$:

$$P_{H_f(x,y)} = \begin{pmatrix} 802 - \lambda & -400 \\ -400 & 200 - \lambda \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant :

$$\det\left(P_{H_f(x,y)}\right) = \det\begin{pmatrix} 802 - \lambda & -400 \\ -400 & 200 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0.4 \ ; \ \lambda_2 = 1001.5$$

3. f est-elle convexe ?
   Les valeurs propres sont strictement positives $\Rightarrow$ la matrice $H_f(1;1)$ est strictement définie positive, donc f est convexe.
4. f possède-elle un minimum ou un maximum global ?
   Le point critique vérifie les conditions suffisantes d'un minimum local strict donc $(x^*, y^*) = (1;1)$ est un minimum local unique de la fonction f donc, c'est un minimum global.