Université Ibn Khaldoun – Tiaret
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département d'Informatique
Module : Algèbre 01 (1ère Année LMD 2024-2025)
Durée : 1 h 30 mn

Examen Final

EXERCICE 01 (06 pts) :

1) Soit $a, b \in [2, +\infty[$. Montrer par contraposée que $a \neq b \implies \sqrt{1-\frac{4}{a^2}} \neq \sqrt{1-\frac{4}{b^2}}$.

2) Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, tels que $2xy + x^2 + 5y^2 = 16$, montrer par l'absurde que $x \neq y$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par disjonction des cas que $n^2 + 3n + 2024$ est pair.

EXERCICE 02 (08pts) :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 2$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x-1) = f(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 1$.
3. f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
4. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) - \frac{7}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$. En déduire que $f(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$.
5. Montrer que l'application $h : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\longrightarrow \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$ définie par $h(x) = f(x)$ est bijective, puis déterminer sa réciproque h^{-1}.

EXERCICE 03 (06pts) :

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par :

$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2$: $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a - c = b - d$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de $(1,1)$ *et* $(2,0)$.

Bon courage

Algèbre 01 ($1^{\text{ère}}$ Année LMD 2024-2025)

Corrigé de l'Examen final

EXERCICE 01 (06 pts) :

1) Soit $a, b \in [2, +\infty[$. Pour montrer par contraposée que : $\left(a \neq b \Longrightarrow \sqrt{1-\frac{4}{a^2}} \neq \sqrt{1-\frac{4}{b^2}}\right)$,

Il suffit de montrer que : $\left(\sqrt{1-\frac{4}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{4}{b^2}} \Longrightarrow a = b\right)$. On a :

$$\left(\sqrt{1-\frac{4}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{4}{b^2}}\right) \Longrightarrow \left(1-\frac{4}{a^2} = 1-\frac{4}{b^2}\right) \Longrightarrow \left(\frac{4}{a^2} = \frac{4}{b^2}\right) \Longrightarrow (a^2 = b^2) \Longrightarrow (a = b \quad ou \quad a = -b)$$

$$\Longrightarrow a = b\,,\ car\ a, b \in [2, +\infty[.$$

Par suite $a \neq b \Longrightarrow \sqrt{1-\frac{4}{a^2}} \neq \sqrt{1-\frac{4}{b^2}}$...(2pts)

2) Soit $x, y \in \mathbb{Q}$, tels que $2xy + x^2 + 5y^2 = 16$. Supposons que $x = y$, alors : ....(0.5pt)

$2xy + x^2 + 5y^2 = 2x^2 + x^2 + 5x^2 = 8x^2 = 16$, donc $x^2 = 2$ d'où $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$,

ce qui est absurde car $x \in \mathbb{Q}$.

Par suite $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $(2xy + x^2 + 5y^2 = 16) \Longrightarrow (x \neq y)$. ....(1.5pt)

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

1er cas : Si $n = 2k,\ avec\ k \in \mathbb{N}$ alors $n^2 + 3n + 2024 = (2k)^2 + 3(2k) + 2024 = 4k^2 + 6\text{k} + 2024$

$= 2(2k^2 + 3k + 1012)$, qui est pair.

2ème cas : Si $n = 2k+1, avec\ \ k \in \mathbb{N}$ alors :

$$n^2 + 3n + 2024 = (2k+1)^2 + 3(2k+1) + 2024 = 4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 + 2024$$

$$= 4k^2 + 10k + 2028 = 2(2k^2 + 5k + 1014)\text{, qui est pair.}$$

Par suite, dans tous les cas $n^2 + 3n + 2024$ est pair...(2pts)

Exercice 02 (08pts):

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$f(-x-1) = (-x-1)^2 + (-x-1) + 2 = x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 2 = x^2 + x + 2 = f(x)$. ....(1pt)

2) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$.

On a $\Delta = -3 < 0$, donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solutions réelles. ....(1pt)

3) D'après 1), on a : $f(0) = 2 = f(-1)$ et $0 \neq -1$ donc f n'est pas injective.........................(1pt)

D'après 2), on a : $y = 1$ n'a pas d'antécédent, alors f n'est pas surjective. ....(1pt)

4.1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) - \frac{7}{4} = x^2 + x + 2 - \frac{7}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \text{………………….(0,5pt)}$$

4.2) D'après ce qui précède, on a : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) - \frac{7}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \frac{7}{4}$,

ce qui entraine $f(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$. ……………………………………………………………………………….(0.5pt)

5.1) Soient $x, x' \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) = h(x') &\Longrightarrow x^2 + x + 2 = x'^2 + x' + 2 \\ &\Longrightarrow x^2 - x'^2 + x - x' = 0 \\ &\Longrightarrow (x - x')(x + x') + (x - x') = 0 \\ &\Longrightarrow (x - x')(x + x' + 1) = 0 \\ &\Longrightarrow (x - x' = 0 \quad \text{ou} \quad x + x' + 1 = 0) \\ &\Longrightarrow \left(x = x' \quad \text{ou} \quad x = x' = -\frac{1}{2}\right) \ , \ \text{car} \quad x, x' \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[. \end{aligned}$$

Alors h est injective. ……………………………………………………………………………………..(1pt)

5.2) Soit $y \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$, cherchons $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, tel que $y = h(x)$, on a :

$y = h(x) \Leftrightarrow y = x^2 + x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 - y = 0.$

$x^2 + x + 2 - y = 0$ est une équation de second degré, son discriminant $\Delta = 1 - 4(2 - y) = 4y - 7$

Puisque $y \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$ alors $\Delta \geq 0$, donc on a deux solutions :

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{4y-7}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{4y-7}}{2}$.

Pour $y = \frac{7}{4}$, on a $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$.

Pour $y > \frac{7}{4}$, on a $\sqrt{4y-7} > 0$ donc $-1 + \sqrt{4y-7} > -1$ et $-1 - \sqrt{4y-7} < -1$

d'où $\frac{-1+\sqrt{4y-7}}{2} > -\frac{1}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{4y-7}}{2} < -\frac{1}{2}$.

Alors il suffit de prendre $x = \frac{-1+\sqrt{4y-7}}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, pour avoir $y = h(x)$.

Par suite h est surjective. ………………………………………………………………………………..(1pt)

On conclut que h est bijective.

5.3) Puisque h est bijective alors h^{-1} existe et bijective et on a :

$h^{-1} : \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[\longrightarrow \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ telle que $h^{-1}(y) = x = \frac{-1+\sqrt{4y-7}}{2}$……………………………….(1pt)

EXERCICE 03 (06pts):

1.1) Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on a : $a - a = 0 = b - b$, c-à-d : $(a, b) \mathcal{R} (a, b)$.

Alors $\mathcal{R}$ est réflexive. ……………………………………………………………………………….(1pt)

1.2) Soient $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned}(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) &\Longrightarrow a-c=b-d\\ &\Longrightarrow c-a=d-b\\ &\Longrightarrow (c,d)\mathcal{R}(a,b)\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est symétrique.……………………………………………………………………………………………(1pt)

1.3) Soient $(a,b),(c,d),(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\big((a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \ \text{ et } \ (c,d)\,\mathcal{R}\,(m,n)\big) &\Longrightarrow (\,a-c=b-d \quad \text{et} \quad c-m=d-n\,)\\ &\Longrightarrow \ (a-c)+(c-m)=(b-d)+(d-n\,)\\ &\Longrightarrow a-m=b-n\\ &\Longrightarrow (a,b)\,\mathcal{R}\,(m,n).\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est transitive. ……………………………………………………………………………………………(1.5pt)

On conclut que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. ……………………………………………………(0.5pt)

2) $\dot{\widehat{(1,1)}} = \{(a,b)\in\mathbb{N}^2\,,\ (a,b)\,\mathcal{R}\,(1,1)\,\} = \{(a,b)\in\mathbb{N}^2\,,\ a-1=b-1\,\}$

$= \{(a,b)\in\mathbb{N}^2\,,\ a=b\,\} = \{(b,b)\ /\ \ b\in\mathbb{N}\}$ ……………………………………………………(1pt)

$\dot{\widehat{(2,0)}} = \{(a,b)\in\mathbb{N}^2\,,\ (a,b)\,\mathcal{R}\,(2,0)\,\} = \{(a,b)\in\mathbb{N}^2\,,\ a-2=b-0\}$

$= \{(a,b)\in\mathbb{N}^2\,,\ a=b+2\,\} = \{(b+2\,,b)\ /\ \ b\in\mathbb{N}\,\}$. ……………………………………(1pt)