Université Ibn Khaldoun – Tiaret *Département de l'Informatique*
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique *Module : Algèbre 01 (1ère Année LMD 2024-2025)*
Durée : 1h 30m

Examen de Rattrapage

EXERCICE 01 (06 pts) :

1) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer par contraposée que $(x \neq 3 \;\; et \;\; y \neq 3) \Longrightarrow (3x + 3y - xy - 3 \neq 6)$.

2) Montrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N} : \; \frac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par disjonction des cas que $n^2 + n + 1$ est impair.

EXERCICE 02 (07,5 pts) :

Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1) Déterminer $f\left(\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}\right)$, $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}\right)$.

2) f est-elle injective ? est-elle surjective ? justifier.

3) Montrer que la restriction $g : [-1,0] \longrightarrow [0,1]$, $g(x) = f(x)$ est bijective.

4) Déterminer l'application réciproque g^{-1}.

EXERCICE 03 (06,5 pts) :

Soit $\mathbb{S}$ une relation binaire définie sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 : \quad (x, y) \, \mathbb{S} \, (x', y') \Leftrightarrow (\, x - x' = 0 \quad \text{et} \quad y' \leq y \,).$$

1) Les propositions suivantes sont-elles vraies ? justifier.

$(3\,,5)\,\mathbb{S}\,(3\,,4)$, $(-1\,,2)\,\mathbb{S}\,(1\,,-2)$ $\;\; et \;\;$ $(1\,,-2)\,\mathbb{S}\,(-1\,,2)$

2) Montrer que $\mathbb{S}$ est une relation d'ordre.

3) L'ordre est-il total ?

Bon courage

Algèbre 01 ($1^{\text{ère}}$ Année LMD 2024-2025)

Corrigé du Rattrapage

EXERCICE 01 (06pts) :

1) Pour montrer par contraposée que : $(x \neq 3 \quad et \quad y \neq 3) \Longrightarrow (3x + 3y - xy - 3 \neq 6)$, il faut montrer que $(3x + 3y - xy - 3 = 6) \Longrightarrow (x = 3 \quad ou \quad y = 3)$.

En effet : $3x + 3y - xy - 3 = 6 \Longrightarrow x(3 - y) + 3y - 9 = 0$

$$\Longrightarrow x(3 - y) - 3(3 - y) = 0$$

$$\Longrightarrow (x - 3)(3 - y) = 0$$

$$\Longrightarrow (x - 3 = 0 \quad ou \quad 3 - y = 0)$$

$$\Longrightarrow (x = 3 \quad ou \quad y = 3)$$ ....(2pts)

2) Supposons que $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{4n+3}{6} \in \mathbb{N}$ c-à-d $\exists n, m \in \mathbb{N} : m = \frac{4n+3}{6}$, donc $6m = 4n + 3$ alors $2(3m - 2n) = 3$, d'où 3 est pair , ce qui est absurde.

Par suite, on a : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$ . ...(2pts)

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $n^2 + n + 1$ est impair.

1^er cas : Si $n = 2k, \; avec \; k \in \mathbb{N},$ alors $n^2 + n + 1 = (2k)^2 + 2k + 1 = 4k^2 + 2k + 1$

$= 2(2k^2 + k) + 1$, qui est impair.

2^ème cas : Si $n = 2k + 1, \; avec \; k \in \mathbb{N},$ alors $n^2 + n + 1 = (2k + 1)^2 + (2k + 1) + 1 = 4k^2 + 6k + 3$

$= 2(2k^2 + 3k + 1) + 1$, qui est impair.

Par suite, dans tous les cas $n^2 + n + 1$ est impair. ....(2pts)

EXERCICE 02 (07,5 pts) :

1.1) On a : $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}}$ et $f(1) = 0$.

Alors $f\left(\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}\right) = \left\{\sqrt{\frac{3}{4}}, 0\right\}$. ....(1pt)

1.2) On a : $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(x = -\sqrt{\frac{3}{4}} \quad ou \quad x = \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$.

$f(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 2 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = -3$, qui n'a pas de solution réelle.

Alors $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}\right) = \left\{-\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right\}$. ....(1pt)

2) D'après *1.1)* , on a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $-\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ donc f n'est pas injective. ....(1pt)

D'après *1.2)* , on a $y = 2$ n'a pas d'antécédent, alors f n'est pas surjective. ....(1pt)

3.1) Soient $x, x' \in [-1,0]$, on a :

$$g(x) = g(x') \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x'^2} \Leftrightarrow x^2 = x'^2$$
$$\Leftrightarrow x = x' \text{ , car } x, x' \text{ sont de même signe.}$$

Alors g est injective. ………………………………………………………………… …*(1pt)*

3.2) Soit $y \in [0,1]$, cherchons $x \in [-1,0]$ tel que $y = g(x)$, on a :

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow \left(x = -\sqrt{1-y^2} \quad ou \quad x = \sqrt{1-y^2}\right).$$

Il suffit de prendre $x = -\sqrt{1-y^2}$, car :

$$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -y^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sqrt{1-y^2} \leq 0.$$

Par suite g est surjective. ……………………………………………………………*(1.5pt)*

On conclut que g est bijective.

3.3) D'après ce qui précède g^{-1} existe et bijective et on a :

$g^{-1} : [0,1] \longrightarrow [-1,0]$ avec $g^{-1}(y) = x = -\sqrt{1-y^2}$. ……………………………*(1pt)*

EXERCICE 03 (06,5 pts) :

1) On a : $(3 - 3 = 0 \quad \text{et} \quad 4 \leq 5)$ est vraie c-à-d $(3,5) \, \mathbb{S} \, (3,4)$ est vraie. ……………*(0.5pt)*

$(-1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad -2 \leq 2)$ est fausse c-à-d $(-1,2) \, \mathbb{S} \, (1,-2)$ est fausse. ………*(0.5pt)*

$(1 - (-1) = 0 \quad \text{et} \quad 2 \leq -2)$ est fausse c-à-d $(1,-2) \, \mathbb{S} \, (-1,2)$ est fausse. ………*(0.5pt)*

2.1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $(x - x = 0 \quad \text{et} \quad y \leq y)$ c-à-d $(x,y) \, \mathbb{S} \, (x,y)$.

Alors $\mathbb{S}$ est réflexive. ………………………………………………………………*(1pt)*

2.2) Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
[(x,y) \, \mathbb{S} \, (x',y') \text{ et } (x',y') \, \mathbb{S} \, (x,y)] &\Rightarrow [\,(x - x' = 0 \text{ et } y' \leq y) \text{ et } (x' - x = 0 \text{ et } y \leq y')\,] \\
&\Rightarrow (\, x - x' = 0 \text{ et } x' - x = 0 \text{ et } y' \leq y \text{ et } y \leq y'\,) \\
&\Rightarrow (\, x = x' \text{ et } y = y'\,) \\
&\Rightarrow (x,y) = (x',y')
\end{aligned}$$

Alors $\mathbb{S}$ est antisymétrique. ……………………………………………………………*(1.5pt)*

2.3) Soient $(x,y)\, , (x',y')\, , (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
[(x,y) \, \mathbb{S} \, (x',y') \text{ et } (x',y') \, \mathbb{S} \, (x'',y'')\,] &\Rightarrow [\,(x - x' = 0 \text{ et } y' \leq y) \text{ et } (x' - x'' = 0 \text{ et } y'' \leq y')\,] \\
&\Rightarrow (\, x - x' = 0 \text{ et } x' - x'' = 0 \text{ et } y' \leq y \text{ et } y'' \leq y'\,) \\
&\Rightarrow [\,(x - x') + (\, x' - x'') = 0 \text{ et } y'' \leq y\,] \\
&\Rightarrow (\, x - x'' = 0 \text{ et } y'' \leq y\,) \\
&\Rightarrow (x\,,y) \, \mathbb{S} \, (x'',y'').
\end{aligned}$$

Alors $\mathbb{S}$ est transitive. ……………………………………………………………*(1.5pt)*

On conclut que $\mathbb{S}$ est une relation d'ordre.

3) D'après *1)* on a $\overline{(-1,2) \, \mathbb{S} \, (1,-2)}$ et $\overline{(1,-2) \, \mathbb{S} \, (-1,2)}$.

Alors l'ordre est partiel. ……………………………………………………………*(1pt)*