

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Master : GL 1 et RT 1

Mathématiques Appliquées

Examen Final 1 : 30

Exercice 1. (4 pts).

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = xy - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4$

1. Donner le domaine de définition D_f de f . D_f est-il un ensemble convexe ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Pour chaque point critique P , écrire la matrice hessienne de f en P et déterminer, en le justifiant, la nature du point P .

Corrigé de l'exercice 1. .

1. Le domaine de définition D_f de f .
 $D_f = \mathbb{R}^2$.

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0, 1]$
Considérons la combinaison convexe

$$\begin{aligned} z &= \lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda(x_1, x_2) + (1 - \lambda)(y_1, y_2) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2) + ((1 - \lambda)y_1, (1 - \lambda)y_2) \\ &= (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2) \end{aligned}$$

Or

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$
donc, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 \in \mathbb{R}$ de même, $\lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2 \in \mathbb{R}$

et finalement $Z = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2) \in \mathbb{R}^2$.

D'où $D_f = \mathbb{R}^2$ est un ensemble convexe.

2. Déterminons les points critiques de f .

$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -x^3 + y \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x - y^3 \end{cases} \quad (1)$$

Les deux dérivées partielles sont définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -x^3 + y = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3 = x^9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x - x^9 = x(x^8 - 1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Les points critiques sont : $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$ et $P_3 = (-1, -1)$.
La matrice de f est :

3. Pour chaque point critique P , écrire la matrice hessienne de f en P et déterminer, en le justifiant, la nature du point P .

$$H_f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial^2 y} \end{cases} = \begin{cases} -3x^2 & 1 \\ 1 & -3y^2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\Delta = B^2 - AC = 1 - 9x^2y^2$$

- Pour $P_1 = (0, 0)$, nous avons $\Delta = 1 > 0$ donc $(0; 0; f(0; 0))$ est un point selle.
- Pour $P_2 = (-1, -1)$, nous avons $\Delta = -8 < 0$ et $A = -3 < 0$ donc $(-1; -1; f(-1; -1))$ est un maximum local.
- Pour $P_3 = (1, 1)$, nous avons $\Delta = -8 < 0$ et $A = -3 < 0$ donc $(1; 1; f(1; 1))$ est un maximum local.

Exercice 2. (8 pts).

Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\bar{x} = \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$.
2. Calculer les trois premiers itérés donnés par l'algorithme descente de gradient à pas optimal (GPOP), en partant du point $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0) = (2, 3)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Initialisation : } x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \\ \textbf{Itération : } x^{(k)} \text{ connu, } (k \geq 0) \\ \quad \text{on calcule } w^k = -\nabla f(x^{(k)}) \\ \quad \text{on choisit } \alpha_k \geq 0 \text{ tel que} \\ \quad \quad f(x^{(k)} + \alpha_k w^{(k)}) \leq f(x^{(k)} + \alpha w^{(k)}) \quad \forall \alpha > 0. \\ \quad \text{on pose } x^{(k+1)} = (x^{(k)} + \alpha_k w^{(k)}). \end{array} \right. \quad (4)$$

Corrigé de l'exercice 2.

1. Montrer qu'il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\bar{x} = \min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$.
2. **Première itération :**

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 8x_1, -4x_2 = 4 \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -4x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \quad \nabla f(x^0) = \begin{cases} 4 \\ 4 \end{cases} \quad (5)$$

d'où :

$$x^1 = x^0 - \alpha \nabla f(x^0) = (2, 3)^t - \alpha(4, 4)^t = (2 - 4\alpha, 3 - 4\alpha)^t$$

donc,

$$g(\alpha) = f(x^0 - \alpha \nabla f(x^0)) = 4(2 - 4\alpha)^2 - 4(2 - 4\alpha)(3 - 4\alpha) + 2(3 - 4\alpha)^2 = 32\alpha^2 - 32\alpha + 10$$

Calculons la dérivée de la fonction g .

$$g'(\alpha) = 32(2\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1/2$$

on a donc :

$$x^1 = x^0 - \alpha \nabla f(x^0) = (2, 3) - (2, 2) = (0, 1).$$

Deuxième itération :

$$\nabla f(x^1) = \begin{cases} -4 \\ 4 \end{cases} \quad (6)$$

d'où :

$$x^2 = x^1 - \alpha \nabla f(x^1) = (0, 1)^t - \alpha(-4, 4)^t = (4\alpha, 1 - 4\alpha)^t$$

donc,

$$g(\alpha) = f(x^1 - \alpha \nabla f(x^1)) = 4(4\alpha)^2 - 4(4\alpha)(1 - 4\alpha) + 2(1 - 4\alpha)^2 = 160\alpha^2 - 32\alpha + 2$$

Calculons la dérivée de la fonction g .

$$g'(\alpha) = 32(10\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.1$$

on a donc :

$$x^2 = x^1 - \alpha \nabla f(x^1) = (0, 1) + (0.4, -0.4) = (0.4, 0.6).$$

Troisième itération :

$$\nabla f(x^2) = \begin{cases} 4/5 \\ 4/5 \end{cases} \quad (7)$$

d'où :

$$x^3 = x^2 - \alpha \nabla f(x^2) = (2/5, 3/5)^t - \alpha(4/5, 4/5)^t = (2/5 - 4/5\alpha, 3/5 - 4/5\alpha)^t$$

donc,

$$g(\alpha) = f(x^2 - \alpha \nabla f(x^2)) = 4(2/5\alpha - 4/5\alpha)^2 - 4(2/5 - 4/5\alpha)(3/5 - 4/5\alpha) + 2(3/5 - 4/5\alpha)^2 = 32/25\alpha^2 - 32/25\alpha + 2$$

La valeur du troisième itéré est :

$$x^3 = (0, 1/5)$$

Nous avons bien une décroissance de la fonction f avec cet algorithme :

$$\begin{aligned} f(x^0) &= 10 & f(x^1) &= 2 \\ f(x^2) &= 2/5 & f(x^3) &= 2/25 \end{aligned}$$

Exercice 3. (8 pts).

Soit le problème d'optimisation avec contraintes d'égalité suivant :

$$(P) = \begin{cases} \max f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x + 2y \\ \text{s.c.} & -x + y \leq 3 \\ & x - y \leq 6 \\ & x + 2y \leq 12 \\ & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (8)$$

1. Soit le point $(x, y) = (2, 5)$. Vérifie-t-il les conditions de KKT. Que peut-on conclure.
2. Soit le point $(x, y) = (8, 2)$. Vérifie-t-il les conditions de KKT. Quelle est votre conclusion.

Il sera tenu compte de la présentation.

Corrigé de l'exercice 3.

Mettons notre problème sous la forme :

$$\begin{aligned} \min f(x, y) &= -(x^2 + 3y^2 + x + 2y) \\ \text{s.c.} \quad g_1(x, y) &= -x + y \leq 3 \\ g_2(x, y) &= x - y \leq 6 \\ g_3(x, y) &= x + 2y \leq 12 \\ (x, y) &\in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

La fonction de Lagrange associée au problème (P) est :

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = f(x, y) + \lambda_1 g_1(x, y) + \lambda_2 g_2(x, y) + \lambda_3 g_3(x, y)$$

1. Pour le point $(x, y) = (2, 5)$. Appliquons les conditions KKT.

$$\nabla L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} \frac{\partial L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x} = -2x - 1 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial y} = -6y - 2 + \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_1} = -x + y - 3 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_2} = x - y - 6 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_3} = x + 2y - 12 \end{cases} \quad (10)$$

Vérifie-t-il les conditions de KKT.

Que peut-on conclure.

2. Soit le point $(x, y) = (8, 2)$. Vérifie-t-il les conditions de KKT.
Quelle est votre conclusion.