Faculté M. I. Programmation Linéaire 24-25

3 LMD S. I. Corrigé du Contrôle N°1

Exercice N° 1.

Une société produit de la peinture de quatre types P_1, P_2, P_3 **et** P_4 à partir de base M_1, M_2, M_3 **et** M_4. La demande **minimale** du type P_3 est d'au moins 2000 tonnes/mois, la production de type P_1 ne peut dépasser que de 1200 tonnes celle de type P_2, la demande **maximale** du type P_4 est d'au plus 1000 tonnes/mois.

	P_1	P_2	P_3	P_4	Qté disponible
M_1	5	4	4	5	1800
M_2	15	5	20	10	1900
M_3	12	5	7	6	1200
M_4	1	6	5	4	1500
Profit par unité	30	40	60	75	

Formuler le modèle de programmation linéaire de ce problème de fabrication qui permetterait d'obtenir un programme de production qui **maximiserait** les bénéfices ; puis donnez le problème dual.

0.0.1 Solution EXO 1

La modélisation du problème ci-dessus est :

$$(P) = \begin{cases} \max Z = 30x_1 + 40x_2 + 60x_3 + 75x_4 \\ \\ \quad 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 \quad \leq 1800 \\ \quad 15x_1 + 5x_2 + 20x_3 + 10x_4 \quad \leq 1900 \\ \quad 12x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 \quad \leq 1200 \\ \quad x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \quad \leq 1500 \\ \quad\quad x_3 \quad \geq 2000 \\ \quad x_1 - x_2 \quad \leq 1200 \\ \quad\quad x_4 \quad \leq 1000 \\ \quad\quad x_1, \quad x_2 \quad, x_3, \quad x_4 \quad \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Le modèle dual (D) de (P) est :

$$(D) = \begin{cases} \min W = 1800y_1 + 1900y_2 + 1200y_3 + 1500y_4 + 2000y_5 + 1200y_6 + 1000y_7 \\ \\ 5y_1 + 15y_2 + 12y_3 + y_4 + 0y_5 + y_6 + 0y_7 \geq 30 \\ 4y_1 + 5y_2 + 5y_3 + 6y_4 + 0y_5 - y_6 + 0y_7 \geq 40 \\ 4y_1 + 20y_2 + 7y_3 + 5y_4 + y_5 + 0y_6 + 0y_7 \geq 60 \\ 5y_1 + 10y_2 + 6y_3 + 4y_4 + 0y_5 + 0y_6 + y_7 \geq 75 \\ \quad y_1, y_2, y_3, y_4, y_6, y_7 \geq 0 \quad y_5 \leq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Exercice N° 2.

Résoudre à l'aide de la **méthode des deux phases** le modèle de (P) :

$$(P) = \begin{cases} \max Z = 12x_1 + 20x_2 \\ \quad 6x_1 + 10x_2 \geq 60 \\ \quad 8x_1 + 25x_2 \geq 200 \\ \quad 2x_1 + 8x_2 \leq 80 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

1. Calculer la solution optimale de (P).
2. Donnez les valeurs des variables d'écarts. Quelle est l'interprétation de chacune d'elles.
3. Formuler le modèle (D) du modèle primal (P).
4. Donner la solution optimale du dual (D) à partir du tableau optimal de (P).

0.0.2 Solution EXO 2

1. Calcul de la solution optimale.

- standardisation de (P).

$$(P) = \begin{cases} \max Z = 12x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \quad 6x_1 + 10x_2 - x_3 = 60 \\ \quad 8x_1 + 25x_2 - x_4 = 200 \\ \quad 2x_1 + 8x_2 + x_5 = 80 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Formons le n-uplet des varaibles hors base (v. h. b.) : qui est formé des variables de décision.

$$\texttt{v. h. b.} = (x_1, x_2)$$

Les variables hors base sont nulles : $x_1 = x_2 = 0$.
et
le n-uplet des varaibles base (v. b.) : qui est formé des variables d'écart.

$$\texttt{v. b.} = (x_3, x_4, x_5).$$

Les valeurs des v.b. sont maintenant :

$$(x_3, x_4, x_5) = (-60, -200, 80).$$

La solution de notre système est :

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, -60, -200, 80).$$

Ce n'est pas une solution de base réalisable (S.B.R.).

Introduisons les variables artificielles pour espérer trouver une S.B.R. initiale avec laquelle démarrer l'algorithme du simplexe. Nous obenons système d'équations suivant :

$$(P) = \begin{cases} \max Z = 12x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + x_7 \\ \quad 6x_1 + 10x_2 - x_3 + x_6 = 60 \\ \quad 8x_1 + 25x_2 - x_4 + x_7 = 200 \\ \quad 2x_1 + 8x_2 + x_5 = 80 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

- Appliquons la méthode des deux phases.
  Pour celà, nous allons minimiser la somme des variables artificielles sous les mêmes contraintes que celle du problème standardisé.

$$(P^a) = \begin{cases} \min Z^a = x_6 + x_7 \\ \quad 6x_1 + 10x_2 - x_3 + x_6 = 60 \\ \quad 8x_1 + 25x_2 - x_4 + x_7 = 200 \\ \quad 2x_1 + 8x_2 + x_5 = 80 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

- Phase I : **Tableau 1** :

	C_j^a	0	0	0	0	0	1	1	Sol
$\mathbf{C}_B^a$	**v. b.**	x_1	$\swarrow x_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	de base
1	$x_6 \nearrow$	6	10	-1	0	0	1	0	60
1	x_7	8	25	0	-1	0	0	1	200
0	x_5	2	8	0	0	1	0	0	80
	Z_j^a	14	35	0	-1	0	1	1	
	$\mathbf{C}_j^a - \mathbf{Z}_j^a$	-14	-35	0	1	0	0	0	$\mathbf{Z}^a$**=260**

Phase I Tableau 2 :

	C_j^a	0	0	0	0	0	1	Sol
$\mathbf{C}_B^a$	**v. b.**	x_1	x_2	$\swarrow x_3$	x_4	x_5	x_7	de base
0	x_2	0.6	1	-0.1	0	0	0	6
1	$x_7 \nearrow$	-7	0	2.5	-1	0	1	50
0	x_5	2.8	0	0.8	0	1	0	32
	Z_j^a	-7	0	2.5	-1	0	1	
	$\mathbf{C}_j^a - \mathbf{Z}_j^a$	7	0	-2.5	1	0	0	$\mathbf{Z}^a$**=50**

Phase I Tableau 3 :

	C_j^a	0	0	0	0	0	Sol
$\mathbf{C}_B^a$	**v. b.**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	de base
0	x_2	$\frac{8}{25}$	1	0	$\frac{-1}{25}$	0	8
0	x_3	$\frac{-14}{25}$	0	1	$\frac{-2}{5}$	0	20
0	x_5	$\frac{-294}{125}$	0	0	$\frac{1}{125}$	1	16
	Z_j^a	0	0	0	0	0	
	$\mathbf{C}_j^a - \mathbf{Z}_j^a$	0	0	0	0	0	$\mathbf{Z}^a$**=0**

La phase I est terminée avec aucune variable artificielle dans la base. Commençons la phase 2.

Phase II Tableau 1 :

	C_j	12	20	0	0	0	Sol
$\mathbf{C}_B$	**v. b.**	$\swarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	de base
20	$x_2 \nearrow$	$\frac{8}{25}$	1	0	$\frac{-1}{25}$	0	8
0	x_3	$\frac{-14}{25}$	0	1	$\frac{-2}{5}$	0	20
0	x_5	$\frac{-294}{125}$	0	0	$\frac{1}{125}$	1	16
	Z_j	$\frac{32}{5}$	20	0	$\frac{-4}{5}$	0	
	$\mathbf{C}_j - \mathbf{Z}_j$	$\frac{28}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	0	**Z=160**

Phase II Tableau 2 :

	C_j	12	20	0	0	0	Sol
$\mathbf{C}_B$	**v. b.**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	de base
12	x_1	1	$\frac{25}{8}$	0	$\frac{-1}{8}$	0	25
0	x_3	0	$\frac{35}{4}$	1	$\frac{-3}{4}$	0	90
0	x_5	0	$\frac{7}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	30
	Z_j	12	$\frac{75}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$	0	
	$\mathbf{C}_j - \mathbf{Z}_j$	0	$\frac{-35}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	**Z=300**

Phase II Tableau 3 :

	C_j	12	20	0	0	0	Sol
$\mathbf{C}_B$	**v. b.**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	de base
12	x_1	1	4	0	0	$\frac{1}{2}$	40
0	x_3	0	14	1	0	3	180
0	x_4	0	7	0	1	4	120
	Z_j	12	48	0	0	6	
	$\mathbf{C}_j - \mathbf{Z}_j$	0	-28	0	0	-6	**Z=480**

2. Tous les $C_j - Z_j$ sont négatifs ou nulles, donc le tableau actuel est optimal.
   $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (40, 0, 180, 120, 0)$
   $Z^* = 480.$
   Les variables d'écart sont $x_3, x_4 et x_5$

   Leur valeurs respectives sont $(x_3, x_4, x_5) = (180, 120, 0)$

   Les variables d'écart x_3 et x_4 sont des variables d'excédent.

   La variable $x_5 = 0$ signifie que la ressource b_5 est entièrement consommée.

3. La solution optimale est unique car la seule variable hors base x_2 est nulle.
4. La formulation du problème dual est :

$$(D) = \begin{cases} \min W = 60y_1 + 200y_2 + 80y_3 \\ \quad 6y_1 + 8y_2 + 2y_3 \geq 12 \\ \quad 10y_1 + 25y_2 + 8y_3 \geq 20 \\ \quad y_1, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

5. la solution optimale du dual à partir du tableau optimal du primal :
   Les valeurs des variables de décision duales sont de la forme :

$$y_1 = -z_1 = 0, \quad y_2 = -z_2 = 0, \quad y_3 = -z_3 = -6$$

$$D^* = -(-6) * 80 = 480 = Z^*$$